Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Биопералы и биалгебры Хопфа в теории ко-
бордизмов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 270–
279

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 05:17:15

УДК 515.142.42

БИОПЕРАДЫ И БИАЛГЕБРЫ ХОПФА В ТЕОРИИ КОБОРДИЗМОВ

В. А. Смирнов

Предлагается конструкция операций Дайера–Лашофа для кобордизмов топологических пространств.

Библиография: 6 названий.

В работе [1] было показано, что операции Стиррода в когомологиях топологического пространства и операции Дайера–Лашофа в гомологиях E_∞ -пространства индуцируются действием биалгебры Хопфа E_* , представляющей собой гомологии операды E . Здесь мы определим соответствующую биалгебру Хопфа $\mathbb{E}_*$ для обобщенных когомологий и, в частности, для кобордизмов топологических пространств. Мы покажем, что кобордизмы топологического пространства и бордизмы E_∞ -пространства являются алгебрами Хопфа над биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$. В частности, действие этой алгебры Хопфа задает операции Стиррода на кобордизмах и операции Дайера–Лашофа на бордизмах топологических пространств. Для этого мы будем использовать симплициальные и операдные методы [2].

Симметрическим семейством будем называть семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(n)\}$ топологических пространств $\mathcal{E}(j)$, на которых заданы действия симметрических групп Σ_n . Симметрическое семейство $\mathcal{E}$ будем называть *биооперадой*, если заданы отображения

$$\pi: \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{E}(n+m), \quad \gamma: \mathcal{E}(k) \times (\mathcal{E}(n))^{\times k} \rightarrow \mathcal{E}(kn),$$

удовлетворяющие условиям согласованности с действиями симметрических групп, соотношениям ассоциативности и дистрибутивности [1].

Пусть для краткости $\mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) = \mathcal{E}(k) \times (\mathcal{E}(n))^{\times k}$. Тогда соотношение ассоциативности означает коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m) & \xrightarrow{\pi \times 1} & \mathcal{E}(k+n) \times \mathcal{E}(m) & \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) * \mathcal{E}(m) & \xrightarrow{\gamma * 1} & \mathcal{E}(kn) * \mathcal{E}(m) \\ 1 \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi & 1 * \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n+m) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}(k+n+m) & \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(nm) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{E}(knt) \end{array},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Английского Королевского Общества.

а соотношения дистрибутивности означают коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{E}(k') \times \mathcal{E}(k'')) * \mathcal{E}(n) & \xrightarrow{\pi * 1} & \mathcal{E}(k' + k'') * \mathcal{E}(n) \\
 \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 (\mathcal{E}(k') * \mathcal{E}(n)) \times (\mathcal{E}(k'') * \mathcal{E}(n)) & & \mathcal{E}((k' + k'')n) \\
 \gamma \times \gamma \downarrow & & \downarrow = \\
 \mathcal{E}(k'n) \times \mathcal{E}(k''n) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}(k'n + k''n)
 \end{array}$$

Кроме того, требуется, чтобы диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(k) * (\mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m)) & \xrightarrow{\nabla * 1} & (\mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(k)) * (\mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m)) \\
 1 * \pi \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n + m) & & (\mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n)) \times (\mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(m)) \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \times \gamma \\
 \mathcal{E}(k(n + m)) & \xleftarrow{\pi} & \mathcal{E}(kn) \times \mathcal{E}(km)
 \end{array}$$

были коммутативны с точностью до некоторых гомеоморфизмов $\xi: \mathcal{E}(k(n + m)) \rightarrow \mathcal{E}(k(n + m))$ таких, что $\xi(x\sigma) = \xi(x)\xi(\sigma)$, $x \in \mathcal{E}(k(n + m))$, $\sigma \in \Sigma_{k(n+m)}$ (см. [1]).

Биоперату E будем называть E_∞ -биоператой, если пространства $E(n)$ ацикличны и симметрические группы действуют на них свободно.

Отметим, что понятие биоператы, хотя и близко к понятию операты, тем не менее отличается от него. С одной стороны, для операты $\mathcal{E}$ требуется наличие отображений

$$\gamma: \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n_1) \times \cdots \times \mathcal{E}(n_k) \rightarrow \mathcal{E}(n_1 + \cdots + n_k)$$

для различных $n_1, \dots, n_k$, а не только для одинаковых, как для биоператы. С другой стороны, для операты не требуется наличие отображений π , а следовательно, и соотношений дистрибутивности.

Мы так изменили понятие операты, потому что, во-первых, для задания умножений в алгебре Стиррода и Дайера–Лашофа используются только отображения типа $\gamma: \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(kn)$; во-вторых, для определения соотношений в этих алгебрах, в частности соотношений Адема, требуется задание отображений $\pi: \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{E}(n + m)$ и соотношений дистрибутивности между π и γ .

Конечно, операта $\Sigma = \{\Sigma_n\}$ дает и пример биоператы. Для того чтобы привести пример E_∞ -биоператы, рассмотрим симплициальные резольвенты $B_*(\ast, \Sigma_n, \Sigma_n)$ симметрических групп Σ_n . Тогда их реализации $E(n)$ будут стягиваемыми пространствами, на которых симметрические группы Σ_n действуют свободно.

Структура биоператы на семействе Σ индуцирует соответствующую структуру биоператы на семействе E , которое является как оператой, так и биоператой.

В дальнейшем мы приведем примеры биоперат, не являющихся оператами.

Пусть $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(n)\}$ – семейство топологических пространств, $\mathcal{E}$ – биоперата. Будем говорить, что семейство $\mathcal{F}$ есть $\mathcal{E}$ -мультипликативное семейство, если заданы отображения

$$\pi: \mathcal{F}(n) \times \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{F}(n + m), \quad \mu: \mathcal{E}(k) * \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(kn),$$

которые согласованы с действиями симметрических групп и удовлетворяют соотношениям ассоциативности и дистрибутивности.

Пространство X будем называть $\mathcal{E}$ -мультипликативным пространством, если соответствующее семейство $\{X(n)\}$, $X(n) = X$, является $\mathcal{E}$ -мультипликативным.

Если биоперата E является E_∞ -биоператой, то E -мультипликативное семейство F будем называть E_∞ -мультипликативным семейством, а E -мультипликативное пространство X — E_∞ -мультипликативным пространством.

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(n)\}$ — биоперата. Положим $\mathcal{E}_*(n) = H_*(\mathcal{E}(n)/\Sigma_n)$ и определим $\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)$ как тензорные произведения $\mathcal{E}_*(k) \otimes \mathcal{E}_*(n)$, размерность элементов $x \otimes y \in \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)$ в которых берется равной $\dim(x) + k \dim(y)$. Структура биоператы на E индуцирует произведения

$$\pi_*: \mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m) \rightarrow \mathcal{E}_*(n+m), \quad \gamma_*: \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n) \rightarrow \mathcal{E}_*(kn).$$

Кроме того, имеется копроизведение

$$\nabla_*: \mathcal{E}_*(n) \rightarrow \mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(n).$$

Из определения биоператы непосредственно следует, что семейство $\mathcal{E}_* = \{\mathcal{E}_*(n)\}$ с операциями π_* , γ_* , ∇_* является *биалгеброй Хопфа* [1], т.е. выполняются следующие условия:

- 1) операции (π_*, ∇_*) и (γ_*, ∇_*) определяют структуры алгебр Хопфа на $\mathcal{E}_*$;
- 2) между операциями γ_* и π_* имеют место соотношения дистрибутивности, означающие коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}_*(k') \otimes \mathcal{E}_*(k'')) * \mathcal{E}_*(n) & \xrightarrow{\pi_* * 1} & \mathcal{E}_*(k' + k'') * \mathcal{E}_*(n) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_* \\ (\mathcal{E}_*(k') * \mathcal{E}_*(n)) \otimes (\mathcal{E}_*(k'') * \mathcal{E}_*(n)) & & \mathcal{E}_*((k' + k'')n) \\ \gamma_* \otimes \gamma_* \downarrow & & \downarrow = \\ \mathcal{E}_*(k'n) \otimes \mathcal{E}_*(k''n) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{E}_*(k'n + k''n) \end{array} ;$$

кроме того, диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_*(k) * (\mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m)) & \xrightarrow{\nabla_* * 1} & (\mathcal{E}_*(k) \otimes \mathcal{E}_*(k)) * (\mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m)) \\ 1 * \pi_* \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n+m) & & (\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)) \otimes (\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(m)) \\ \gamma_* \downarrow & & \downarrow \gamma_* \otimes \gamma_* \\ \mathcal{E}_*(k(n+m)) & \xleftarrow{\pi_*} & \mathcal{E}_*(kn) \otimes \mathcal{E}_*(km) \end{array}$$

коммутативны с точностью до некоторых изоморфизмов $\xi_*: \mathcal{E}_*(k(n+m)) \rightarrow \mathcal{E}_*(k(n+m))$.

Заметим, что понятие биалгебры Хопфа близко, но не совпадает с понятием кольца Хопфа [3]. Отличие состоит в соотношениях дистрибутивности и в том, что мы не требуем коммутативности произведения γ_* .

Если $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(n)\} - \mathcal{E}$ -мультипликативное семейство, то на гомологиях $\mathcal{F}_* = \{\mathcal{F}_*(n)\}$, $\mathcal{F}_*(n) = H_*(\mathcal{F}(n))$ имеется структура алгебры Хопфа, состоящая из операций

$$\begin{aligned} \pi_*: \mathcal{F}_*(n) \otimes \mathcal{F}_*(m) &\rightarrow \mathcal{F}_*(n+m), & \mu_*: \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{F}_*(n) &\rightarrow \mathcal{F}_*(kn), \\ \nabla_*: \mathcal{F}_*(n) &\rightarrow \mathcal{F}_*(n) \otimes \mathcal{F}_*(n), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют условиям, аналогичным условиям 1), 2) в определении биалгебры Хопфа.

Заметим, что если $E - E_\infty$ -биооперада и $F - E$ -мультипликативное семейство, то задание действия $\mu_*: E_* * F_* \rightarrow F_*$ равносильно заданию на F_* действия алгебры Дайера-Лашофа.

Пусть $\mathbb{F}$ – поле действительных чисел $\mathbb{R}$, или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Рассмотрим семейство $GL = \{GL(\mathbb{F}, n)\}_{n \geq 1}$ полных линейных групп $GL(\mathbb{F}, n)$ векторных пространств $\mathbb{F}^n$. Перестановка сомножителей в $\mathbb{F}^n$ индуцирует свободное действие Σ_n на $GL(\mathbb{F}, n)$:

$$(\sigma f)(x) = f(\sigma^{-1}x), \quad f \in GL(\mathbb{F}, n), \quad x \in \mathbb{F}^n, \quad \sigma \in \Sigma_n.$$

Представляя элементы из $GL(\mathbb{F}, n)$ матрицами, получим, что действие симметрических групп Σ_n определяется перестановками столбцов этих матриц.

Имеют место отображения $\pi: GL(\mathbb{F}, n) \times GL(\mathbb{F}, m) \rightarrow GL(\mathbb{F}, n+m)$, которые сопоставляют паре матриц (A, B) матрицу

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

где O – нулевая матрица.

Определим отображения $\gamma: GL(\mathbb{F}, k) * GL(\mathbb{F}, n) \rightarrow GL(\mathbb{F}, kn)$. Пусть $A \in GL(\mathbb{F}, k)$, $B_i \in GL(\mathbb{F}, n)$, $1 \leq i \leq k$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $A(n)$ матрицу в $GL(\mathbb{F}, kn)$, состоящую из $(n \times n)$ -матриц

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Используя тензорное произведение матриц, запишем $A(n)$ в виде $A(n) = A \otimes I_n$, где I_n – единичная матрица в $GL(\mathbb{F}, n)$.

Положим $\gamma(A \times B_1 \times \dots \times B_k) = A(n) \cdot (B_1 \oplus \dots \oplus B_k)$. Прямые вычисления показывают, что выполняются требуемые соотношения и, следовательно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство $GL = \{GL(\mathbb{F}, n)\}$ с определенными выше операциями

$$\pi: GL(\mathbb{F}, n) \times GL(\mathbb{F}, m) \rightarrow GL(\mathbb{F}, n + m), \quad \gamma: GL(\mathbb{F}, k) * GL(\mathbb{F}, n) \rightarrow GL(\mathbb{F}, kn)$$

является биоперადой. В частности, биопепадами являются семейства ортогональных групп $O = \{O(n)\}$, унитарных групп $U = \{U(n)\}$ и симплектических групп $Sp = \{Sp(n)\}$.

Для групп $G(n) = GL(\mathbb{F}, n)$ рассмотрим пространства $EG(n)$, являющиеся реализациями симплицальных резольвент

$$B_*(*, G(n), G(n)) : G(n) \leftarrow G(n) \times G(n) \leftarrow \dots \leftarrow G(n)^{\times m+1} \leftarrow \dots.$$

Структура биопепады на GL индуцирует структуру биопепады на $EG = \{EG(n)\}$. Учитывая, что пространства $E(n)$ ациклически со свободным действием симметрических групп, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Биопепада EG является E_∞ -биоперადой. В частности, E_∞ -биопепадами являются $EO = \{EO(n)\}$, $EU = \{EU(n)\}$ и $ESp = \{ESp(n)\}$.

Заметим, что представления симметрических групп $\Sigma_n \rightarrow GL(\mathbb{F}, n)$ определяют отображение биопепад $E \rightarrow EG$, индуцирующее изоморфизм гомотопий $E_* \rightarrow EG_*$. В том числе имеют место изоморфизмы биагебр Хопфа $E_* \cong EO_* \cong EU_* \cong ESp_*$.

Для групп $G(n) = GL(\mathbb{F}, n)$ рассмотрим классифицирующие пространства $BG(n)$, являющиеся реализациями симплицальных объектов

$$B_*(*, G(n), *) : * \leftarrow G(n) \leftarrow G(n) \times G(n) \leftarrow \dots \leftarrow G(n)^{\times m+1} \leftarrow \dots.$$

Структура биопепады на GL индуцирует на $BG = \{BG(n)\}$ действие биопепады EG , т.е. имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Семейство BG является EG -мультипликативным семейством. В частности, BO есть EO -мультипликативное семейство, BU есть EU -мультипликативное семейство, BSp есть ESp -мультипликативное семейство. Следовательно, гомотопии $BO_* = \{H_*(BO(n))\}$, $BU_* = \{H_*(BU(n))\}$, $BSp_* = \{H_*(BSp(n))\}$ являются алгебрами Хопфа над биагеброй Хопфа E_* .

Перейдем теперь к спектрам. Пусть $\mathcal{E}$ – биопепада. Мультипликативный спектр $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(n)\}$ будем называть $\mathcal{E}$ -мультипликативным, если заданы операции $\mu: \mathcal{E}(k) * \mathbb{X}(n) \rightarrow \mathbb{X}(kn)$, которые вместе с мультипликативной структурой на $\mathbb{X}$ образуют структуру $\mathcal{E}$ -мультипликативного семейства. Если E является E_∞ -биоперადой, то E -мультипликативный спектр $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(n)\}$ будем называть E_∞ -мультипликативным спектром.

Заметим, что понятие E_∞ -мультипликативного спектра по существу совпадает с понятием H_∞ -кольцевого предспектра [4] и отличается от понятий H_∞ - и E_∞ -кольцевых спектров [5] тем, что мы не требуем согласованности операций μ со структурой спектра на $\mathbb{X}$.

Пусть $\mathbb{S} = \{S^n\}$ – спектр сфер. Действие групп $O(n)$ на пространствах $\mathbb{R}^n$ определяет действие групп $O(n)$ на S^n . Рассмотрим симплицальный объект

$$B_*(*, O(n), S^n) : S^n \leftarrow O(n) \times S^n \leftarrow \dots \leftarrow O(n)^{\times m} \times S^n \leftarrow \dots,$$

где “ $\wedge$ ” обозначает полупрямое произведение. Его реализация является пространством Тома $MO(n)$, и семейство $MO = \{MO(n)\}$ – спектром Тома. Аналогично, имеются спектры Тома MU , $M\mathcal{S}p$.

Так же, как была определена структура операд на семействе $GL = \{GL(n)\}$, определяются действия $\mu: O(k) \times (\mathbb{R}^n)^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}^{kn}$, которые индуцируют действия биоперад $O = \{O(n)\}$ на семействе сфер $\mathbb{S} = \{S^n\}$. Кроме того, имеются естественные отображения $\pi: S^n \wedge S^m \rightarrow S^{n+m}$. Непосредственная проверка показывает, что эти отображения μ и π удовлетворяют требуемым соотношениям и, следовательно, спектр сфер $\mathbb{S} = \{S^n\}$ является O -мультипликативным.

Эта структура на $\mathbb{S}$ индуцирует отображения

$$\pi: MO(n) \wedge MO(m) \rightarrow MO(n+m), \quad \mu: EO(k) * MO(n) \rightarrow MO(kn),$$

которые определяют на спектре Тома $MO = \{MO(n)\}$ структуру EO -мультипликативного спектра. Аналогичная структура имеется и на других спектрах Тома, т.е. имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Спектр Тома MO является EO -мультипликативным спектром, MU является EU -мультипликативным спектром и $M\mathcal{S}p$ является $E\mathcal{S}p$ -мультипликативным спектром. Следовательно, гомологии $MO_* = \{H_*(MO(n))\}$, $MU_* = \{H_*(MU(n))\}$, $M\mathcal{S}p_* = \{H_*(M\mathcal{S}p(n))\}$ являются алгебрами Хопфа над бивалгеброй Хопфа E_* .*

Рассмотрим теорию гомологий, ассоциированную с мультипликативным спектром $\mathbb{H}$. Для пространства X гомологии $\mathbb{H}_*(X) = \{\mathbb{H}_n(X)\}$ определяются формулой

$$\mathbb{H}_n(X) = \lim_i \pi_{n+i}(\mathbb{H}(i) \wedge X),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\pi_{n+i}(\mathbb{H}(i) \wedge X) \rightarrow \pi_{n+i+1}(S\mathbb{H}(i) \wedge X) \rightarrow \pi_{n+i+1}(\mathbb{H}(i+1) \wedge X).$$

В частности, имеют место теории гомологий MO_* , MU_* , $M\mathcal{S}p_*$.

Пусть теперь $\mathbb{X}$ – коспектр, т.е. семейство $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ пространств $\mathbb{X}(m)$ с заданными отображениями $\mathbb{X}(m) \rightarrow S\mathbb{X}(m-1)$. Тогда гомологии коспектра $\mathbb{X}$ определяются формулой

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m}(S\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m-1}(\mathbb{X}(m-1)).$$

Легко видеть, что если X – топологическое пространство и SX – надстроечный коспектр, то гомологии этого коспектра будут изоморфны гомологиям пространства X .

Мы обобщим понятие коспектра и введем понятие $\mathbb{H}$ -коспектра. А именно, семейство $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ пространств $\mathbb{X}(m)$ будем называть $\mathbb{H}$ -коспектром, если для любого m задано отображение $\varphi: \mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)$.

Ясно, что $\mathbb{S}$ -коспектры есть просто коспектры. Для того чтобы привести нетривиальные примеры $\mathbb{H}$ -коспектров, рассмотрим биоперату E и E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$. Для коспектра $\mathbb{X}$ положим $E(k, \mathbb{X}(m)) = E(k) *_{\mathbb{S}_k} \mathbb{X}(m)$. Пусть $E(k, \mathbb{X}) -$

семейство пространств $\{E(k, \mathbb{X})(n)\}$, для которых $E(k, \mathbb{X})(km) = E(k, \mathbb{X}(m))$, если $n = km$, и надстройки над этими пространствами для других n .

Отображения

$$\begin{aligned} E(k, \mathbb{X}(m)) &\rightarrow E(k, S\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow E(k, \mathbb{H}(1) \wedge \mathbb{X}(m-1)) \\ &\rightarrow (E(k, \mathbb{H}(1)) \wedge (E(k, \mathbb{X}(m-1))) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge (E(k, \mathbb{X}(m-1))) \end{aligned}$$

определяют на семействе $E(k, \mathbb{X})$ искомую структуру $\mathbb{H}$ -коспектра. В частности, для сферического коспектра $\mathbb{S}$ мы имеем $\mathbb{H}$ -коспектр $E(k, \mathbb{S})$, который играет важную роль при построении операций Стиррода и Дайера–Лашофа.

Пусть $\mathbb{X}$ – $\mathbb{H}$ -коспектр, $\varphi: \mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)$. Определим гомологии $\mathbb{H}_*^\varphi(\mathbb{X})$, которые будем называть *скрученными гомологиями*:

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\varphi_*: \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m-k}(\mathbb{X}(m-k)).$$

В частности, определены скрученные гомологии

$$\mathbb{H}_n^\varphi(E(k, \mathbb{S})) = \lim_m \mathbb{H}_{n+km}(E(k, S^m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\varphi_*: \mathbb{H}_{n+km}(E(k, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+k(m-1)}(E(k, S^{m-1})).$$

Ясно, что скрученные гомологии коспектра, рассматриваемого как $\mathbb{H}$ -коспектр, изоморфны просто гомологиям коспектра.

Пусть E – биоперада, X – E -мультипликативное пространство, $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр. Наша цель состоит в построении операций на гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$, аналогичных операциям Дайера–Лашофа для обычных гомологий.

Отметим, что в работах [4], [5] предложен общий метод построения операций Дайера–Лашофа для теорий гомологий, соответствующих H_∞ - и E_∞ -кольцевым спектрам. Переход от H_∞ -предспектров к H_∞ -кольцевым спектрам осуществляется с помощью некоторого стабилизирующего функтора Z . Мы определим операции Дайера–Лашофа непосредственно для E -мультипликативных спектров в том числе и для H_∞ -предспектров. Это позволит определить не только операции Дайера–Лашофа для обобщенных гомологий, но и саму алгебру Дайера–Лашофа. Для этого и потребуются понятие скрученных гомологий.

Пусть $x \in \mathbb{H}_n(X)$ и $f: S^{n+m} \rightarrow \mathbb{H}(m) \wedge X$ – представляющее его непрерывное отображение. Рассмотрим отображение

$$E(k, f): E(k, S^{n+m}) \rightarrow E(k, \mathbb{H}(m) \wedge X) \quad (1)$$

и возьмем композицию отображений (1) и

$$E(k, \mathbb{H}(m) \wedge X) \rightarrow E(k, \mathbb{H}(m)) \wedge E(k, X) \rightarrow \mathbb{H}(km) \wedge X.$$

Получим отображение $E(k, S^{n+m}) \rightarrow \mathbb{H}(km) \wedge X$ и, следовательно, отображение

$$\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{n+m}) \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge \mathbb{H}(km) \wedge X \rightarrow \mathbb{H}(j + km) \wedge X,$$

которое индуцирует гомоморфизм гомотопических групп

$$\pi_{i+j+k(n+m)}(\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{n+m})) \rightarrow \pi_{i+j+k(n+m)}(\mathbb{H}(j + km) \wedge X).$$

Переходя к пределу по j , получим гомоморфизм $\mu_f: \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \rightarrow \mathbb{H}_{i+kn}(X)$ и, следовательно, действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{H}(m) \wedge X) \rightarrow \mathbb{H}_{i+kn}(X).$$

Для надстроечного гомоморфизма $S: \pi_{n+m}(\mathbb{H}(m) \wedge X) \rightarrow \pi_{n+m+1}(\mathbb{H}(m+1) \wedge X)$ имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{i+k(n+m+1)}(E(k, S^{n+m+1})) \times \pi_{n+m+1}(\mathbb{H}(m+1) \wedge X) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}_{i+kn}(X) \\ \uparrow 1 \times S & & \downarrow \\ \mathbb{H}_{i+k(n+m+1)}(E(k, S^{n+m+1})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{H}(m) \wedge X) & & = \\ \downarrow \varphi_* \times 1 & & \downarrow \\ \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{H}(m) \wedge X) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}_{i+kn}(X) \end{array}.$$

Переходя к пределу по m , получим требуемое действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_i^\varphi(E(k, \mathbb{S})) \times \mathbb{H}_n(X) \rightarrow \mathbb{H}_{i+kn}(X),$$

которое аддитивно по первому сомножителю и, вообще говоря, неаддитивно по второму.

Обозначим через $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(X)$ соответствующее полутензорное произведение, размерность элементов $e_i * x_n$ в котором считается равной $i + kn$. Тогда операции $\mu_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$ сохраняют размерность.

Если в определении операций Дайера–Лашофа $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$ вместо пространства X мы возьмем $E(n, S^m)$, то получим отображения

$$\gamma_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(E(n, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}_*(E(kn, S^m)).$$

Переходя к пределу по m , получим операции

$$\gamma_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(E(n, \mathbb{S})) \rightarrow \mathbb{H}_*(E(kn, \mathbb{S})).$$

Полагая $\mathbb{E}_*(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S}))$, получим операции $\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(kn)$.

Из определения операды E непосредственно следует, что построенные операции γ_* ассоциативны и, следовательно, семейство $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$, $\mathbb{E}_*(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S}))$, можно считать алгеброй с операцией $\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(kn)$. Если X является E -мультипликативным пространством, то операции $\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$ индуцируют действие алгебры $\mathbb{E}_*$ на гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$.

На $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$ имеется дополнительная структура модуля над алгеброй $\mathbb{H}_*(S^0)$, $\mu_*: \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n)$. Так как S^0 можно считать тривиальным E -мультипликативным пространством, имеется действие $\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(S^0) \rightarrow \mathbb{H}_*(S^0)$. Кроме того, произведения $\pi: E(n) \times E(m) \rightarrow E(n+m)$ индуцируют произведения

$$\pi_*: \mathbb{E}_*(n) \otimes \mathbb{E}_*(m) \rightarrow \mathbb{E}_*(n+m).$$

Диагональ $\nabla: E(n) \rightarrow E(n) \times E(n)$ в случае, когда $\mathbb{E}_*(n)$ является плоским $\mathbb{H}_*(S^0)$ -модулем, индуцирует копроизведение $\nabla_*: \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{E}_*(n)$.

Между этими операциями имеются все возможные соотношения ассоциативности, дистрибутивности и соотношения Хопфа. Мы будем называть такую структуру на $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$ *структурой $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгебры Хопфа*. Таким образом, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если E – биоперанда и $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, то гомологии $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$, $\mathbb{E}_*(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S}))$, являются $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгеброй Хопфа. Если X – E -мультипликативное пространство, то гомологии $\mathbb{H}_*(X)$ являются $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгеброй над $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$.

Заметим, что для определения операций Дайера–Лашофа с $\mathbb{Z}/p$ -коэффициентами $\mathbb{H}_*(\mathbb{X}; \mathbb{Z}/p)$ необходимо лишь заменить спектр сфер $\mathbb{S}$ на соответствующий спектр Мура $\mathbb{S}_{(p)}$ [5]. В этом случае мы получим алгебру $\mathbb{E}_*^{(p)} = \{\mathbb{E}_*^{(p)}(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S}_{(p)}); \mathbb{Z}/p)\}$ и операции $\mu_*: \mathbb{E}_*^{(p)}(k) * \mathbb{H}_*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{H}_*(X; \mathbb{Z}/p)$.

Рассмотрим теперь теорию когомологий $\mathbb{H}^*$, ассоциированную со спектром $\mathbb{H}$. Если X – топологическое пространство, то гомологии $\mathbb{H}^*(X) = \{\mathbb{H}^n(X)\}$ определяются формулой

$$\mathbb{H}^n(X) = \lim_m \pi_i(X, \mathbb{H}(n+i)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\pi_i(X, \mathbb{H}(n+i)) \rightarrow \pi_{m+1}(X, S\mathbb{H}(n+i)) \rightarrow \pi_{m+1}(X, \mathbb{H}(n+i+1)).$$

Определим также когомологии коспектра $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$:

$$\mathbb{H}^n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}^{n+m}(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\mathbb{H}^{n+m-1}(\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow \mathbb{H}^{n+m}(S\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow \mathbb{H}^{n+m}(\mathbb{X}(m)).$$

Ясно, что когомологии надстроечного коспектра $\mathbb{S} \wedge X = \{S^n X\}$ над пространством X изоморфны когомологиям пространства X .

Для $\mathbb{H}$ -коспектра $\mathbb{X}$ определим скрученные когомологии:

$$\mathbb{H}_\varphi^n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}^{n+m}_\varphi(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\mathbb{H}^{n+m-k}(\mathbb{X}(m-k)) \rightarrow \mathbb{H}^{n+m}(\mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)) \rightarrow \mathbb{H}^{n+m}(\mathbb{X}(m)).$$

Ясно, что скрученные когомологии коспектра $\mathbb{X}$, рассматриваемого как $\mathbb{H}$ -коспектр по отношению к отображениям $\mathbb{X}(m) \rightarrow S\mathbb{X}(m-1) \rightarrow \mathbb{H}(1) \wedge \mathbb{X}(m-1)$, изоморфны когомологиям коспектра $\mathbb{X}$.

Пусть E – биоперанда, $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, X – топологическое пространство. Наша цель состоит в определении операций на когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ в том числе и на кобордизмах, аналогичных операциям Стиррода [6].

Пусть $x \in \mathbb{H}^n(X)$ и $f: S^m X \rightarrow \mathbb{H}(n+m)$ – представляющее его отображение. Это отображение индуцирует отображение

$$E(k, S^m X) \rightarrow E(k, \mathbb{H}(n+m)). \quad (2)$$

Композиция отображений (2) и $\gamma: E(k, \mathbb{H}(n+m)) \rightarrow \mathbb{H}(kn+km)$ дает отображение

$$E(k, S^m X) \rightarrow \mathbb{H}(kn+km). \quad (3)$$

Диагональное отображение $X \rightarrow X \wedge \cdots \wedge X$ индуцирует отображение $E(k, S^m) \wedge X \rightarrow E(k, S^m X)$, композиция которого с (3) дает отображение $E(k, S^m) \wedge X \rightarrow \mathbb{H}(kn + km)$. Умножая его на $\mathbb{H}(j)$, получим отображение

$$\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m) \wedge X \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge \mathbb{H}(kn + km) \rightarrow \mathbb{H}(j + kn + km)$$

и, следовательно, отображение $\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m) \rightarrow \{X; \mathbb{H}(j + kn + km)\}$, которое индуцирует гомоморфизм гомотопических групп

$$\pi_{i+j+km}(\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m)) \rightarrow \pi_{i+j+km}(X; \mathbb{H}(j + kn + km)).$$

Переходя к пределу по j , мы получим гомоморфизм $\mu_f: \mathbb{H}_{i+km}(E(k, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}^{kn-i}(X)$.

Для надстройки $Sf: S^{m+1}X \rightarrow \mathbb{H}(n+m+1)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{i+k(m+1)}(E(k, S^{m+1})) & \xrightarrow{\mu_{Sf}} & \mathbb{H}^{kn-i}(X) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbb{H}_{i+km}(E(k, S^m)) & \xrightarrow{\mu_f} & \mathbb{H}^{kn-i}(X) \end{array}.$$

Переходя к пределу по m , мы получим требуемое действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_i^{\varphi}(E(k, \mathbb{S})) \times \mathbb{H}^n(X) \rightarrow \mathbb{H}^{kn-i}(X),$$

которое аддитивно по первому сомножителю и, вообще говоря, неаддитивно по второму.

Обозначим через $\mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}^*(X)$ соответствующее полутензорное произведение, размерность элементов $e_i * x_n$ в котором берется равной $kn - i$. Тогда действие $\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X)$ сохраняет размерность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если E – биопепада и $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, то на когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ топологического пространства X имеется естественная структура $\mathbb{H}^*(S^0)$ -алгебры над биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$. В частности, такие структуры имеются на кобордизмах топологических пространств.

Заметим, что для определения операций μ_* на когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ необходимо лишь заменить спектр сфер на соответствующий спектр Мура $\mathbb{S}_{(p)}$. При этом мы получим операции $\mu_*: \mathbb{E}_*^{(p)}(k) * \mathbb{H}^*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{H}^*(X; \mathbb{Z}/p)$.

Автор выражает благодарность профессору Манчестерского университета Н. Рэю за помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смирнов В. А. Вторичные операции в гомологиях опеады E // Изв. РАН. 1992. Т. 56. № 2. С. 449–468.
- [2] May J. P. The Geometry of Iterated Loop Spaces. Lecture Notes in Math. V. 271. Berlin: Springer, 1972.
- [3] Ravenel D. C., Wilson W. S. The Hopf ring for complex cobordism // J. Pure Appl. Algebra. 1977. V. 9. P. 241–280.
- [4] Bruner R., May J. P., McCluer J. E., Steinberger M. H_∞ Ring Spectra and their Applications. Lecture Notes in Math. V. 1176. Berlin: Springer, 1986.
- [5] May J. P., Quinn F., Ray N., Tornehaive J. E_∞ -Ring Space and E_∞ -Ring Spectra. Lecture Notes in Math. V. 577. Berlin: Springer, 1977.
- [6] Dieck T. Steenrod-Operationen in Kobordism-Theorien // Math. Z. 1968. V. 107. P. 380–401.