Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Уланский, Обобщение одного тождества для интегралов гипергеометрического типа, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 06:15:22

Обобщение одного тождества для интегралов гипергеометрического типа

Е. А. Уланский

Обозначим $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_m)$ и

$$I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} | z) = \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-z \cdot x_1 \cdots x_i)^{c_i}} d\bar{x}, \quad (1)$$

где $z, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $|\arg(1-z)| < \pi$ и $\operatorname{Re}(b_i) > \operatorname{Re}(a_i) > 0$ при $i = 1, \dots, m$, и кратко обозначено $d\bar{x} = dx_1 \dots dx_m$.

Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a_0, a_1, b_1 | z)$ является частным случаем интеграла (1):

$$F(a_0, a_1, b_1 | z) = I_1(a_1; b_1; a_0 | z). \quad (2)$$

Согласно [1; пункт 2.1.4] в области $|\arg(1-z)| < \pi$ справедливо

$$(1-z)^{-a_1} \cdot F\left(a_0, a_1, b_1 \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) = F(b_1 - a_0, a_1, b_1 | z). \quad (3)$$

Покажем, что верно более общее тождество.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия для параметров интеграла (1). Тогда

$$(1-z)^{-a_1} \cdot I_m\left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) = I_m(\bar{a}; \bar{b}; b_1 - a_2 - c_1, \dots, b_{m-1} - a_m - c_{m-1}, b_m - c_m | z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по m . При $m = 1$ с учетом равенства (2) утверждение теоремы совпадает с (3). Пусть теперь $m > 1$ и для $m-1$ утверждение теоремы верно. Домножим на постоянный множитель и произведем замену

$$x_m \rightarrow \frac{x_m}{1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}(1-x_m)}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \right)^{-1} (1-z)^{-a_1} \cdot I_m\left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) \\ &= (1-z)^{-a_1} \cdot \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m-2} \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_i)^{c_i}} \\ & \quad \times \frac{x_{m-1}^{a_{m-1}-1} (1-x_{m-1})^{b_{m-1}-a_{m-1}-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1})^{c_{m-1}+a_m+c_m-b_m}} \\ & \quad \times \frac{x_m^{a_m-1} (1-x_m)^{b_m-a_m-1} d\bar{x}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}(1-x_m))^{b_m-c_m}}. \end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби в интеграле можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{-z}{1-z} x_1 \cdots x_{m-1}(1-x_m) \right)^{b_m-c_m} \\ &= \left(1 - \frac{-z}{1-z} x_1 \cdots x_{m-1} \right)^{b_m-c_m} \left(1 - \frac{(z/(1-z))x_1 \cdots x_m}{1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}} \right)^{b_m-c_m}. \end{aligned}$$

Данная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-05700 А).

DOI: 10.4213/mzm10490

© Е. А. Уланский, 2015

Пусть $|z| < 1$, $|-z/(1-z)| < 1$. Тогда

$$\left| \frac{(z/(1-z))x_1 \cdots x_m}{1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}} \right| < 1$$

и справедливо

$$\left(1 - \frac{(z/(1-z))x_1 \cdots x_m}{1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}} \right)^{c_m - b_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} \left(\frac{(z/(1-z))x_1 \cdots x_m}{1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1}} \right)^k,$$

где $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)$, $k \geq 1$ — символ Похгаммера, определяемый для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Подставим полученное выражение в интеграл, затем, пользуясь равномерной сходимостью, поменяем местами интегрирование и суммирование и возьмем интеграл по переменной x_m . Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} z^k (1-z)^{-a_1-k} \\ & \times \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m-2} \frac{x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_i)^{c_i}} \frac{x_{m-1}^{a_{m-1}+k-1} (1-x_{m-1})^{b_{m-1}-a_{m-1}-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1})^{c_{m-1}+a_m+k}} \\ & \times x_m^{a_m+k-1} (1-x_m)^{b_m-a_m-1} d\bar{x} \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} \frac{\Gamma(a_m+k)\Gamma(b_m-a_m)}{\Gamma(b_m+k)} z^k (1-z)^{-a_1-k} \\ & \times \int_{[0,1]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-2} \frac{x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_i)^{c_i}} \\ & \times \frac{x_{m-1}^{a_{m-1}+k-1} (1-x_{m-1})^{b_{m-1}-a_{m-1}-1}}{(1 - (-z/(1-z))x_1 \cdots x_{m-1})^{c_{m-1}+a_m+k}} d\bar{x}', \end{aligned}$$

где $d\bar{x}' = dx_1 \cdots dx_{m-1}$. К полученным в данном ряде интегралам можно применить предположение индукции. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} \frac{\Gamma(a_m+k)\Gamma(b_m-a_m)}{\Gamma(b_m+k)} z^k \int_{[0,1]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - zx_1 \cdots x_i)^{b_i-a_{i+1}-c_i}} d\bar{x}' \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} z^k \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{x_i^{a_i+k-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - zx_1 \cdots x_i)^{b_i-a_{i+1}-c_i}} x_m^{a_m+k-1} (1-x_m)^{b_m-a_m-1} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Вновь поменяем местами суммирование и интегрирование; тогда под интегралом возникнет сходящийся при $|z| < 1$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_m - c_m)_k}{k!} (z \cdot x_1 \cdots x_m)^k = \frac{1}{(1 - z \cdot x_1 \cdots x_m)^{b_m - c_m}},$$

и интеграл примет вид

$$\int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - z \cdot x_1 \cdots x_i)^{b_i-a_{i+1}-c_i}} \cdot \frac{x_m^{a_m-1} (1-x_m)^{b_m-a_m-1}}{(1 - z \cdot x_1 \cdots x_m)^{b_m-c_m}} d\bar{x},$$

что, как и требуется, равно

$$\left(\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)} \right)^{-1} I_m(\bar{a}; \bar{b}; b_1 - a_2 - c_1, \dots, b_{m-1} - a_m - c_{m-1}, b_m - c_m | z).$$

Утверждение теоремы доказано в области

$$\{|z| < 1\} \cup \left\{ \left| \frac{-z}{1-z} \right| < 1 \right\},$$

но оно остается верным во всей области $|\arg(1-z)| < \pi$, поскольку обе его части в ней определены.

Теорема доказана.

Заметим, что теорема была доказана при существенных ограничениях $b_i - a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, t$, в работе [2] совершенно другим методом. Метод же, примененный здесь, почерпнут из работы Злобина [3].

Автор выражает огромную признательность рецензенту за ценнейшие замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1965.
[2] Е. А. Уланский, *Матем. заметки*, **79**:5 (2006), 796–799. [3] С. А. Злобин, *УМН*, **57**:3 (2002), 153–154.

Е. А. Уланский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ulanskiy@mail.ru

Поступило

12.05.2014