Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ж. Айбатов, Эргодическая теорема для системы обслуживания с ненадежным прибором, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 803–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:39:25

Эргодическая теорема для системы обслуживания с ненадежным прибором

С. Ж. Айбатов

Рассматривается одноканальная система обслуживания с ненадежным прибором. Вероятность выхода прибора из строя зависит от состояния случайной среды, которая описывается цепью Маркова. Для этой системы доказана эргодическая теорема.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10491

1. Введение. Одноканальные системы обслуживания с ненадежным прибором являются предметом исследований многих авторов. В значительной мере это связано с широким кругом приложений в самых различных областях: компьютерные системы, коммуникационные сети, транспортные сети, аэропорты и т.д. Одной из первых работ по данной тематике является статья [1], где была введена модель системы обслуживания с ненадежным прибором. Также стоит упомянуть работу [2], в которой рассмотрены разные виды прерывания, а также введено понятие *полного времени обслуживания* (completion time), при помощи которого система с прерываниями сводится к изучению системы $M/G/1/\infty$. К данной тематике относятся работы [3], [4]. В [5] приводится описание имеющихся в этом направлении результатов и обширный список литературы.

В рассматриваемой в статье модели предполагается, что прибор выходит из строя и восстанавливается под воздействием некоторых внешних факторов, не зависящих от входящего потока и времен обслуживания требований. Процесс, влияющий на функционирование прибора, – эргодическая цепь Маркова. Одной из особенностей настоящей модели является то, что интервалы восстановления и интервалы безотказной работы, вообще говоря, зависимы, что отличает данную работу от упомянутых выше.

Целью предпринятого исследования является нахождение условий существования собственного предельного распределения виртуального времени ожидания системы. Во многом доказательство теоремы в данной работе опирается на результаты из [6], а также на свойства регенерирующих потоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00653 А).

Структура статьи следующая. В п. 2 описывается математическая модель. В п. 3 приведено доказательство эргодической теоремы. В п. 4 даются примеры применения эргодической теоремы.

2. Описание модели. Рассматривается система обслуживания $\text{Reg}/G/1/\infty$, где символ Reg обозначает, что входящий поток требований является регенерирующим. Следуя [7], дадим определение регенерирующего потока.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Случайный процесс $\{A(t), t \geq 0\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с непрерывными слева, неубывающими траекториями называется *регенерирующим потоком*, если существует возрастающая последовательность случайных величин $\{\theta_j, j \geq 0\}$, $\theta_0 = 0$, такая, что

$$\{\kappa_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\theta_j - \theta_{j-1}, A(\theta_{j-1} + t) - A(\theta_{j-1}), t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1})\}_{j=1}^{\infty}$$

является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных элементов. При этом предполагается, что определена фильтрация $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, и процесс $A(t)$ измерим, а $\theta_j, j = 1, 2, \dots$, является марковским моментом относительно $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Последовательность $\{\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, называемых *периодами регенерации*, а $\xi_i = A(\theta_i) - A(\theta_{i-1})$ представляет собой число требований, поступивших в систему за i -й период регенерации. Предполагается, что $E\xi_i < \infty$, $E\tau_i < \infty$, так что с вероятностью единица существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{E\xi_1}{E\tau_1} = \lambda \quad (\text{п.н.}),$$

называемый *интенсивностью потока*. Значительная часть потоков, обычно используемых в теории массового обслуживания, относится к регенерирующим. Среди них дважды стохастический пуассоновский поток со случайной интенсивностью, представляющей собой регенерирующий случайный процесс (см., например, [8]), полумарковский (см., например, [9]), а также марковски модулированный (см., например, [7]) и многие другие. Регенерирующие потоки обладают рядом полезных свойств, облегчающих анализ систем с такими входящими процессами. Многие из них, используемые далее, описаны и доказаны в [7].

Времена обслуживания требований задаются последовательностью $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от входящего потока. Положим $B(x) = P\{\eta_i \leq x\}$, $b = E\eta_1 < \infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующее предположение, обеспечивающее свойство регенерации изучаемых процессов (см., например, [10]).

УСЛОВИЕ 1. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – моменты поступлений требований. Тогда

$$P\{\xi_1 = 0, \tau_1 > 0\} + P\{\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1\} > 0. \quad (1)$$

Суммарное время обслуживания требований, поступивших в $[0, t)$, обозначим

$$X(t) = \sum_{j=1}^{A(t)} \eta_j.$$

Тогда $X(t)$ – также регенерирующий поток с точками регенерации $\{\theta_i\}$.

Прибор может выходить из строя, причем его поломки и интервалы между восстановлениями связаны с функционированием случайного процесса $U(t)$, не зависящего от $A(t)$ и $\{\eta_i\}$. Предполагается, что $U(t)$ – эргодическая цепь Маркова с множеством состояний $\mathbb{E} = (0, 1, 2, \dots)$ и инфинитезимальной матрицей $Q = (q_{ij})$.

Теперь опишем, как процесс $U(t)$ влияет на прибор. В момент перехода $U(t)$ в состояние i , $i \in \mathbb{E}$, работающий прибор выходит из строя с вероятностью α_i , а сломанный прибор восстанавливается с вероятностью β_i . Таким образом, поломки и восстановления прибора возникают только в моменты изменений состояний процесса $U(t)$.

Предложенная модель может описывать различные ситуации. Если, например, $U(t)$ – число требований в системе $M/M/1$ и

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \alpha_i = 0, \quad i \neq 1, \quad \beta_i = 0, \quad i \neq 0,$$

то мы по сути рассматриваем систему с абсолютным приоритетом. Имеются требования двух типов, $A(t)$ – входящий поток требований первого типа, а требования второго типа поступают в соответствии с пуассоновским потоком и имеют экспоненциально распределенное время обслуживания. Требования второго типа обладают абсолютным приоритетом, так что требование первого типа может обслуживаться, если в системе нет требований второго типа.

Другая ситуация возникает, когда работоспособность прибора зависит от внешних случайных факторов. Множество состояний $U(t)$ представляется в виде объединения двух множеств $E = E_+ \cup E_-$, причем

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \\ \beta_i = 0, \end{cases} \quad \text{если } i \in E_-, \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha_i = 0, \\ \beta_i > 0, \end{cases} \quad \text{если } i \in E_+,$$

т.е. в состояниях из E_- прибор может сломаться, а в состояниях из E_+ он восстанавливается.

Далее, мы предполагаем, что выполнено следующее

УСЛОВИЕ 2. У процесса $U(t)$ найдутся состояния i_0 и i_1 такие, что $\alpha_{i_0} > 0$, $\beta_{i_1} > 0$.

Не ограничивая общности, положим $i_1 = 0$.

Поскольку все состояния сообщаются друг с другом, то интервалы, в течение которых прибор находится в рабочем (нерабочем) состоянии, ввиду условия 2 конечны с вероятностью единица.

Если прибор выходит из строя в момент, когда на нем обслуживается требование, то в момент восстановления прибора обслуживание требования продолжается с того момента, где оно было прервано, так что время, которое прибор тратит на обслуживание требования, находясь в рабочем состоянии, имеет функцию распределения $B(x)$.

Данная модель отличается от рассмотренной в [2] тремя обстоятельствами. В [2] предполагается, что входящий поток пуассоновский, т.е. рассматривается система $M/G/1/\infty$, а времена рабочего и нерабочего состояния – независимые случайные

величины. Кроме того, считается, что время рабочего состояния имеет экспоненциальное распределение и поломка прибора может возникнуть, только когда он обслуживает требование. Эти условия, вообще говоря, не выполняются в рассматриваемой модели. Отдельно заметим, что независимость интервалов рабочего и нерабочего состояний будет иметь место, если, например, существуют j_0 и j_1 такие, что

$$\begin{aligned}\alpha_{j_0} &> 0, & \alpha_j &= 0 \quad \text{при } j \neq j_0, \\ \beta_{j_1} &> 0, & \beta_j &= 0 \quad \text{при } j \neq j_1,\end{aligned}$$

т.е. поломка (восстановление) прибора может возникнуть только при одном состоянии $U(t)$.

Определим случайную среду для системы с помощью процесса $N(t) = \{e(t), U(t)\}$, где $e(t) = 1$, если в момент t прибор находится в рабочем состоянии, и $e(t) = 0$ в противном случае. Очевидно, что $N(t)$ также является цепью Маркова с непрерывным временем с множеством состояний $\{0, 1\} \times \mathbb{E}$ и элементы ее инфинитезимальной матрицы выглядят следующим образом (при $i \neq j$):

$$\begin{aligned}q_{(0,i)(0,j)} &= q_{ij}(1 - \beta_j), & q_{(0,i)(1,j)} &= q_{ij}\beta_j, \\ q_{(1,i)(0,j)} &= q_{ij}\alpha_j, & q_{(1,i)(1,j)} &= q_{ij}(1 - \alpha_j), \\ q_{(k,i)(k,i)} &= q_{ii}, & q_{(k,i)(1-k,i)} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Эргодичность цепи $U(t)$ влечет за собой эргодичность $N(t)$. Положим

$$\begin{aligned}p_i^0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(e(t) = 0, U(t) = i), & p_i^1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(e(t) = 1, U(t) = i), \\ \pi &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(e(t) = 1) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i^1.\end{aligned}\tag{3}$$

Стационарные вероятности p_i^0, p_i^1 являются решением системы

$$p_i^0 = \sum_{j \in \mathbb{E}} (p_j^0 p_{(0,j)(0,i)} + p_j^1 p_{(1,j)(0,i)}), \quad p_i^1 = \sum_{j \in \mathbb{E}} (p_j^0 p_{(0,j)(1,i)} + p_j^1 p_{(1,j)(1,i)}),$$

где

$$p_{(k,j)(l,i)} = \frac{q_{(k,j)(l,i)}}{-q_{(k,j)(k,j)}}, \quad k, l \in \{0, 1\}, \quad i, j \in \mathbb{E},$$

а $q_{(k,j)(l,i)}$ находятся из (2).

3. Эргодическая теорема. Рассмотрим процесс $W(t)$, представляющий собой суммарное остаточное время обслуживания требований, находящихся в системе в момент t , в предположении, что после t прибор не выходит из строя.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $U(t)$ – эргодическая цепь Маркова и выполнены условия 1 и 2. Положим $\rho = \lambda b / \pi$. Тогда

- $W(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{n.n.} \infty$, если $\rho > 1$;
- $W(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$, если $\rho = 1$;
- при $\rho < 1$ и любом начальном состоянии $W(0)$ существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(W(t) \leq x) = F(x)$$

и $F(x)$ является функцией распределения, не зависящей от $W(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем случайный процесс $Y(t) = \int_0^t 1(e(s) = 1) ds$, представляющий собой промежуток времени в интервале $[0, t]$, в течение которого прибор находится в рабочем состоянии. Тогда (см., например, [11]) справедливо соотношение

$$W(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} [W(0) + Z(t), Z(t) - Z(s)], \quad (4)$$

где $Z(t) = X(t) - Y(t)$.

Мы замечаем, что процесс $Y(t)$ имеет неубывающие траектории и является регенерирующим потоком. Его моменты регенерации $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ представляют собой подпоследовательность последовательности $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что $e(T_i + 0) = 1$ и $U(T_i + 0) = 0$. Поскольку процессы $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, то моменты регенерации T_i являются также точками регенерации потока $X(t)$. Это следует из свойств регенерирующих потоков (независимое просеивание) [7]. Не ограничивая общности, будем считать, что $P(U(0) = 0, e(0) = 1) = 1$. Тогда последовательность $\{\tau'_k = T_k - T_{k-1}\}_{k=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин.

ЛЕММА 1. Если выполнено условие 2, то $E\tau'_k < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\nu_k = \min\{j > \nu_{k-1} : U(\theta_j) = 0, e(\theta_j) = 1\}, \quad \nu_0 = 0,$$

так что $T_k = \theta_{\nu_k}$. Тогда $\{\nu_k - \nu_{k-1}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\{\nu_k\}_{k=0}^\infty$ образует процесс восстановления. По теореме Блекуэлла для функции восстановления

$$h(j) = \sum_{k=1}^\infty P(\nu_k = j) = P(U(\theta_j) = 0, e(\theta_j) = 1)$$

существует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h(j) = \frac{1}{E\nu_1}.$$

Поскольку $\{U(t), e(t)\}$ является эргодической цепью Маркова, а процессы $X(t)$ и $\{U(t), e(t)\}$ независимы, имеем $(E\nu_1)^{-1} = p_0^1 > 0$, так что $E\nu_1 < \infty$. А так как $E\tau'_1 = E\tau_1 E\nu_1$ по тождеству Вальда, то $E\tau'_1 < \infty$.

Обозначим

$$x_n = X(T_n) - X(T_{n-1}), \quad y_n = Y(T_n) - Y(T_{n-1}).$$

Поскольку $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность общих точек регенерации для $X(t)$ и $Y(t)$, последовательность $\{x_n, y_n\}_{n=1}^\infty$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных векторов и $E x_n < \infty$, $E y_n < \infty$ в силу леммы 1.

Пусть $\mu(t)$ — число регенераций в $(0, t]$, т.е. $\mu(t) = \max\{k : T_k < t\}$.

Введем вложенный процесс

$$W_n = W(T_n - 0),$$

и два вспомогательных процесса W_n^-, W_n^+

$$\begin{aligned} W_n^- &= [W_{n-1}^- + x_n - y_n]^+, & W_0^- &= W(0), \\ W_n^+ &= [W_{n-1}^+ - y_n]^+ + x_n, & W_0^+ &= W(0). \end{aligned}$$

Тогда для любого натурального $n \geq 0$ имеем п.н.

$$W_n^- \leq W_n \leq W_n^+. \quad (5)$$

Хорошо известно (см., например, [11]), что

$$\begin{aligned} W_n^- &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \infty, & \text{если } E(x_n - y_n) > 0, \\ W_n^- &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P}} \infty, & \text{если } E(x_n - y_n) = 0 \text{ и } P\{x_n = y_n\} < 1. \end{aligned}$$

Перейдем к случаю $E x_n < E y_n$. В этой ситуации, как показано в [6], процесс W_n^+ стохастически ограничен. Из (5) следует стохастическая ограниченность W_n . Заметим, что $W(t)$ и W_n являются регенерирующими процессами с моментами регенерации $\tilde{T}_n$, определяемыми соотношениями

$$\tilde{T}_n = \min\{T_k > \tilde{T}_{n-1} : W(T_k) = W_k = 0\}, \quad \tilde{T}_0 = 0.$$

В силу теоремы 1 из [12] при определенных условиях из стохастической ограниченности $W(t)$ следует его эргодичность. Приведем эти условия.

УСЛОВИЕ 3. *Выполнено неравенство $P(W_{n+1} = 0 \mid W_n = 0) > 0$.*

УСЛОВИЕ 4. *Для любого $x < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, найдутся натуральные числа $m(x)$ и $\delta(x) > 0$ такие, что при всех $y \leq x$ выполняется неравенство*

$$P(W_{n+m(x)} = 0 \mid W_n = y) \geq \delta(x).$$

Докажем, что в нашем случае они выполнены.

ЛЕММА 2. *Из условий 1 и 2 следует выполнение условий 3 и 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что первое слагаемое в (1) положительно, т.е. $P\{\xi_1 = 0, \tau_1 > 0\} > 0$. Тогда найдутся $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что

$$P\{\xi_1 = 0, h_1 < \tau_1 < h_2\} > \delta_1. \quad (6)$$

Поскольку $\{e(t), U(t)\}$ — цепь Маркова, то время пребывания в состоянии $\{1, 0\}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\gamma_0 = \sum_{j \neq 0} q_{0j}$. Учитывая (6), находим

$$P\{W_{n+1} = 0 \mid W_n = 0\} > e^{-\gamma_0 h_2} \delta_1. \quad (7)$$

Для фиксированного $x > 0$ выберем $m(x) = [x/h_1] + 1$. Тогда имеем выполнение условия 4 с $\delta(x) = e^{-\gamma_0 m(x) h_2} \delta_1^{m(x)}$.

Пусть положительно второе слагаемое в (1). Найдутся $\tilde{h}_1 > 0$, $\tilde{h}_2 > 0$ и $\tilde{\delta}_1 > 0$ такие, что

$$P\{\xi_1 = 1, \eta_1 + t_1 + \tilde{h}_1 < \tau_1 < \tilde{h}_2\} > \tilde{\delta}_1.$$

Поэтому (7) очевидным образом выполняется с заменой h_2 на $\tilde{h}_2$ и δ_1 на $\tilde{\delta}_1$. Для доказательства выполнения условия 4 достаточно взять $\tilde{m}(x) = [x/\tilde{h}_1] + 1$. Тогда при $y \leq x$

$$\mathbf{P}\{W_{n+\tilde{m}(x)} = 0 \mid W_n = y\} \geq (e^{-\gamma_0 \tilde{h}_2 \tilde{\delta}_1})^{\tilde{m}(x)} > 0.$$

Нам осталось выразить коэффициент загрузки системы $\rho = \mathbf{E}x_1/\mathbf{E}y_1$ в терминах исходных параметров.

ЛЕММА 3. *Коэффициент загрузки*

$$\frac{\mathbf{E}x_1}{\mathbf{E}y_1} = \frac{\lambda b}{\pi} = \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(t)}{t} \frac{1}{\mu(t)} \sum_{n=1}^{\mu(t)} x_n.$$

Из теории восстановления

$$\frac{\mu(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{\mathbf{E}\tau'_1}$$

и из закона больших чисел

$$\frac{1}{\mu(t)} \sum_{n=1}^{\mu(t)} x_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mathbf{E}x_1.$$

Итак, имеет место сходимость почти наврное

$$\frac{X(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{\mathbf{E}x_1}{\mathbf{E}\tau'_1}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{Y(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{\mathbf{E}y_1}{\mathbf{E}\tau'_1}.$$

Далее, так как

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{A(t)} \eta_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \lambda b,$$

то $\mathbf{E}x_1 = \lambda b \mathbf{E}\tau'_1$. А для процесса $Y(t) = \int_0^t 1(e(s) = 1) ds$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbf{E}Y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \mathbf{P}(e(s) = 1) ds = \pi.$$

Таким образом, $\mathbf{E}y_1 = \pi \mathbf{E}\tau'_1$, а следовательно,

$$\frac{\mathbf{E}x_1}{\mathbf{E}y_1} = \frac{\lambda b}{\pi},$$

где π определено в (3).

Далее рассмотрим примеры.

4. Примеры.

ПРИМЕР 1. В качестве первого примера рассмотрим упоминавшуюся выше систему с приоритетами. В одноканальную систему массового обслуживания поступают требования двух типов, причем требования второго типа имеют абсолютный приоритет по отношению к требованиям первого типа. Входящие потоки $A_i(t)$, $i = 1, 2$, независимы и $A_1(t)$ – регенерирующий поток с интенсивностью λ_1 , а $A_2(t)$ – пуассоновский с параметром λ_2 . Времена обслуживания требований первого типа – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$ и средним b , а времена обслуживания требований второго типа распределены экспоненциально с параметром μ_2 . Требования первого типа обслуживаются, когда в системе нет требований второго типа, а прерванное обслуживание требования первого типа продолжается после ухода из системы всех требований второго типа.

В качестве $U(t)$ рассмотрим число требований второго типа в момент t . Это – цепь Маркова и в предположении $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 < 1$ у нее существует стационарное распределение, при этом

$$R_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(U(t) = j) = (1 - \rho_2)\rho_2^j.$$

По отношению к требованиям первого типа прибор прерывает обслуживание, когда в системе появляются требования второго типа, т.е. $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$ при $i \geq 1$, так что $\pi = R_0$ (см., (3)) и коэффициент загрузки имеет вид $\rho_1 = \lambda_1 b / (1 - \rho_2)$. Если $A_1(t)$ – пуассоновский процесс, то получаем известные условия эргодичности (см., например, [13]).

ПРИМЕР 2. В этом примере рассмотрим систему $\text{Reg}/G/1/\infty$ функционирующую в случайной среде $U(t)$, здесь $U(t)$ – число требований в системе $M/M/1/\infty$ с пуассоновским входящим потоком интенсивности λ_1 и экспоненциально распределенным временем обслуживания с параметром μ_1 . Как известно из [6], цепь $U(t)$ эргодическая, если $\lambda_1 < \mu_1$. Инфинитезимальная матрица для процесса $U(t)$ выглядит следующим образом:

$$q_{ii+1} = \lambda_1, \quad i = 0, 1, \dots, \quad q_{ii-1} = \mu_1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q_{ij} = 0, \quad |i - j| > 1. \quad (8)$$

При переходе $U(t)$ в любое состояние работающий прибор выходит из строя с вероятностью α , а сломанный восстанавливается с вероятностью β . То есть $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$ при $i \in \{0, 1, \dots\}$. Стоит отметить, что в данной системе интервалы рабочего и нерабочего состояния будут зависимы.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(U(t) = j, e(t) = 1), & P(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} z^j P_j, \\ Q_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(U(t) = j, e(t) = 0), & Q(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} z^j Q_j, \\ R_j &= P_j + Q_j, & R(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} z^j R_j, & \rho_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Теперь, для того чтобы найти условие эргодичности данной системы, нужно найти

$$\pi = \lim_{t \rightarrow \infty} P(e(t) = 1) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j.$$

Для этого воспользуемся тем, что

$$R_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(U(t) = j) = (1 - \rho_1)\rho_1^j,$$

и выпишем систему уравнений, используя (8):

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_0 &= (1 - \alpha)\mu_1 P_1 + \beta\mu_1 Q_1, \\ (\lambda_1 + \mu_1)P_j &= (1 - \alpha)\lambda_1 P_{j-1} + (1 - \alpha)\mu_1 P_{j+1} + \beta\lambda_1 Q_{j-1} + \beta\mu_1 Q_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Полагая $c = 1 - \alpha - \beta$, очевидным образом получаем соотношение для производящей функции $P(z)$

$$P(z)(-c\rho_1 z^2 + (1 + \rho_1)z - c) = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 z} \beta(1 + \rho_1 z^2) + P_0(z - c) - \beta(1 - \rho_1). \quad (9)$$

Отсюда

$$P(z) = \frac{(1 - \rho_1)\beta(1 + \rho_1 z^2) + (1 - \rho_1 z)(P_0(z - c) - \beta(1 - \rho_1))}{(-c\rho_1 z^2 + (1 + \rho_1)z - c)(1 - \rho_1 z)}.$$

Чтобы выразить P_0 , находим корни

$$z_{1,2} = \frac{(1 + \rho_1) \pm \sqrt{(1 + \rho_1)^2 - 4c^2\rho_1}}{2c\rho_1}$$

уравнения

$$g(z) = z^2 - \frac{1 + \rho_1}{\rho_1 c} z + \frac{1}{\rho_1} = 0.$$

Из этих двух корней выбираем z_2 , так как $z_2 \in (-1, 1)$ и, следовательно, $P(z)$ аналитична в этой точке. Используя это обстоятельство, из (9) получаем

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\beta\rho_1(1 - \rho_1)z_2(1 + z_2)}{(c - z_2)(1 - z_2\rho_1)}, \\ P(1) &= \frac{P_0}{1 + \rho_1} + \frac{2\beta\rho_1}{(1 - c)(1 + \rho_1)}. \end{aligned}$$

А так как $P(1) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j$, то коэффициент загрузки данной системы равен

$$\rho = \frac{\lambda b(\alpha + \beta)(1 + \rho_1)}{(\alpha + \beta)P_0 + 2\beta\rho_1},$$

где λ – интенсивность входящего потока, а b – математическое ожидание времени обслуживания.

ПРИМЕР 3. В этом примере не удастся построить марковский процесс $U(t)$, определяющий факт доступности прибора для обслуживания. Однако в вспомогательной модели, которая функционирует в марковской случайной среде и мажорирует исходную систему, можно найти достаточное условие эргодичности. Оно близко к необходимому в том смысле, что если система неэргодична, то условие нарушается.

Модель состоит из двух последовательно расположенных систем S_1 и S_2 (см. рис. 1).

Рис. 1

Здесь S_1 – одноканальная система с пуассоновским входящим потоком с параметром λ_1 . Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром ν_1 (т.е. S_1 это $M/M/1/\infty$).

Система S_2 – одноканальная система с двумя входящими потоками. Первый поток требований – это те требования, которые поступают в очередь S_2 из системы S_1 . Второй поток требований является пуассоновским с параметром λ_2 . Предполагается, что требование из второго потока поступает в систему S_2 , если прибор не занят, и требование получает отказ, если прибор занят. Время обслуживания в системе S_2 распределено экспоненциально с параметром ν_2 .

Между S_1 и S_2 есть буфер из $k-1$, $k < \infty$, мест. Так что S_1 перестает обслуживать требования, если буфер полностью занят, т.е. в системе S_2 есть k требований.

Пусть $q_i(t)$ – число требований в S_i в момент t , $i = 1, 2$. В силу сделанных предположений $Q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ – неприводимая цепь Маркова, и поскольку $q_2(t) \leq k < \infty$, она эргодична тогда и только тогда, когда процесс $q_1(t)$ стохастически ограничен [12].

Рассмотрим вспомогательную систему $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$, предположив, что в $\tilde{S}_1$ есть запасные требования, которые поступают на обслуживание, когда прибор освобождается от обслуживания основных, т.е. тех, которые поступают с интенсивностью λ_1 . Если в момент поступления основного требования прибор занят обслуживанием запасного, он прекращает его обслуживание и начинает обслуживать основное. Поскольку мы считаем, что запасных требований сколь угодно много, поток поступающих в $\tilde{S}_2$ требований будет пуассоновским с параметром ν_2 . Разумеется, возникают задержки, если буфер заполнен.

Пусть $\tilde{q}_1(t)$ – число требований в $\tilde{S}_1$ в момент t , а $\tilde{q}_2(t)$ – процесс $q_2(t)$ для $\tilde{S}_2$. Тогда $\tilde{q}_2(t)$ является цепью Маркова, а при одинаковых начальных условиях выполняется стохастическое неравенство

$$q_1(t) \leq \tilde{q}_1(t) \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Мы можем рассматривать $\tilde{q}_2(t)$ как случайную среду для системы $\tilde{S}_1$. При этом

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{k-1} = 0, \quad \alpha_k = 1, \quad \beta_0 = \dots = \beta_{k-1} = 1, \quad \beta_k = 0.$$

Мы заключаем, что в $\tilde{S}_1$ прибор не работает, если $\tilde{q}_2(t) = k$. В соответствии с теоремой 1 коэффициент загрузки для $\tilde{S}_1$ определяется соотношением

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda_1}{\nu_1(1 - \tilde{R}_k)},$$

где $\tilde{R}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{q}_2(t) = k)$.

Для стационарного распределения $\tilde{R}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{q}_2(t) = j)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} (\nu_1 + \lambda_2)\tilde{R}_0 &= \nu_2\tilde{R}_1, \\ (\nu_1 + \nu_2)\tilde{R}_1 &= (\nu_1 + \lambda_2)\tilde{R}_0 + \nu_2\tilde{R}_2, \\ (\nu_1 + \nu_2)\tilde{R}_j &= \nu_1\tilde{R}_{j-1} + \nu_2\tilde{R}_{j+1}, \quad 1 < j < k, \\ \nu_2\tilde{R}_k &= \nu_1\tilde{R}_{k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{R}_k = \frac{\nu_1^{k-1}(\nu_1 + \lambda_2)(\nu_2 - \nu_1)}{\nu_2^k(\nu_2 - \nu_1) + (\nu_1 + \lambda_2)(\nu_2^k - \nu_1^k)}.$$

Таким образом, коэффициент загрузки равен

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda_1}{\nu_1\nu_2} \cdot \frac{\nu_2^{k+1} - \nu_1^{k+1} + \lambda_2(\nu_2^k - \nu_1^k)}{\nu_2^k - \nu_1^k + \lambda_2(\nu_2^{k-1} - \nu_1^{k-1})}.$$

Если $\nu_1 = \nu_2$, то $\tilde{R}_k = (\nu_1 + \lambda_2)/(\nu_1(k+1) + k\lambda_2)$ и коэффициент загрузки равен

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda_1}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_1(k+1) + k\lambda_2}{k\nu_1 + \lambda_2(k-1)}.$$

Пусть $\tilde{\rho} < 1$, т.е. процесс $\tilde{q}_1(t)$ эргодичен, а стало быть, стохастически ограничен. Из (10) получаем стохастическую ограниченность $q_1(t)$, а следовательно, и эргодичность этого процесса.

Предположим, что $Q(t)$ не эргодичен. Тогда $q_1(t)$ стохастически неограничен, а в силу (10) стохастически неограничен $\tilde{q}_1(t)$. Это означает, что $\tilde{\rho} \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\tilde{\rho} < 1$, то $Q(t)$ эргодичен. Если $Q(t)$ неэргодичен, то $\tilde{\rho} \geq 1$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Л. Г. Афанасьевой за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указания, существенным образом способствовавшие написанию работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. White, L. S. Christie, "Queuing with preemptive priorities or with breakdown", *Operations Res.*, **6**:1 (1958), 79–95.
- [2] D. P. Gaver, Jr., "A waiting line with interrupted service including priority", *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **24** (1962), 73–90.
- [3] J. Keilson, "Queues subject to service interruptions", *Ann. Math. Statist.*, **33**:4 (1962), 1314–1322.
- [4] T. Kernane, *A Single Server Retrial Queue with Different Types of Server Interruptions*, E-print, 2009.
- [5] A. Krishnamoorthy, P. K. Pramod, T. G. Deepak, "On a queue with interruptions and repeat or resumption of service", *Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl.*, **71**:12, e-Suppl., 1673–1683.
- [6] Л. Г. Афанасьева, "Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами", *Кибернетика и системный анализ*, **41**:1 (2005), 54–68.
- [7] L. G. Afanasyeva, E. E. Bashtova, "Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server", *Queueing Syst.*, **76**:2 (2014), 125–147.
- [8] R. A. Howard, "Research in semi-Markovian decision structures", *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **6**:4 (1964), 163–199.
- [9] L. G. Afanasyeva, E. E. Bashtova, E. V. Bulinskaya, "Limit theorems for semi-Markov queues and their applications", *Comm. Statist. Simulation Comput.*, **41**:6 (2012), 688–709.
- [10] Л. Г. Афанасьева, Е. В. Булинская, *Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980.
- [11] А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Наука, М., 1972.
- [12] Л. Г. Афанасьева, А. В. Ткаченко, "Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком", *ТВП*, **58**:2 (2013), 210–234.
- [13] Т. Саати, *Элементы теории массового обслуживания и ее приложения*, Советское радио, М., 1971.

С. Ж. Айбатов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: aybatov.serik@gmail.com

Поступило

16.05.2014

Исправленный вариант

26.10.2014