Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Пузаренко, К. В. Сторожук, Компактность и сходимость по монотонным подсетям, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 945–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:25:04

Компактность и сходимость по монотонным подсетям

В. Г. Пузаренко, К. В. Сторожук

1. Определения: направленности и сети. Понятие предела направленности, обобщающее обычное понятие предела последовательности, начиная с работ Мура и Смита [1] и Биркгофа [2], оказалось полезным в общей топологии, см., например, Келли [3] или Энгелькинг [4].

Направленное множество (направленность) – это частично упорядоченное множество $(\mathcal{A}, \leq_A)$ такое, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ найдется α_3 такой, что $\alpha_1 \leq_A \alpha_3$ и $\alpha_2 \leq_A \alpha_3$. *Поднаправленность $(\mathcal{A}, \leq_A)$ (или более тонкая направленность)* – это направленность $(\mathcal{B}, \leq_B)$ вместе с отображением $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ таким, что значения $\psi(\beta)$, начиная с некоторого $\psi(\beta_0)$, становятся в $\mathcal{A}$ “сколь угодно велики”, т.е.

$$\forall \alpha_0 \in \mathcal{A} \quad \exists \beta_0 \in \mathcal{B} \quad \forall \beta \geq_B \beta_0 \quad \psi(\beta) \geq_A \alpha_0.$$

В частности, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – конфинальное подмножество, а ψ – вложение, то говорят о *монотонной поднаправленности*.

Пусть X – топологическое пространство. *Сетью* в X называют отображение вида $\mathcal{A} \rightarrow X$; записываем так: $\alpha \mapsto x_\alpha$. Пусть $\mathcal{B}$ – поднаправленность $\mathcal{A}$. (Часто вместо “сеть” говорят снова “направленность в X ”.) *Подсетью* сети x_α называется отображение $\mathcal{B} \rightarrow X$ вида $\beta \mapsto x_{\psi(\beta)}$. Без риска непонимания пишем просто x_β .

Говорим, что $p \in X$ – *предел* сети x_α , если для любой окрестности U_p точки p найдется $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такой, что $x_\alpha \in U_p$ для всех $\alpha \geq_A \alpha_0$. Точка $p \in X$ называется *предельной точкой* сети, если для каждой окрестности U_p множество $\{\alpha \mid x_\alpha \in U_p\}$ конфинально в $\mathcal{A}$. Каждая предельная точка сети $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ является пределом какой-то подсети $\{x_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$.

Известно, что X компактно тогда и только тогда, когда любая сеть имеет сходящуюся подсеть. В этом утверждении нельзя добавить к слову “подсеть” слово “монотонная”. Даже для последовательностей это не так. Например, $\{0, 1\}^{\mathbb{C}}$ компактно, но не секвенциально компактно [2; теорема 10].

Мы показываем, что сети без монотонных сходящихся подсетей бывают даже в числовом отрезке $X = I \subset \mathbb{R}$. Это легко следует из теоремы 1. Правда, за простоту пространства X приходится платить сложностью сети.

2. Сети без монотонных сходящихся подсетей. Пусть κ – бесконечная мощность. Рассмотрим кардинал 2^κ . Он вполне упорядочен как множество всех ординалов мощности меньшей 2^κ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – топологическое пространство мощности 2^κ с точечным весом κ . Пусть отображение $\alpha \mapsto x_\alpha$ инъективно отображает 2^κ в X . Тогда никакая монотонная подсеть в $\{x_\alpha\}$ не имеет в X предела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{\beta\} \subset 2^\kappa$ – монотонная поднаправленность, сходящаяся к какому-то $p \in X$. Возьмем семейство окрестностей $\{U_s \mid s \in \kappa\}$ такое, что $\bigcap_{s \in \kappa} U_s = \{p\}$. Для каждого $s \in \kappa$ найдется β_s такой, что $x_\beta \in U_s$ для любого $\beta \geq \beta_s$.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-860.2014.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 15-01-05144-а).

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2263.2014.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 15-01-05929-а).

DOI: 10.4213/mzm10498

Подмножество $\{\beta_s \mid s \in \kappa\}$ не может быть конфинальным в 2^κ в силу κ -регулярности мощности 2^κ . Поэтому существует $\beta < 2^\kappa$ такое, что $\beta_s \leq \beta$ для всех $s \in \kappa$. Последнее означает, что $x_{\beta'} \in \bigcap_{s \in \kappa} U_s = \{p\}$ для каждого $\beta' > \beta$ – противоречие с инъективностью. Теорема доказана.

Теорема 1 иллюстрирует топологическую “дикость” полных порядков. Например, если (I, τ_1) – порядковая топология, порожденная каким-то вполне упорядочением числового отрезка I , а τ_2 – стандартная топология на I , то тождественное отображение $(I, \tau_1) \rightarrow (I, \tau_2)$ разрывно на любом континуальном подмножестве.

Это можно также сравнить с тем известным фактом, что всякая непрерывная вещественная функция $f: [0, \omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$ финально постоянна. Следующая теорема в некотором смысле двойственна теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. *Если X – топологическое пространство мощности 2^κ , то любая сеть в X , направленная порядком 2^κ , имеет сходящуюся монотонную подсеть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует точка x , имеющая прообраз $\{\beta\} \subset 2^\kappa$ мощности κ . Ясно, что $\{\beta\}$ – конфинальная направленность в 2^κ и подсеть x_β постоянна.

Для замкнутости изложения докажем здесь κ -регулярность 2^κ . Пусть A – множество мощности κ . Поскольку $\kappa \times \kappa = \kappa$, множество A можно считать объединением κ дизъюнктивных подмножеств $A_\alpha \subset A$, каждое мощности κ . Предположим, что 2^A можно покрыть семейством κ штук неких S_α , где каждое $S_\alpha \subset 2^A$ состоит строго меньше чем из 2^κ подмножеств A . Для каждого α среди подмножеств множества A_α найдется такое подмножество $B_\alpha \subset A_\alpha$, что $s_\alpha \cap A_\alpha \neq B_\alpha$ ни для каких $s_\alpha \in S_\alpha$. Определим подмножество $B \in 2^A$ так: $B = \bigcup_\alpha B_\alpha$. Множество $B \in 2^A$ не может лежать ни в каком семействе S_α , ибо $B \cap A_\alpha = B_\alpha$. Противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Н. Moore, Н. Л. Smith, *Amer. J. Math.*, **44:2** (1922), 102–121. [2] Birkhoff, Garrett, *Ann. of Math.* (2), **38:1** (1937), 39–56. [3] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981. [4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.

В. Г. Пузаренко

Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск;

Новосибирский государственный университет

E-mail: vagrig@math.nsc.ru

Поступило

02.06.2014

Исправленный вариант

17.10.2014

К. В. Сторожук

Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск;

Новосибирский государственный университет

E-mail: stork@math.nsc.ru