Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Камынин, Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 368–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:34:34

Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными

В. Л. Камынин

Получены теоремы существования и единственности решения обратной задачи одновременного определения правой части и младшего коэффициента в многомерном параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. Дана оценка максимума модуля неизвестных коэффициентов с константами, явно выписанными через входные данные задачи.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10499

1. Введение. Постановка обратной задачи. В работе изучаются вопросы существования и единственности решения $\{u(t, x), \gamma(t), f(t)\}$ обратной задачи

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} + d(t, x) u + \gamma(t) u = f(t) g(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1.1)$$

$$u(t, x) = \Phi(t, x), \quad (t, x) \in \Gamma \equiv \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$\int_{\Omega} u(t, x) \omega(x) dx = \varphi(t), \quad \int_{\Omega} u(t, x) \chi(x) dx = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.1)–(1.3) $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$, $d(t, x)$, $g(t, x)$, $\Phi(t, x)$, $\omega(x)$, $\chi(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – заданные функции.

Обратные задачи определения двух коэффициентов в параболическом уравнении в различных постановках, отличных от (1.1)–(1.3), рассматривались в работах ряда авторов (см., например, [1]–[5] и др.). В недавней работе автора [6] рассмотрена близкая по постановке обратная задача одновременного определения коэффициента перед младшей производной и правой части в параболическом уравнении на плоскости.

В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Эти условия даны в виде

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности вузов (НИЯУ МИФИ).

легко проверяемых соотношений. Приведен пример обратной задачи, для которой справедливы доказанные в работе теоремы.

Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гёльдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [7], [8]).

Также будем использовать обозначения

$$u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad |u_x|^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2, \quad \|u_x\|_{L_2(Q)}^2 = \int_Q |u_x|^2 dx dt,$$

$$\omega_x = (\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_n}), \quad |\omega_x|^2 = \sum_{i=1}^n \omega_{x_i}^2, \quad \|\omega_x\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\omega_x|^2 dx,$$

$$\chi_x = (\chi_{x_1}, \dots, \chi_{x_n}), \quad |\chi_x|^2 = \sum_{i=1}^n \chi_{x_i}^2, \quad \|\chi_x\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\chi_x|^2 dx,$$

$$b(t, x) = (b_1(t, x), \dots, b_n(t, x)), \quad |b(t, x)|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2(t, x), \quad \operatorname{div} b(t, x) = \sum_{i=1}^n (b_i(t, x))_{x_i}.$$

Положим $Q_\tau = [0, \tau] \times \bar{\Omega}$, $\tau \in [0, T]$, $Q_T \equiv Q$. Введем еще множества

$$L_\infty^+([0, T]) = \{h(t) \in L_\infty([0, T]) : h(t) \geq 0\},$$

$$B_R = \{h(t) \in L_\infty([0, T]) : |h(t)| \leq R\}, \quad B_R^+ = \{h(t) \in L_\infty([0, T]) : 0 \leq h(t) \leq R\},$$

где $R = \text{const} > 0$.

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1.1)–(1.3), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$a_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}((t, x)) \xi_i \xi_j \leq a_2 |\xi|^2, \quad \xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \equiv \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}, \quad a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (\text{A})$$

$$|(a_{ij}(t, x))_{x_i}| \leq K_a^*, \quad |(a_{ij}(t, x))_{x_i x_j}| \leq K_a^{**}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (t, x) \in Q,$$

$$|b(t, x)| \leq K_b, \quad |\operatorname{div} b(t, x)| \leq K_b^*, \quad -d_1 \leq d(t, x) \leq d_2, \quad |g(t, x)| \leq K_g, \quad (t, x) \in Q, \quad (\text{B})$$

$$\Phi(t, x) \in W_q^{1,2}(Q), \quad q \geq n+1, \quad |\Phi(0, x)| \leq M_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \Phi(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (\text{C})$$

$$\omega(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \chi(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \omega(x) = \chi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\omega, \quad \|\chi\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\chi, \quad \|\omega_x\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\omega^*, \quad \|\chi_x\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\chi^*, \quad (\text{D})$$

$$\|(a_{ij}(t, \cdot) \omega)_{x_i x_j}\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\omega^{**}, \quad \|(a_{ij}(t, \cdot) \chi)_{x_i x_j}\|_{L_2(\Omega)} \leq K_\chi^{**}, \quad t \in [0, T];$$

$$|\varphi(t)| \leq K_\varphi, \quad |\varphi'(t)| \leq K_\varphi^*, \quad |\psi(t)| \leq K_\psi, \quad |\psi'(t)| \leq K_\psi^*, \quad t \in [0, T]; \quad (\text{E})$$

$$\int_{\Omega} \Phi(0, x) \omega(x) dx = \varphi(0), \quad \int_{\Omega} \Phi(0, x) \chi(x) dx = \psi(0); \quad (\text{F})$$

здесь $a_1, a_2, M_0, K_\omega, K_\chi, K_\varphi, K_\psi, K_g = \text{const} > 0$, $K_a^*, K_a^{**}, K_b, K_b^*, d_1, d_2, K_\omega^*, K_\omega^{**}, K_\chi^*, K_\chi^{**}, K_\varphi^*, K_\psi^* = \text{const} \geq 0$.

Всюду в работе будем использовать следующие обозначения:

$$G_\omega(t) = \int_{\Omega} g(t, x) \omega(x) dx, \quad G_\chi(t) = \int_{\Omega} g(t, x) \chi(x) dx, \quad (1.4)$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & -G_\omega(t) \\ \psi(t) & -G_\chi(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} G_\chi(t) & \psi'(t) \\ G_\omega(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

Пусть $u(t, x) \in L_\infty(Q)$. Тогда положим

$$J_\omega(t; u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \omega)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i \omega)_{x_i} - d\omega \right] u(t, x) dx, \\ J_\chi(t; u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \chi)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i \chi)_{x_i} - d\chi \right] u(t, x) dx, \quad (1.6)$$

$$\Delta_\gamma(t; u) = \begin{vmatrix} J_\omega(t; u) - \varphi'(t) & -G_\omega(t) \\ J_\chi(t; u) - \psi'(t) & -G_\chi(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_f(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & J_\omega(t; u) - \varphi'(t) \\ \psi(t) & J_\chi(t; u) - \psi'(t) \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\Delta_\gamma^*(t; u) = \begin{vmatrix} J_\omega(t; u) & -G_\omega(t) \\ J_\chi(t; u) & -G_\chi(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta_f^*(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & J_\omega(t; u) \\ \psi(t) & J_\chi(t; u) \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

Кроме того, положим

$$M(R) = (M_0 + K_g T R) e^{d_1 T}, \quad K_d = \max\{d_1, d_2\}, \quad (1.9)$$

$$K_1 = n^2(K_\chi K_\omega^{**} + K_\omega K_\chi^{**}) + 2K_\chi K_\omega(K_b^* + K_d) + K_b(K_\chi K_\omega^* + K_\omega K_\chi^*),$$

$$K_2 = n^2(K_\psi K_\omega^{**} + K_\varphi K_\chi^{**}) + (K_\varphi K_\chi + K_\psi K_\omega)(K_b^* + K_d) + K_b(K_\varphi K_\chi^* + K_\psi K_\omega^*). \quad (1.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть тройку функций

$$\{u(t, x), \gamma(t), f(t)\}, \quad u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad \alpha = \text{const} \in (0, 1), \\ \gamma(t) \in L_\infty^+([0, T]), \quad f(t) \in L_\infty([0, T]),$$

такую, что эта тройка удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3).

2. Единственность решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (A)–(F). Предположим, что существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что для всех $t \in [0, T]$

$$\Delta_1(t) \geq \delta_1 > 0. \quad (2.1)$$

Тогда существует не более одного решения обратной задачи (1.1)–(1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вопреки утверждению теоремы 2.1 существует два различных решения $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(t), f^{(1)}(t)\}$ и $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(t), f^{(2)}(t)\}$. Предположим, что

$$\|u^{(i)}\|_{W_2^{1,2}(Q)} + |u^{(i)}|_{C^{0,\alpha}(Q)} \leq R_1, \quad \|\gamma^{(i)}\|_{L_\infty([0,T])} + \|f^{(i)}\|_{L_\infty([0,T])} \leq R_2, \quad (2.2) \\ i = 1, 2, \quad R_1, R_2 = \text{const} > 0.$$

Ниже в доказательстве теоремы через c , возможно, с индексом, будем обозначать положительные константы, зависящие от T , Ω , констант из условий (A)–(E), а также от R_1 и R_2 .

Положим

$$\widehat{u}(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \widehat{\gamma}(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t), \quad \widehat{f}(t) = f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t).$$

Тогда, как нетрудно видеть, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \widehat{u}_{x_i} + d(t, x) \widehat{u} + \gamma^{(1)}(t) \widehat{u} \\ = -\widehat{\gamma}(t) u^{(2)}(t, x) + \widehat{f}(t) g(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\widehat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma, \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} \widehat{u}(t, x) \omega(x) dx = 0, \quad \int_{\Omega} \widehat{u}(t, x) \chi(x) dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Умножим (2.3) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по Ω . Учитывая условия (2.5), (1.3) и обозначения (1.4), приходим к равенству

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i x_j} \omega(x) dx + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \widehat{u}_{x_i} \omega(x) dx + \int_{\Omega} d(t, x) \widehat{u} \omega(x) dx \\ = -\widehat{\gamma}(t) \varphi(t) + \widehat{f}(t) G_{\omega}(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя условия (A), (B), (D), проинтегрируем по частям в первых двух слагаемых в левой части (2.6). Тогда с учетом обозначений (1.6) получим равенство

$$\widehat{\gamma}(t) \varphi(t) - \widehat{f}(t) G_{\omega}(t) = J_{\omega}(t; \widehat{u}). \quad (2.7)$$

Умножим теперь (2.3) на $\chi(x)$. Повторяя проведенные выше рассуждения, получим еще одно равенство:

$$\widehat{\gamma}(t) \psi(t) - \widehat{f}(t) G_{\chi}(t) = J_{\chi}(t; \widehat{u}). \quad (2.8)$$

Соотношения (2.7), (2.8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\widehat{\gamma}(t)$ и $\widehat{f}(t)$. Определитель этой системы равен $\Delta_1(t)$ (см. обозначение (1.5)), который в силу условия (2.1) отличен от нуля. Следовательно, система (2.7), (2.8) имеет единственное решение, задаваемое по формулам Крамера:

$$\widehat{\gamma}(t) = \frac{\Delta_{\gamma}^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)}, \quad \widehat{f}(t) = \frac{\Delta_f^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)}; \quad (2.9)$$

$\Delta_{\gamma}^*(t; \widehat{u})$, $\Delta_f^*(t; \widehat{u})$ определены в (1.8).

Подставляя выражения для $\widehat{\gamma}(t)$ и $\widehat{f}(t)$ в равенство (2.3), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \widehat{u}_{x_i} + d(t, x) \widehat{u} + \gamma^{(1)}(t) \widehat{u} \\ = -\frac{\Delta_{\gamma}^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} u^{(2)}(t, x) + \frac{\Delta_f^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} g(t, x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Умножим (2.10) на $\widehat{u}(t, x)$ и проинтегрируем по Q_τ , $\tau \in [0, t_1]$, где величина t_1 будет выбрана ниже. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\widehat{u}(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i x_j} \widehat{u} \, dx \, dt \\ & + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \widehat{u}_{x_i} \widehat{u} \, dx \, dt + \int_{Q_\tau} (d(t, x) + \gamma^{(1)}(t)) \widehat{u}^2 \, dx \, dt \\ & = - \int_{Q_\tau} \frac{\Delta_\gamma^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} u^{(2)}(t, x) \widehat{u} \, dx \, dt + \int_{Q_\tau} \frac{\Delta_f^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} g(t, x) \widehat{u} \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Второе и третье слагаемые в левой части (2.11) преобразуем, учитывая условия (A), (B) и (2.4), следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i x_j} \widehat{u} \, dx \, dt \\ & = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \widehat{u}_{x_i} \widehat{u}_{x_j} \, dx \, dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t, x))_{x_j} \widehat{u}_{x_i} \widehat{u} \, dx \, dt \\ & \geq a_1 \|\widehat{u}_x\|_{L_2(Q_\tau)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_\tau} (a_{ij}(t, x))_{x_j} (\widehat{u}^2)_{x_i} \, dx \, dt \\ & = a_1 \|\widehat{u}_x\|_{L_2(Q_\tau)}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_\tau} (a_{ij}(t, x))_{x_i x_j} \widehat{u}^2 \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \widehat{u}_{x_i} \widehat{u} \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) (\widehat{u}^2)_{x_i} \, dx \, dt = -\frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \operatorname{div} b(t, x) \widehat{u}^2 \, dx \, dt. \quad (2.13)$$

Кроме того, в силу определения $\Delta_\gamma^*(t; \widehat{u})$, $\Delta_f^*(t; \widehat{u})$ в (1.8), учитывая условия (D), (E), (2.1) и оценки (2.2), нетрудно видеть, что

$$\left| \int_{Q_\tau} \frac{\Delta_\gamma^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} u^{(2)}(t, x) \widehat{u} \, dx \, dt \right| \leq c_1 \|\widehat{u}\|_{L_2(Q_\tau)}^2, \quad (2.14)$$

$$\left| \int_{Q_\tau} \frac{\Delta_f^*(t; \widehat{u})}{\Delta_1(t)} g(t, x) \widehat{u} \, dx \, dt \right| \leq c_2 \|\widehat{u}\|_{L_2(Q_\tau)}^2; \quad (2.15)$$

здесь константы c_1 и c_2 не зависят от t_1 .

Таким образом, с учетом соотношений (2.12)–(2.15) и первой оценки (2.2), примененной к $u^{(2)}(t, x)$, из (2.11) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \|\widehat{u}(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a_1 \|\widehat{u}\|_{L_2(Q_\tau)}^2 \leq c_3 \|\widehat{u}\|_{L_2(Q_\tau)}^2 \leq c_3 \cdot t_1 \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq t_1} \|\widehat{u}(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (2.16)$$

где константа c_3 не зависит от t_1 .

Выбирая в (2.16) $t_1 = 1/(4c_3)$, получаем, что $\widehat{u}(t, x) \equiv 0$ в Q_{t_1} .

Повторяя проведенные рассуждения для цилиндров $[t_1, 2t_1] \times \overline{\Omega}$, $[2t_1, 3t_1] \times \overline{\Omega}$ и т.д., мы за конечное число шагов покажем, что $\widehat{u}(t, x) \equiv 0$ во всем цилиндре Q . Но

тогда из (2.9) с учетом определений $\Delta_\gamma^*(t; \hat{u})$ и $\Delta_f^*(t; \hat{u})$ в (1.8) вытекает, что и $\hat{\gamma}(t) = \hat{f}(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. решения $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(t), f^{(1)}(t)\}$ и $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(t), f^{(2)}(t)\}$ совпадают. Теорема 2.1 доказана.

3. Существование решения обратной задачи. В данном пункте нам понадобятся результаты о разрешимости прямой задачи (1.1), (1.2) при некоторых выбранных функциях $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$ и $f(t) \in L_\infty([0, T])$ в уравнении (1.1).

Хорошо известно, что при выполнении только условий (A), (B), (C) (и при $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$, $f(t) \in L_\infty([0, T])$) при $n > 1$ невозможно получить априорную оценку в $L_2(Q)$ старших производных решения $u(t, x)$ прямой задачи (1.1), (1.2) и, соответственно, доказать разрешимость прямой задачи в пространстве $W_2^{1,2}(Q)$. Требуется наложить те или иные дополнительные требования на старшие коэффициенты уравнения (1.1), например, условие непрерывности (см., например, [8]) или условие типа Кордеса (см., например, [9]). Рассмотрим эти условия подробнее.

Предположим сначала, что при $n > 1$ дополнительно к условиям (A)–(F) выполнено еще условие

$$a_{ij}(t, x) \in C(Q), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (A')$$

Рассмотрим прямую задачу (1.1), (1.2) с $\gamma(x) \in B_{R_1}^+$, $f(t) \in B_{R_2}$ при некоторых $R_1, R_2 > 0$. Тогда в силу условий (A), (A'), (B), (C) можно применить результаты из [8; гл. IV, § 9], согласно которым существует единственное решение $u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q)$ прямой задачи (1.1), (1.2), причем справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c_1(R_1, R_2), \quad (3.1)$$

Кроме того, из тех же результатов вытекает, что $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$ (где q из условия (C)), причем

$$\|u\|_{W_q^{1,2}(Q)} \leq c_2(R_1, R_2). \quad (3.2)$$

Поскольку для q в (C) выполнено условие $q \geq n + 1$, то в силу известных теорем вложения (см., например, [8; гл. II, § 3]) $u(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и справедлива оценка

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} \leq c_3(R_1, R_2). \quad (3.3)$$

В оценках (3.1)–(3.3) $c_1(R_1, R_2)$, $c_2(R_1, R_2)$, $c_3(R_1, R_2)$ – положительные константы, зависящие от входных данных задачи (1.1)–(1.2), а также от R_1, R_2 .

Кроме того, в силу принципа максимума (см., например, [10; раздел 3])

$$|u(t, x)| \leq M(R_2) \equiv (M_0 + K_g T R_2) e^{d_1 T}. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При выполнении условия (A') для числа q из (C) достаточно выполнения неравенства $q > (n + 2)/2$. В этом случае решение $u(t, x)$ прямой задачи (1.1), (1.2) по-прежнему будет принадлежать пространству $C^{0,\alpha}(Q)$ (при некотором, возможно, меньшем α , зависящем в том числе и от q), и будет выполнена оценка (3.3).

Предположим теперь, что при $n > 1$ вместо условия (A') дополнительно к (A)–(F) выполнено условие

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \operatorname{ess\,sup}_Q (a_{ij}(t, x))^2 + 1 \right) / \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{ess\,inf}_Q a_{ii}(t, x) + 1 \right)^2 \leq \frac{1}{n + \varepsilon} \quad (A'')$$

при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ (см. [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Условие (A''), является условием типа Кордеса, характеризующим близость главной части уравнения (1.1) к оператору теплопроводности $u_t - \Delta u$.

Рассмотрим снова прямую задачу (1.1), (1.2) с $\gamma(x) \in B_{R_1}^+$, $f(t) \in B_{R_2}$ при некоторых $R_1, R_2 > 0$. Тогда в силу результатов работы [9] с учетом п. 4 из работы [11], существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) из пространства $W_2^{1,2}(Q)$, причем для него справедлива оценка (3.1).

Поскольку в условии (C) $q \geq n + 1$, то из результатов [12; гл. IV, §§ 2, 4] следует, что $u(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и справедлива оценка (3.3). Подробнее см. [13]. Как и выше, для решения $u(t, x)$ также справедлива оценка (3.4).

Всюду ниже в данном пункте будем предполагать, что при $n > 1$ выполнено одно из условий (A') или (A''), так что прямая задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима для любых $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$, $f(t) \in L_\infty([0, T])$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. При $n = 1$ однозначная разрешимость прямой задачи (1.1), (1.2) без условий (A') или (A'') следует из [14].

Кроме того, будем предполагать, что выполнено условие (2.1), причем константа δ_1 из этого условия удовлетворяет неравенству

$$K_g K_2 T (\text{mes } \Omega)^{1/2} e^{d_1 T} < \delta_1; \quad (3.5)$$

константа K_2 определена в (1.10).

Предположим также, что существует положительная константа δ_2 такая, что

$$\Delta_2(t) \geq \delta_2 > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.6)$$

где $\Delta_2(t)$ определена в (1.5).

Положим

$$R_f = \frac{K_\varphi K_\psi^* + K_\psi K_\varphi^* + M_0 K_2 (\text{mes } \Omega)^{1/2} e^{d_1 T}}{\delta_1 - K_g K_2 T (\text{mes } \Omega)^{1/2} e^{d_1 T}} \quad (3.7)$$

и предположим, что при выбранном так R_f

$$(M_0 + K_g T R_f) K_g K_1 (\text{mes } \Omega) e^{d_1 T} \leq \delta_2; \quad (3.8)$$

константа K_1 определена в (1.10). Заметим, что в силу условия (3.5) величина R_f , определенная в (3.7), является положительной.

Рассмотрим обратную задачу (1.1)–(1.3) и выведем систему операторных уравнений для функций $\gamma(t)$ и $f(t)$. Пусть $\gamma(t)$ – произвольная функция из $L_\infty^+([0, T])$, $f(t)$ – произвольная функция из B_{R_f} , где R_f определена в (3.7). Пусть $u(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1), (1.2) с выбранными $\gamma(t)$, $f(t)$ в уравнении (1.1).

Умножим уравнение (1.1) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по Ω . Тогда в силу (1.3) с учетом обозначений (1.4) получим равенство

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} \omega(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(t, x) u_{x_i} \omega(x) dx \\ + \int_{\Omega} d(t, x) u \omega(x) dx + \gamma(t) \varphi(t) = f(t) G_{\omega}(t). \end{aligned}$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые слева по частям, с учетом (1.2) и обозначений (1.6), приходим к соотношению

$$\varphi(t)\gamma(t) - G_\omega(t)f(t) = J_\omega(t; u) - \varphi'(t). \quad (3.9)$$

Умножим теперь (1.1) на $\chi(x)$. Тогда повторив предыдущие рассуждения, приходим к соотношению

$$\psi(t)\gamma(t) - G_\chi(t)f(t) = J_\chi(t; u) - \psi'(t). \quad (3.10)$$

Соотношения (3.9), (3.10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\gamma(t)$ и $f(t)$. Определитель этой системы, как нетрудно видеть, равен $\Delta_1(t)$ (см. (1.5)), который в силу условия (2.1) отличен от нуля. Следовательно, система (3.9), (3.10) имеет единственное решение, задаваемое формулами Крамера:

$$\gamma(t) = \frac{\Delta_\gamma(t; u)}{\Delta_1(t)}, \quad f(t) = \frac{\Delta_f(t; u)}{\Delta_1(t)}. \quad (3.11)$$

Введем оператор

$$\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2): L_\infty^+([0, T]) \times B_{R_f} \rightarrow L_\infty([0, T]) \times L_\infty([0, T])$$

по формулам

$$\mathcal{A}_1(\gamma, f) = \frac{\Delta_\gamma(t; u)}{\Delta_1(t)}, \quad \mathcal{A}_2(\gamma, f) = \frac{\Delta_f(t; u)}{\Delta_1(t)}, \quad (3.12)$$

где $u(t, x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1.1), (1.2) при заданных $\gamma(t)$ и $f(t)$ в уравнении (1.1).

В силу (A)–(E) и (2.1) оператор $\mathcal{A}$ действительно действует из $L_\infty^+([0, T]) \times B_{R_f}$ в $L_\infty([0, T]) \times L_\infty([0, T])$, а соотношения (3.11) можно переписать в виде системы уравнений

$$\gamma = \mathcal{A}_1(\gamma, f), \quad f = \mathcal{A}_2(\gamma, f). \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если $f(t) \in B_{R_f}$, то оценка (3.4) для решения прямой задачи (1.1), (1.2) запишется в виде

$$|u(t, x)| \leq M(R_f) \equiv (M_0 + K_g T R_f) e^{d_1 T}. \quad (3.14)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также (A') или (A'') если $n > 1$. Пусть выполнены условия (2.1), (3.5) и R_f определено в (3.7). Тогда для того, чтобы тройка функций $\{u(t, x), \gamma(t), f(t)\}$ была обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), необходимо и достаточно, чтобы эта тройка удовлетворяла соотношениям (1.1), (1.2), (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказана выше при выводе (3.13).

Докажем достаточность. Пусть $\gamma^*(t) \in L_\infty^+([0, T])$, $f(t) \in B_{R_f}$ удовлетворяет системе (3.13). Пусть $u^*(t, x)$ – единственное решение прямой задачи (1.1), (1.2) при заданных функциях $\gamma(t) = \gamma^*(t)$, $f(t) = f^*(t)$ в уравнении (1.1). Положим

$$\varphi^*(t) = \int_\Omega u^*(t, x) \omega(x) dx, \quad \psi^*(t) = \int_\Omega u^*(t, x) \chi(x) dx. \quad (3.15)$$

Тогда $\varphi^*(t), \psi^*(t) \in L_\infty([0, T])$, $\varphi^{*'}(t), \psi^{*'}(t) \in L_2([0, T])$. Повторим рассуждения, приведенные выше при выводе (3.9), (3.10) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(t), \psi^*(t) \in L_\infty([0, T])$, $\varphi^{*'}(t), \psi^{*'}(t) \in L_2([0, T])$). Тогда получим соотношения

$$\varphi^*(t)\gamma^*(t) - G_\omega(t)f^*(t) = J_\omega(t; u^*) - \varphi^{*'}(t), \quad (3.16)$$

$$\psi^*(t)\gamma^*(t) - G_\chi(t)f^*(t) = J_\chi(t; u^*) - \psi^{*'}(t). \quad (3.17)$$

С другой стороны, функции $\gamma^*(t)$ и $f^*(t)$ – решения системы (3.13), поэтому эти функции являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\varphi(t)\gamma^*(t) - G_\omega(t)f^*(t) = J_\omega(t; u^*) - \varphi'(t), \quad (3.18)$$

$$\psi(t)\gamma^*(t) - G_\chi(t)f^*(t) = J_\chi(t; u^*) - \psi'(t). \quad (3.19)$$

Вычитая (3.18) из (3.16) и (3.19) из (3.17), получим, что при $t \in [0, T]$

$$\gamma^*(t) \cdot (\varphi^*(t) - \varphi(t)) = -(\varphi^*(t) - \varphi(t))', \quad (3.20)$$

$$\gamma^*(t) \cdot (\psi^*(t) - \psi(t)) = -(\psi^*(t) - \psi(t))'. \quad (3.21)$$

В силу определения функций $\varphi^*(t)$ и $\psi^*(t)$ в (3.15) и условий (1.2) и (F) имеем

$$\varphi^*(0) = \int_{\Omega} u^*(0, x)\omega(x) dx = \int_{\Omega} \Phi(0, x)\omega(x) dx = \varphi(0),$$

$$\psi^*(0) = \int_{\Omega} u^*(0, x)\chi(x) dx = \int_{\Omega} \Phi(0, x)\chi(x) dx = \psi(0).$$

Тогда из соотношений (3.20), (3.21) в силу леммы Гронуолла (см., например, [15; гл. II, § 5]) вытекает, что

$$\varphi^*(t) = \varphi(t), \quad \psi^*(t) = \psi(t), \quad t \in [0, T].$$

Следовательно, тройка $\{u^*(t, x), \gamma^*(x), f^*(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1.1)–(1.3). Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.1, а также (3.6) и (3.8). Тогда для любых $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$, $f(t) \in B_{R_f}$, где R_f определено в (3.7) $\mathcal{A}_1(\gamma, f) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу (2.1) $\Delta_1(t) > 0$, $t \in [0, T]$, согласно определению $\mathcal{A}_1(\gamma, f)$ (см. (3.12)) достаточно доказать, что в условиях леммы 3.2

$$\Delta_\gamma(t; u) \equiv G_\omega(t)(-\psi'(t) + J_\chi(t; u)) - G_\chi(t)(-\varphi'(t) + J_\omega(t; u)) \geq 0.$$

Это неравенство, очевидно, эквивалентно неравенству

$$G_\chi(t)J_\omega(t; u) - G_\omega(t)J_\chi(t; u) \leq G_\chi(t)\varphi'(t) - G_\omega(t)\psi'(t) \equiv \Delta_2(t). \quad (3.22)$$

Здесь мы учли определение $\Delta_2(t)$ (см. (1.5)).

В силу определения $G_\omega(t)$, $G_\chi(t)$, $J_\omega(t; u)$, $J_\chi(t; u)$ (см. (1.4) и (1.6)) и условий (A)–(E) левая часть неравенства (3.22) не превышает величины

$$\begin{aligned} & K_g K_\chi [n^2 K_\omega^{**} + K_b^* K_\omega + K_b K_\omega^* + K_d K_\omega] (\text{mes } \Omega) M(R_f) \\ & + K_g K_\omega [n^2 K_\chi^{**} + K_b^* K_\chi + K_b K_\chi^* + K_d K_\chi] (\text{mes } \Omega) M(R_f) \\ & \equiv K_g K_1 (\text{mes } \Omega) (M_0 + K_g T R_f) e^{d_1 T}, \end{aligned}$$

которая согласно (3.8), в свою очередь, не превышает δ_2 . В этих рассуждениях учтены определение K_1 в (1.10) и оценка (3.14) для $|u(t, x)|$.

С другой стороны, в силу условия (3.6) $\Delta_2(t) \geq \delta_2$, а это означает, что неравенство (3.22) справедливо. Лемма 3.2 доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.1. Тогда для любых $f(t) \in B_{R_f}$, $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$

$$\|\mathcal{A}_1(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} \leq R_\gamma, \quad (3.23)$$

где

$$R_\gamma = \frac{K_g}{\delta_1} (K_\omega K_\psi^* + K_\chi K_\varphi^*) (\text{mes } \Omega)^{1/2} + \frac{K_g}{\delta_1} K_1 (\text{mes } \Omega) (M_0 + K_g T R_f) e^{d_1 T}. \quad (3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения $\mathcal{A}_1(\gamma, f)$ в (3.12) и условия (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} &\leq \frac{1}{\delta_1} \|\Delta_\gamma(t; u)\|_{L_\infty([0, T])} \\ &\leq \frac{1}{\delta_1} [\|G_\omega \psi'\|_{L_\infty([0, T])} + \|G_\omega J_\chi\|_{L_\infty([0, T])} + \|G_\chi \varphi'\|_{L_\infty([0, T])} + \|G_\chi J_\omega\|_{L_\infty([0, T])}]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Учитывая определения $G_\omega(t)$, $G_\chi(t)$, $J_\omega(t; u)$, $J_\chi(t; u)$, K_1 (см. (1.4), (1.6) и (1.10)), а также используя условия (A)–(E) и неравенство (3.14) для оценки слагаемых в правой части (3.25), приходим к неравенству

$$\|\mathcal{A}_1(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} \leq \frac{K_g}{\delta_1} (K_\omega K_\psi^* + K_\chi K_\varphi^*) (\text{mes } \Omega)^{1/2} + \frac{K_g}{\delta_1} K_1 (\text{mes } \Omega) M(R_f) \equiv R_\gamma,$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.1. Тогда для любых $f(t) \in B_{R_f}$, $\gamma(t) \in L_\infty^+([0, T])$

$$\|\mathcal{A}_2(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} \leq R_f. \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 3.3 в силу определения $\mathcal{A}_2(\gamma, f)$ в (3.12) и условия (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_2(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} &\leq \frac{1}{\delta_1} \|\Delta_f(t; u)\|_{L_\infty([0, T])} \\ &\leq \frac{1}{\delta_1} [\|\varphi \psi'\|_{L_\infty([0, T])} + \|\varphi J_\chi\|_{L_\infty([0, T])} + \|\psi \varphi'\|_{L_\infty([0, T])} + \|\psi J_\omega\|_{L_\infty([0, T])}]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Снова учитывая определения $J_\omega(t; u)$, $J_\chi(t; u)$, K_2 (см. (1.6) и (1.10)), а также используя условия (A)–(E) и неравенство (3.14) для оценки слагаемых в правой части (3.27), приходим к неравенству

$$\|\mathcal{A}_2(\gamma, f)\|_{L_\infty([0, T])} \leq \frac{1}{\delta_1} (K_\varphi K_\psi^* + K_\psi K_\varphi^*) + \frac{K_2}{\delta_1} (\text{mes } \Omega)^{1/2} (M_0 + K_g T R_f) e^{d_1 T}. \quad (3.28)$$

В силу определения R_f в (3.7) правая часть неравенства (3.28) равна R_f . Лемма 3.4 доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и R_γ определено формулой (3.24). Тогда оператор $\mathcal{A}$ непрерывен на множестве $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве леммы через c , возможно, с индексом будем обозначать положительные константы, зависящие от T , Ω , констант из условий (А)–(Е), а также от R_γ и R_f .

Пусть $\gamma^{(i)}(t) \in B_{R_\gamma}^+$, $f^{(i)}(t) \in B_{R_f}$, $i = 1, 2$. Пусть $u^{(i)}(t, x)$ – соответствующие решения прямой задачи (1.1), (1.2). Положим

$$\widehat{u}(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \widehat{\gamma}(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t), \quad \widehat{f}(t) = f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t).$$

Тогда эти функции удовлетворяют соотношениям (2.3) и (2.4).

Заметим, что для $u^{(2)}(t, x)$ справедлива оценка (3.14), а тогда в силу принципа максимума из (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}\|_{L_\infty(Q)} &\leq T[M(R_f)\|\widehat{\gamma}\|_{L_\infty([0, T])} + K_g\|\widehat{f}\|_{L_\infty([0, T])}]e^{d_1 T} \\ &\leq c_1\|\widehat{\gamma}\|_{L_\infty([0, T])} + c_2\|\widehat{f}\|_{L_\infty([0, T])}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В силу определения $\mathcal{A}_1(\gamma, f)$ в (3.12) и условия (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1(\gamma^{(1)}, f^{(1)}) - \mathcal{A}_1(\gamma^{(2)}, f^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])} &\leq \frac{1}{\delta_1} \|\Delta_\gamma(t; u^{(1)}) - \Delta_\gamma(t; u^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])} \\ &\leq c_3\|J_\chi(t; u^{(1)}) - J_\chi(t; u^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])} + c_4\|J_\omega(t; u^{(1)}) - J_\omega(t; u^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из определения $J_\omega(t; u)$, $J_\chi(t; u)$ с учетом условий (А)–(Е) нетрудно проверить, что

$$\|J_\chi(t; u^{(1)}) - J_\chi(t; u^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])} \leq c_5\|\widehat{u}\|_{L_\infty(Q)}, \quad (3.31)$$

$$\|J_\omega(t; u^{(1)}) - J_\omega(t; u^{(2)})\|_{L_\infty([0, T])} \leq c_6\|\widehat{u}\|_{L_\infty(Q)}, \quad (3.32)$$

Подставляя оценки (3.31) и (3.32) в (3.30) и учитывая неравенство (3.29), получаем, что оператор $\mathcal{A}_1(\gamma, f)$ непрерывен на $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$. Непрерывность оператора $\mathcal{A}_2(\gamma, f)$ доказывается аналогично.

Следовательно, оператор $\mathcal{A}(\gamma, f) \equiv (\mathcal{A}_1(\gamma, f), \mathcal{A}_2(\gamma, f))$ также будет непрерывен на $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и R_γ определено формулой (3.24). Тогда оператор $\mathcal{A}$ вполне непрерывен на множестве $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_n(t)$ – произвольная последовательность функций из $B_{R_\gamma}^+$, а $f_n(t)$ – произвольная последовательность функций из B_{R_f} . Это ограниченные в $L_\infty([0, T])$ последовательности. Пусть $u_n(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с $\gamma(t) = \gamma_n(t)$, $f(t) = f_n(t)$ в уравнении (1.1). Тогда в силу (3.3) справедлива равномерная по n оценка

$$|u_n|_{C^{0, \alpha}(Q)} \leq c_3(R_\gamma, R_f), \quad (3.33)$$

где положительная константа $c_3(R_\gamma, R_f)$ не зависит от n .

Из (3.33) в силу компактности вложения пространства $C^{0, \alpha}(Q)$ в $C(Q)$ вытекает, что существует подпоследовательность $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и функция $v(t, x) \in C^{0, \alpha}(Q)$ такие, что равномерно на Q

$$u_{n_k}(t, x) \rightrightarrows v(t, x), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Тогда в силу определения $\Delta_\gamma(t; u)$ и $\Delta_f(t; u)$ (см. (1.7)) имеем, что при $k \rightarrow \infty$ в норме $L_\infty([0, T])$

$$\mathcal{A}_1(\gamma_{n_k}, f_{n_k}) \equiv \frac{\Delta_\gamma(t; u_{n_k})}{\Delta_1(t)} \rightarrow \frac{\Delta_\gamma(t; v)}{\Delta_1(t)}, \quad \mathcal{A}_2(\gamma_{n_k}, f_{n_k}) \equiv \frac{\Delta_f(t; u_{n_k})}{\Delta_1(t)} \rightarrow \frac{\Delta_f(t; v)}{\Delta_1(t)}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ компактен на множестве $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$. А поскольку в силу леммы 3.5 этот оператор непрерывен на множестве $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$, то он является вполне непрерывным оператором на этом множестве. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(F), а также условие (A') или (A''), если $n > 1$. Кроме того, предположим, что выполнены условия (2.1), (3.5), (3.6). Пусть R_γ определено формулой (3.24), а R_f формулой (3.7), и при выбранном так R_f справедливо неравенство (3.8). Тогда существует обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(t), f(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.3), причем для $\gamma(t), f(t)$ справедливы оценки

$$0 \leq \gamma(t) \leq R_\gamma, \quad |f(t)| \leq R_f, \quad t \in [0, T], \quad (3.35)$$

а для $u(t, x)$ справедливы оценки (3.14), (3.1), (3.3) при $R_1 = R_\gamma$, $R_2 = R_f$. Если выполнено условие (A'), то $u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q)$ (где q из условия (C)) и справедлива оценка (3.2) при $R_1 = R_\gamma$, $R_2 = R_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.2–3.6 оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором, переводящим множество $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$ из пространства $L_\infty([0, T]) \times L_\infty([0, T])$ в себя. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке (см. [15; гл. 5, § 3]) существует пара функций $\{\gamma(t), f(t)\}$ из множества $B_{R_\gamma}^+ \times B_{R_f}$, являющихся решением системы уравнений (3.13), так что для этих функций справедливы оценки (3.15).

Пусть $u(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1), (1.2) с данными $\gamma(t), f(t)$ в уравнении (1.1). Такое решение, как указано в начале данного пункта, существует, единственно, и для него справедливы оценки из утверждения теоремы 3.1. В силу леммы 3.1 тройка $\{u(t, x), \gamma(t), f(t)\}$ является решением обратной задачи (1.1)–(1.3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Как указано в замечании 3.1, при выполнении условия (A') для числа q из условия (C) достаточно выполнения неравенства $q > (n + 2)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. В силу теоремы 2.1 решение обратной задачи (1.1)–(1.3), существование которого доказано в теореме 3.1, будет единственным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Константы R_γ и R_f в оценке (3.35) явно выписываются через входные данные задачи (1.1)–(1.3) (см. (3.24) и (3.7)), что является весьма важным для приложений.

4. Пример и заключительные замечания. Приведем пример конкретной обратной задачи, для которой справедливы доказанные в работе теоремы существования и единственности.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим в $Q = [0, T] \times [-l, l]$ ($n = 1$, $\Omega = (-l, l)$) обратную задачу

$$u_t - u_{xx} + \gamma(t)u = f(t), \quad (t, x) \in Q, \quad (4.1)$$

$$u(t, x) = x(l^2 - x^2), \quad (t, x) \in \Gamma; \quad (4.2)$$

$$\int_{-l}^l u(l^2 - x^2) dx = 0, \quad \int_{-l}^l ux(l^2 - x^2) dx = \frac{16}{105} l^7 - \frac{t}{\sqrt{T}} l^6, \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

В этой задаче

$$\begin{aligned} \omega(x) &= l^2 - x^2, & \chi(x) &= x(l^2 - x^2), & \varphi(t) &= 0, & \psi(t) &= \frac{16l^7}{105} - \frac{tl^6}{\sqrt{T}}, \\ g(t, x) &= 1, & a(t, x) &= 1, & b(t, x) &= 0, & d(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, для задачи (4.1)–(4.3) выполнены условия (A)–(F).

Нетрудно проверить, что для этой задачи величина $\Delta_2(t) = 4l^9/(3\sqrt{T})$, так что условие (3.6) выполнено, если положить $\delta_2 = 4l^9/(3\sqrt{T})$.

Далее, величина $\Delta_1(t) = 4l^9(16l/105 - t/\sqrt{T})/3$, поэтому при условии

$$T < \left(\frac{16}{105} l \right)^2 \quad (4.4)$$

неравенство (2.1) будет выполнено, если положить

$$\delta_1 = \frac{4}{3} l^9 \left(\frac{16}{105} l - \sqrt{T} \right). \quad (4.5)$$

Тогда условие (3.5) запишется в виде

$$\sqrt{T}(48\sqrt{T} + 105l) < 16l^2. \quad (4.6)$$

При выборе δ_1 так, как указано в (4.5), и выполнении (4.6) формула (3.7) для вычисления R_f будет иметь вид

$$R_f = \frac{32l^3}{\sqrt{3}[16l^2 - (105l\sqrt{T} + 48T)]}, \quad (4.7)$$

а тогда неравенство (3.8) запишется в виде

$$\frac{1}{3} + \frac{16T}{16l^2 - (105l\sqrt{T} + 48T)} < \frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{2}(1 + \sqrt{21})} \cdot \frac{l}{\sqrt{T}}. \quad (4.8)$$

Кроме того, в условиях примера

$$R_\gamma = \frac{21\sqrt{30}}{(16l - 105\sqrt{T})l^4} \left[\frac{l^3}{\sqrt{T}} + \frac{4}{\sqrt{21}}(1 + \sqrt{21}) \left(\frac{2}{3} l^3 + \sqrt{3} TR_f \right) \right]. \quad (4.9)$$

Очевидно, что условия (4.4), (4.6), (4.8) справедливы либо если величина l достаточно велика (при фиксированном T), либо, наоборот, величина T достаточно мала (при фиксированном l).

Таким образом, в обоих этих случаях справедливы теоремы 2.1 и 3.1, а следовательно, решение обратной задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. При этом для неизвестных функций $\gamma(t)$, $f(t)$ справедливы оценки (3.35) с R_f , определенным в (4.7) и R_γ определенным в (4.9).

Автор благодарит А. И. Прилепко, А. Б. Костина, Д. Г. Орловского, В. В. Соловьева за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Музылев, “О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:9 (1985), 1346–1352.
- [2] Н. И. Иванчов, “Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:3 (1994), 612–621.
- [3] Yu. E. Anikonov, Yu. Ya. Belov, “Determining two unknown coefficients of parabolic type equation”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **9**:5 (2001), 469–487.
- [4] Н. И. Иванчов, Н. В. Побывиривска, “Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:2 (2002), 406–413.
- [5] Ю. Я. Белов, С. В. Полынцева, “Об одной обратной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения”, *Докл. РАН*, **396**:5 (2004), 583–586.
- [6] В. Л. Камынин, “Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости”, *Дифференц. уравнения*, **50**:6 (2014), 795–806.
- [7] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, М., Наука, 1968.
- [8] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [9] O. Arena, “Sopra una classe di equazioni paraboliche”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **2** (1969), 9–24.
- [10] С. Н. Кружков, *Нелинейные уравнения с частными производными*, Ч. 1, Изд-во Моск. ун-та, М., 1969.
- [11] O. Arena, A. Maugeri, “Perturbazioni di operatori parabolici di ordine $2n$ con termini di ordine inferiore”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **9** (1974), 169–184.
- [12] Н. В. Крылов, *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*, Наука, М., 1985.
- [13] В. Л. Камынин, “Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения”, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 207–217.
- [14] С. Н. Кружков, “Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **5**, 1979, 217–272.
- [15] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.

В. Л. Камынин

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

Поступило

09.04.2014