Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова, О функции концентрации для аддитивных функций со специальным весом, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 265–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:24:42

УДК 511

О ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова

Пусть $g(n)$ – аддитивная функция принимающая вещественные значения,

$$W(N) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right), \quad E(N) = 4 + \sum_{\substack{p < N, \\ g(p) \neq 0}} \frac{1}{p}.$$

В работе доказано существование постоянных C_1, C_2 такие, что справедливы неравенства

$$\sup_a |\{n, m, k : m, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n + m^2 + k^2 = N, g(n) \in [a, a + 1)\}| \leq \frac{C_1 N}{\sqrt{W(N)}},$$

$$\sup_a |\{n, m, k : m, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n + m^2 + k^2 = N, g(n) = a\}| \leq \frac{C_2 N}{\sqrt{E(N)}}.$$

Доказанные оценки точны по порядку.

Библиография: 10 названий.

1. Введение и формулировка результатов. Пусть $g(n)$ – аддитивная функция, $\tau(n)$ – число делителей n и $r(n)$ – число представлений n в виде суммы квадратов двух целых чисел. В предыдущей работе, используя результаты статьи Ружи [1], идеи и методы работ Эллиота [2] и Тимофеева [3], была доказана следующая

ТЕОРЕМА [4, теорема 1]. *Существует абсолютная постоянная C такая, что для любой аддитивной функции $g(n)$ справедливо неравенство*

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N, \\ g(n) \in [a; a+1)}} \tau(N - n) \leq \frac{CN \log(2N)}{\sqrt{W(N)}},$$

где

$$W(N) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p < N} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00368.

В теореме 1 [4] доказано, что

$$\sup_a |\{n, m, k : n, m, k \in \mathbb{N}, N = n + mk, g(n) \in [a; a + 1)\}| \leq C \frac{N \log(2N)}{\sqrt{W(N)}}.$$

Из этой теоремы легко следует (см. следствие 1 [4])

$$\sup_a |\{n, m, k : n, m, k \in \mathbb{N}, N = n + mk, g(n) = a\}| \leq C \frac{N \log(2N)}{\sqrt{E(N)}},$$

где

$$E(N) = \sum_{\substack{p < N, \\ g(p) \neq 0}} \frac{1}{p} + 4.$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. *Существует абсолютная постоянная C такая, что для любой аддитивной функции $g(n)$ справедливо неравенство*

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N, \\ g(n) \in [a; a+1)}} r(N - n) \leq C \frac{N}{\sqrt{W(N)}}.$$

В теореме 1 оценено число решений следующей бинарной задачи

$$N = n + m^2 + k^2, \quad \text{где } g(n) \in [a; a + 1), \quad m, k \in \mathbb{Z},$$

причем полученная оценка равномерна по a и g .

Из теоремы 1 следует (см. [4, доказательство следствия 1])

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует абсолютная постоянная, с которой*

$$\sup_a \sum_{\substack{n < N, \\ g(n) = a}} r(N - n) \leq C \frac{N}{\sqrt{E(N)}}.$$

Здесь, так же как и в работе [4], мы доказываем наиболее сложный случай. Несколько проще можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $b \neq 0$ – целое число. Существует постоянная, зависящая только от b такая, что для любой аддитивной функции $g(n)$ справедливо неравенство*

$$\sup_a \sum_{\substack{0 < n+b \leq N, \\ g(n) \in [a; a+1)}} r(n + b) \leq C \frac{N}{\sqrt{W(N)}}.$$

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существует постоянная C , зависящая только от b , такая, что для любой аддитивной функции $g(n)$ справедливо неравенство*

$$\sup_a \sum_{\substack{0 < n+b \leq N, \\ g(n) = a}} r(n + b) \leq C(b) \frac{N}{\sqrt{E(N)}}.$$

Можно показать, что полученные результаты, вообще говоря, неулучшаемы. Действительно, теорема 1 [5] утверждает, что при $k \leq (2 - \varepsilon) \log \log N$

$$\nu(N, k) := |\{n : N = n + m^2 + l^2, m, l \in \mathbb{Z}, \Omega(n) = k\}| \sim C(N, k) \frac{N}{\log N} \frac{(\log \log N)^{k-1}}{(k-1)!},$$

где $\Omega(n)$ – число простых делителей n с учетом их кратности. Если $k = [\log \log N]$, то $C(N, k) \geq c_1 > 0$ и из формулы Стирлинга следует, что

$$\frac{N}{\log N} \frac{(\log \log N)^{k-1}}{(k-1)!} \geq c_2 \frac{N}{\sqrt{\log \log n}}, \quad c_2 > 0,$$

откуда

$$\nu(N, k) \geq c_1 c_2 \frac{N}{\sqrt{\log \log N}}.$$

В случае $g(n) = \Omega(n)$ мы имеем $W(N) = E(N) = \log \log N$, т.е. оценки теоремы 1 и следствия 1 точны по порядку.

2. Вспомогательные результаты. Обозначим через $p(n)$, $q(n)$ наибольший и наименьший простые делители n соответственно. Положим $p(1) = q(1) = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $2 \leq r \leq x$. Тогда

$$|\{n : n \leq x, p(n) \leq r\}| \ll x \exp\left(-\frac{\log x}{2 \log r}\right).$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [6] (см. главу III.5, теорему 1).

ЛЕММА 2. Пусть $r \geq 2$, $z \geq 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z}} \frac{1}{n} \ll \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z}{\log r}\right) \log r, \quad \sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z}} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\log z}{\log r}\right) \log^2 r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1, находим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z}} \frac{1}{n} &\leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k z} |\{n : n \leq 2^{k+1} z, p(n) \leq r\}| \\ &\ll \sum_{k \geq 0} \exp\left(-\frac{\log 2}{2} \frac{k+1}{\log r}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z}{\log r}\right) \ll \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z}{\log r}\right) \log r. \end{aligned}$$

Докажем второе соотношение леммы 2. Пусть $y = \exp(\log z / (4 \log r))$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z}} \frac{n}{\varphi(n)} \frac{1}{n} &= \sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z}} \frac{1}{n} \sum_{\delta | n} \frac{\mu^2(\delta)}{\varphi(\delta)} \\ &\leq \sum_{\delta \leq y} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta \varphi(\delta)} \sum_{\substack{p(n) \leq r, \\ n > z/y}} \frac{1}{n} + \frac{1}{y} \sum_{p(\delta) \leq r} \frac{\mu^2(\delta)}{\varphi(\delta)} \sum_{p(n) \leq r} \frac{1}{n} \\ &\ll \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\log z}{\log r}\right) \log^2 r. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть χ – неглавный характер Дирихле по модулю 4 и $\log t \ll r \log r$, $r \geq 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{n \leq y, \\ (n, m) = 1, \\ q(n) > r}} \frac{\chi(n)}{n} = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{\log y}{2 \log r}\right) \log r + \frac{\log m}{r}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m(r, y)$ – произведение простых делителей m таких, что $r < p \leq y$. Тогда имеем

$$\sum := \sum_{\substack{n \leq y, \\ (n, m) = 1, \\ q(n) > r}} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{\substack{l \leq y, \\ p(l) \leq r}} \frac{\chi(l)\mu(l)}{l} \sum_{\substack{\delta \leq y/l, \\ \delta | m(r, y)}} \frac{\chi(\delta)\mu(\delta)}{\delta} \sum_{n \leq y/(l\delta)} \frac{\chi(n)}{n}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n \leq t} \frac{\chi(n)}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_{\substack{l \leq y, \\ p(l) \leq r}} \frac{\chi(l)\mu(l)}{l} \sum_{\substack{\delta \leq y/l, \\ \delta | m(r, y)}} \frac{\chi(\delta)\mu(\delta)}{\delta} \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} + O\left(\frac{1}{y} \sum_{\substack{l \leq y, \\ p(l) \leq r}} \sum_{\substack{\delta \leq y/l, \\ \delta | m(r, y)}} 1\right) \\ &= \prod_{p > r} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} + O\left(\sum_{\substack{l > y, \\ p(l) \leq r}} \frac{1}{l} + \sum_{\substack{l \leq y, \\ p(l) \leq r}} \frac{1}{l} \left| \sum_{\delta | m(r, y)} \frac{1}{\delta} - 1 \right| + \frac{1}{y} \sum_{\substack{l \leq y, \\ p(l) \leq r}} 1\right). \end{aligned}$$

Произведение, стоящее в правой части последнего равенства, будет равно

$$\exp\left(-\sum_{p > r} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)\right) = \exp\left(\sum_{p > r} \frac{\chi(p)}{p}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Так как (см., например, [7, следствие 1, с. 154])

$$\sum_{p \leq t} \chi(p) = \sum_{\substack{p \leq t, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} 1 - \sum_{\substack{p \leq t, \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} 1 = O(t \exp(-c\sqrt{\log t})),$$

где $c > 0$, то после суммирования по Абелю получим, что произведение равно

$$1 + O(\exp(-c\sqrt{\log r})), \quad c > 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{\substack{\delta | m(r, y)}} \frac{1}{\delta} - 1 \ll \exp\left(\sum_{\substack{p | m, \\ p > r}} \frac{1}{p}\right) - 1 \ll \frac{\log m}{r \log r},$$

применив леммы 1 и 2, находим

$$\sum = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log y}{\log r}\right) \log r + \frac{\log m}{r}\right).$$

Лемма 3 доказана.

Из теоремы 3.4 [8] следует

ЛЕММА 4. Пусть $k \leq x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $2 \leq z \log z \leq \sqrt{x^{1-\alpha}}$. Тогда

$$|\{n : n \equiv l \pmod{k}, p(n) \geq z\}| \ll \frac{x}{\varphi(k) \log z}.$$

Обозначим $H(x, y, z)$ – число натуральных чисел $n \leq x$, имеющих хотя бы один делитель d , $y < d \leq z$. Тогда из теоремы 21 [9] (см. также [9, неравенство 2.2, с. 28]) вытекает

ЛЕММА 5. Если $3 \leq y \leq \sqrt{x}$, то

$$H(x, y, 2y) \ll \frac{x}{(\log y)^\beta \sqrt{\log \log y}},$$

где $\beta = 1 - (1 + \log \log 2) / \log 2 = 0.08607 \dots$

ЛЕММА 6. Пусть χ – неглавный характер Дирихле модуля k . Тогда при $2 \leq \Delta \leq x^{1/10}$, $y(x, m) = m\Delta/\sqrt{x}$ или $\sqrt{x}/\Delta$ имеем

$$\sum_{m \leq x} \left| \sum_{\substack{y(x, m) < d \leq \sqrt{x} \Delta, \\ d|m}} \chi(d) \right| \ll x \frac{(\log(\Delta \log x))^{3/2}}{(\log x)^{\beta/2} (\log \log x)^{1/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства мы воспользуемся методом Хооли (см. [10, глава 5]). Применив неравенство Коши получим

$$\sum_{m \leq x} \left| \sum_{\substack{y(x, m) < d \leq \sqrt{x} \Delta, \\ d|m}} \chi(d) \right| \leq \sqrt{\sum_1} \sqrt{\sum_2},$$

где

$$\sum_1 := H\left(x, \frac{\sqrt{x}}{\Delta}, \sqrt{x} \Delta\right), \quad \sum_2 = \sum_{m \leq x} \left| \sum_{\substack{y(x, m) < d \leq \sqrt{x} \Delta, \\ d|m}} \chi(m) \right|^2.$$

Для $\sum_1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_1 &\leq H\left(x, \frac{\sqrt{x}}{\Delta}, \sqrt{x}\right) + H(x, \sqrt{x}, \sqrt{x} \Delta) \\ &\leq 2H\left(x, \frac{\sqrt{x}}{\Delta^2 \log x}, \sqrt{x}\right) + \frac{x}{\Delta \log x} \\ &\leq 2 \sum_{0 \leq j \leq J} H\left(x, 2^j \frac{\sqrt{x}}{\Delta^2 \log x}, 2^{j+1} \frac{\sqrt{x}}{\Delta^2 \log x}\right) + \frac{x}{\Delta \log x}, \end{aligned}$$

где $J = O(\log(\Delta \log x))$. Применив лемму 5, получим

$$\sum_1 \ll \frac{x(\log(\Delta \log \log x))}{(\log x)^\beta \sqrt{\log \log x}}. \quad (1)$$

После возведения в квадрат и перестановки порядка суммирования получим при $y(x, m) = m\Delta/\sqrt{x}$

$$\sum_2 = \sum_{\substack{\frac{\sqrt{x}}{\Delta} < d_1, \\ [d_1, d_2] \leq x}} \sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{x} \Delta, \\ m \equiv z(x, d_1, d_2), \\ m \equiv 0 \pmod{[d_1, d_2]}}} \chi(d_1) \overline{\chi}(d_2) \sum_1,$$

где

$$z(x, d_1, d_2) = \min\left(\frac{d_1 \sqrt{x}}{\Delta}, \frac{d_2 \sqrt{x}}{\Delta}, x\right) = \min\left(\frac{d_1 \sqrt{x}}{\Delta}, \frac{d_2 \sqrt{x}}{\Delta}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_2 = \sum_{\substack{\frac{\sqrt{x}}{\Delta} < d_1, \\ [d_1, d_2] \leq x}} \sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{x} \Delta, \\ m \equiv z(x, d_1, d_2), \\ m \equiv 0 \pmod{[d_1, d_2]}}} \left(\chi(d_1) \overline{\chi}(d_2) \frac{z(x, d_1, d_2)}{[d_1, d_2]} + O(1) \right).$$

Пусть $\delta = (d_1, d_2)$. Тогда $d_1 = \delta m_1$, $d_2 = \delta m_2$, $(m_1, m_2) = 1$, $[d_1, d_2] = \delta m_1 m_2$ и

$$\sum_2 = \sum_{\delta \leq \sqrt{x} \Delta} \sum_{\substack{\frac{\sqrt{x}}{\delta \Delta} < m_1, \\ \delta m_1 m_2 \leq x, \\ (m_1, m_2) = 1}} \sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{x} \Delta, \\ m \equiv z(x, d_1, d_2), \\ m \equiv 0 \pmod{[d_1, d_2]}}} \left(\frac{\chi(m_1) \overline{\chi}(m_2)}{\delta m_1 m_2} z(x, \delta m_1, \delta m_2) + O(1) \right).$$

Сумма, которая получается при суммировании $O(1)$, будет

$$\ll x \sum_{\delta \leq \Delta^4} \sum_{\sqrt{x}/(\delta \Delta) \leq m_1 \leq \sqrt{x} \Delta / \delta} \frac{1}{\delta m_1} + x \Delta^2 \sum_{\delta > \Delta^4} \frac{1}{\delta^2} \ll x \log^2 \Delta.$$

Суммирование по Абелю дает

$$\sum_{u < m \leq v} \frac{\chi(m)}{m} \ll \frac{1}{u}.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{u < m \leq v, \\ (m, a) = 1}} \frac{\chi(m)}{m} = \sum_{d|a} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} \sum_{u/d < m \leq v/d} \frac{\chi(m)}{m} \ll \frac{\tau(a)}{u}. \quad (2)$$

Учитывая (2), получим, что первая сумма оценивается сверху через

$$\begin{aligned} & 2 \left| \sum_{\delta \leq \sqrt{x} \Delta} \sum_{\substack{\sqrt{x}/(\delta \Delta) < m_1 < m_2 \leq \sqrt{x} \Delta / \delta, \\ \delta m_1 m_2 \leq x, \\ (m_1, m_2) = 1}} \chi(m_1) \frac{\sqrt{x}}{\Delta} \frac{\overline{\chi}(m_2)}{m_2} \right| + \sqrt{x} \Delta \\ & \ll \frac{\sqrt{x}}{\Delta} \sum_{\delta \leq \sqrt{x} \Delta} \sum_{m_1 \leq \frac{\sqrt{x} \Delta}{\delta}} \frac{\tau(m_1)}{m_1} + \sqrt{x} \Delta \\ & \ll \frac{\sqrt{x}}{\Delta} \left(\sum_{\delta \leq \frac{\sqrt{x}}{\Delta \log^2 x}} \log^2 x + \sqrt{x} \Delta \log^2(\Delta \log x) \right) \\ & \ll x \log^2(\Delta \log x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_2 \ll x \log^2(\Delta \log x)$$

и поэтому, учитывая (1), получим утверждение леммы 6. Если $y(x, m) = \sqrt{x}/\Delta$, то $z(x, d_1, d_2) = x$, и снова применив (2), получим

$$\begin{aligned} \sum_2 &\ll x \sum_{\delta \leq \sqrt{x} \Delta} \frac{1}{\delta} \sum_{\sqrt{x}/(\delta \Delta) \leq m_1 \leq \sqrt{x} \Delta/\delta} \frac{\tau(m_1)}{m_1^2} + x \log^2 \Delta \\ &\ll x \left(\sum_{\delta \leq \frac{\sqrt{x}}{\Delta^4 \log^4 x}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\Delta^3 \log^4 x} \log^2 x + \sum_{\frac{\sqrt{x}}{\Delta^4 \log^4 x} \leq \delta \leq \sqrt{x} \Delta} \frac{1}{\delta} + \log^2 \Delta \right) \\ &\ll x \log^2(\Delta \log x). \end{aligned}$$

То есть, учитывая (1), снова получаем утверждение леммы. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ – последовательности комплексных чисел такие, что $a_n = 0$ при $n \leq z_1$, $b_m = 0$ при $m \leq z_2$, d_1, d_2 – натуральные числа, причем $p(d_1) \leq z$, $q(d_2) > z$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(Q) &:= \sum_{d=d_1 d_2 \leq Q} \max_{(a,d)=1} \left| \sum_{\substack{nm \leq x, \\ nm \equiv a \pmod{d}}} a_n b_m - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{nm \leq x, \\ (nm, d_2)=1, \\ nm \equiv a \pmod{d_1}}} a_n b_m \right| \\ &\ll \left(\frac{1}{\log^A x} \left(\sum_{k \leq 2x} \left(\sum_{nm=k} |a_n b_m| \right)^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{|k-x| \leq x/(\log^A x)} \left(\sum_{nm=k} |a_n b_m|^2 \right) \right)^{1/2} \right) (Q + \sqrt{x} \log^{3/2} x) \\ &\quad + (\log \log x) \max_{y \leq x} \left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq y} |a_n|^2 \sum_{m \leq x/y} |b_m|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(Q \sqrt{x} \log \frac{x}{z_1 z_2} + \left(\frac{x}{\sqrt{z_2}} + \frac{x}{\sqrt{z_1}} \right) \log^2 Q + \frac{x}{z} (\log Q) \log \frac{x}{z_1 z_2} \right), \end{aligned}$$

где A – любая положительная постоянная.

Доказательство этой леммы приведено в работе [4].

Нам потребуется теорема Халоса. Мы приведем ее в форме, доказанной в [6, глава 4, следствие 6.3].

ЛЕММА 8. Существует абсолютная постоянная c такая, что для любой мультипликативной функции f , $|f(n)| \leq 1$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n) \right| \leq cx \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \min_{|t| \leq T} \sum_{p \leq x} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-it}}{p} \right) + \frac{1}{\sqrt{T}} \right).$$

Следующие две леммы доказаны в [4, леммы 3, 4].

ЛЕММА 9. Пусть $|f(p)| \leq 1$ для всех простых чисел p . Предположим, что найдется примитивный характер модуля δ , $\delta \leq \log^2 N$, и вещественное число λ_0 , $|\lambda_0| \leq \log^2 N$, такие, что

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda_0} \chi_\delta(p)) \leq \frac{1}{100} \log \log N.$$

Тогда для всех характеров Дирихле χ_d с $d \leq \log^2 N$, не порожденных χ_δ , при $|\lambda| \leq \log^2 N$ справедливо неравенство

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} f(p) p^{-i\lambda} \chi_d(p)) \geq \frac{1}{2} \log \log N + O(1).$$

ЛЕММА 10. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой мультипликативной функции f , $|f(n)| \leq 1$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{\substack{n \leq x, \\ (n, N)=1}} f(n) - \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n \leq x} f(n) \right| \leq cx \left(\sum_{d|N} \frac{1 + \log d}{d} \right)^{1/2} (\log x)^{-1/4} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} |f(p) - 1| \right).$$

И, наконец, нам потребуется теорема Ружи [1], аналогом которой являются результаты работ [2]–[4] и настоящей работы.

ЛЕММА 11. Существует абсолютная постоянная такая, что для любой аддитивной функции справедливо неравенство

$$\frac{1}{x} \sup_a |\{n : n \leq x, a \leq g(n) < a + 1\}| \leq \frac{c}{\sqrt{W(x)}},$$

где

$$W(x) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим P_1 – множество натуральных чисел, все простые делители которых сравнимы с единицей по модулю 4, и P_3 – множество натуральных чисел, которые могут делиться на 2 и на простые сравнимые с 3 по модулю 4. Положим далее $\mathcal{L} = \log N$. Известно, что $r(n) = 4r_1(n)$, $r_1(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$, χ – неглавный характер Дирихле по модулю 4. Имеем

$$S(N) := \sum_{\substack{n < N, \\ g(n) \in [a; a+1]}} r(N-n) = 4 \sum_{\delta \in P_3} r_1(\delta) \sum_{n \in A(N, g, a, \delta)} r_1\left(\frac{N-n}{\delta}\right),$$

где

$$A(N, g, a, \delta) = \left\{ n : n < N, n \equiv N \pmod{\delta}, \frac{N-n}{\delta} \in P_1, g(n) \in [a; a+1] \right\}.$$

Заметим, что если $m \in P_1$, то $r_1(m) = \tau(m)$ и оценим ту часть суммы $S(N)$, в которой $\delta \geq u = \log^3 \mathcal{L}$. Учитывая, что (см., например, [9, теорема 0.1])

$$\sum_{\substack{m \in P_1, \\ m \leq x}} \tau(m) \ll \frac{x}{\log x} \prod_{\substack{p \equiv 1 \pmod{4}, \\ p \leq x}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau(p^r)}{p^r}\right) \ll x,$$

получим, что эта часть суммы $S(N)$ будет

$$\ll \sum_{\delta \geq \log^3 \mathcal{L}} r_1(\delta) \frac{N}{\delta} \ll \frac{N}{\log \mathcal{L}} \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r_1(p^r)}{p^{2r/3}}\right) \ll \frac{N}{\log \mathcal{L}}.$$

Так как $\tau(m \cdot n) \leq \tau(m) \cdot \tau(n)$, то

$$\begin{aligned} S(N) &\leq 4 \sum_{\substack{\delta \leq u, \\ \delta \in P_3}} r_1(\delta) \sum_{\substack{s|(N, \delta) \\ \delta \in P_3}} \sum_{\substack{k \in P_1, \\ k|N}} \tau(k) \sum_{n \in A_1(N/(ks), g_{ks}, a-g(ks), \delta/s)} \tau\left(\frac{N/(sk) - n}{\delta} s\right) \\ &\quad + O\left(\frac{N}{\log \mathcal{L}}\right), \end{aligned}$$

где $g_{ks}(n) = g(nks) - g(ks)$ – аддитивная по n функция и

$$A_1(N, g, a, \delta) = \{n : n \in A(N, g, a, \delta), (n, N) = 1\}.$$

Оценим часть последней суммы, в которой $k \geq v = \exp(10 \log^2 \mathcal{L})$. Она будет

$$\ll \sum_{\delta \leq u} r_1(\delta) \sum_{s|\delta} \sum_{\substack{k|N, \\ k \geq v}} \tau(k) \frac{N}{\delta k} \mathcal{L}.$$

Пусть $\alpha = \log^{-1} \mathcal{L}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \geq v, \\ k|N}} \frac{\tau(k)}{k} &\leq \frac{1}{v^\alpha} \sum_{k|N} \frac{\tau(k)}{k^{1-\alpha}} \ll \exp(-10 \log \mathcal{L}) \exp\left(2 \sum_{p \leq \mathcal{L}} \frac{p^\alpha}{p} + 2 \frac{1}{\mathcal{L}^{1-\alpha}} \frac{\mathcal{L}}{\log \mathcal{L}}\right) \\ &\ll \exp(-10 \log \mathcal{L} + 2 \log \log \mathcal{L} + 2 \log^{-1} \mathcal{L}) \ll \mathcal{L}^{-9}. \end{aligned}$$

Следовательно, оцениваемая часть суммы равна $O(N \mathcal{L}^{-6})$. Таким образом, имеем

$$\sup_a S(N) \leq 4 \sum_{\substack{\delta \leq u, \\ \delta \in P_3}} r_1(\delta) \sum_{s|(N, \delta)} \sum_{\substack{k|N, \\ k \in P_1, \\ k \leq v}} \tau(k) X\left(\frac{N}{ks}, \frac{\delta}{s}, g_{ks}\right) + O\left(\frac{N}{\log \mathcal{L}}\right), \quad (3)$$

где $u = \log^3 \mathcal{L}$, $v = \exp(10 \log^2 \mathcal{L})$, $\mathcal{L} = \log N$, $g_{ks}(n) = g(ksn) - g(ks)$ – аддитивная по n функция и

$$X(N, g, \delta) := \sup_a \sum_{n \in A_1(N, g, a, \delta)} \tau\left(\frac{N - n}{\delta}\right).$$

Покажем, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующее неравенство:

$$X(N, g, \delta) \ll \frac{N}{\varphi(\delta) \sqrt{W(N, g)}} \prod_{\substack{p|N, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right), \quad (4)$$

где

$$W(N, g) = 4 + \min_{\lambda} \left(\lambda^2 + \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \min(1, (g(p) - \lambda \log p)^2) \right).$$

Учитывая, что $g_{ks}(p) = g(p)$, если $(p, ks) = 1$ имеем

$$W\left(\frac{N}{ks}, g_{ks}\right) = W(N, g) + \Theta\left(\sum_{\substack{N \\ uv}} \frac{1}{p} + \sum_{p|ks} \frac{1}{p}\right),$$

где $|\Theta| \leq 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{W\left(\frac{N}{ks}, g_{ks}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \ll \frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \prod_{p|ks} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Поэтому из (4) следует

$$X\left(\frac{N}{ks}, \frac{\delta}{s}, g_{ks}\right) \ll \frac{N}{ks \varphi\left(\frac{\delta}{s}\right) \sqrt{W(N, g)}} \prod_{\substack{p|N, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \prod_{p|ks} \left(1 + \frac{3}{p}\right).$$

Так как $s\varphi(\delta/s) \geq \varphi(\delta)$, то, подставляя последнюю оценку в (3), находим

$$\begin{aligned} \sup_a S(N) &\ll \frac{N}{\sqrt{W(N, g)}} \prod_{\substack{p|N, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \sum_{\delta \in P_3} \frac{r_1(\delta)}{\varphi(\delta)} \sum_{s|\delta} \prod_{p|s} \left(1 + \frac{3}{p}\right) \\ &\times \sum_{\substack{k|N, \\ k \in P_1}} \frac{\tau(k)}{k} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{3}{p}\right) + \frac{N}{\log \mathcal{L}} \ll \frac{N}{\sqrt{W(N, g)}}. \end{aligned}$$

То есть из (4) следует утверждение теоремы 1.

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{W(N, g)}} \prod_{\substack{p|N, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \gg (\log \mathcal{L})^{-3/2},$$

и $\delta \leq \log^3 \mathcal{L}$, поэтому части суммы $X(N, g, \delta)$, равные $O(N/(\varphi(\delta) \log^{3/2} \mathcal{L}))$ или $O(N/\log^{9/2} \mathcal{L})$, будут равны $O(R(N, \delta))$, где далее

$$R(N, \delta) = \frac{N}{\varphi(\delta) \sqrt{W(N, g)}} \prod_{\substack{p|N, \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

— правая часть соотношения (4).

Пусть $p(n)$, $g(n)$ – наибольший и наименьший простые делители n соответственно. Представим n в виде $n = n_1 n_2$, $p(n_1) \leq z_3$, $g(n_2) > z_3$, $z_3 = \exp(\mathcal{L}^\Theta)$, $1/2 < \Theta < 1$. Разобьем $X(n, g, \delta)$ на четыре суммы. В первой сумме $n_1 \leq z_1 = \exp(\mathcal{L}^\sigma)$, $0 < \sigma < \Theta - 1/2$, во второй $n_1 > z_4$, $\log z_4 = 16\mathcal{L}^\Theta \log \mathcal{L}$, в третьей $n_1 \leq z_4$, $n_2 \leq z_2 = N\mathcal{L}^{-10}/(\delta z_4)$ и в четвертой $z_1 < n_1 \leq z_4$, $n_2 > z_2$. Пусть $\bar{n}_1 n_1 \equiv 1 \pmod{d\delta}$. Тогда, применив лемму 4, получим, что первая сумма

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{n_1 \leq z_1} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{N/\delta}, \\ d \in P_1}} \sum_{\substack{n_1 n_2 < N, \\ n_2 \equiv N \bar{n}_1 \pmod{d\delta}}} 1 \\ & \ll \sum_{n_1 \leq z_1} \sum_{\substack{d \leq N, \\ d \in P_1}} \frac{N}{n_1 d \delta \log z_3} \ll \frac{N \sqrt{\mathcal{L}} \log z_1}{\delta \log z_3} \ll R(N, \delta). \end{aligned}$$

Для оценки второй суммы сначала применим неравенство Коши, затем лемму 1. Получим, что она

$$\leq \left(\sum_{n_2 < N} \sum_{z_4 < n_1 \leq \frac{N}{n_2}} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{m < N} \tau^2(m) \right)^{1/2} \ll N \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\log z_4}{\log z_3}\right) \mathcal{L}^2 \ll R(N, \delta).$$

Аналогично третья сумма будет

$$\leq \left(\sum_{n_1 < z_4} \sum_{n_2 \leq z_2} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{m < N} \tau^2(m) \right)^{1/2} \ll R(N, \delta).$$

Следовательно, имеем

$$X(N, g, \delta) \leq \sup_a \sum_{n \in A_2(N, g, a, \delta)} \tau\left(\frac{N-n}{\delta}\right) + R(N, \delta),$$

где

$$A_2(N, g, a, \delta) = \{n : n \in A_1(N, g, a, \delta), n = n_1 n_2, z_1 < n_1 \leq z_4, n_2 > z_2\}.$$

Избавимся от условия $g(n) \in [a; a+1)$. С этой целью воспользуемся равенством

$$\int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{itu} dt = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2$$

и неравенствами

$$\frac{4}{\pi^2} \leq \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^2 \leq 1,$$

справедливыми при $|u| \leq 2$. Кроме этого от $\tau((N-n)/\delta)$ снова вернемся к $r_1((N-n)/\delta)$. Получим

$$X(N, g, \delta) \leq \sup_a \frac{\pi^2}{4} \sum_{n \in A_3(N, \delta)} \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{it(g(n)-a)} dt r_1\left(\frac{N-n}{\delta}\right) + O(R(N, \delta)),$$

где

$$A_3(N, \delta) = \left\{ n : n = n_1 n_2 < N, \ z_1 < n_1 \leq z_4, \ n_2 \geq z_2, \right. \\ \left. (n, N) = 1, \ n \equiv N \pmod{\delta}, \ \frac{N-n}{\delta} \equiv 1 \pmod{4} \right\}.$$

Разобьем $r_1(m)$ – сумму $\chi(d)$ по $d \mid m = (N-n)/\delta$ на три суммы. В первой

$$d < \sqrt{\frac{N}{\delta}} \frac{1}{\Delta},$$

во второй

$$\sqrt{\frac{N}{\delta}} \frac{1}{\Delta} \leq d < \sqrt{\frac{N}{\delta}} \Delta$$

и в третьей

$$d \geq \sqrt{\frac{N}{\delta}} \Delta,$$

где $\Delta = \mathcal{L}^{10}$. Если $(N-n)/\delta = ds$ и $d \geq \sqrt{N/\delta} \Delta$, то $s \leq \sqrt{N/\delta}/\Delta$ и, так как $(N-n)/\delta \equiv 1 \pmod{4}$, то $\chi(d) = \chi(s)$. Следовательно, имеем

$$r_1(m) = 2 \sum_1 \chi(d) + \sum_2 \chi(d) - \sum_3 \chi(d) - \sum_4 \chi(d),$$

где в $\sum_1$ суммирование распространено по $d \mid m, d < \sqrt{N/\delta}/\Delta$, в $\sum_2$ – по $d \mid m, \sqrt{N/\delta}/\Delta \leq d < \sqrt{N/\delta} \Delta$, в $\sum_3$ – по

$$d \mid m, \quad d \in \left[\sqrt{\frac{N}{\delta}} \frac{1}{\Delta}; \sqrt{\frac{N}{\delta}} \Delta \right) \cap \left[\sqrt{\frac{\delta}{N}} m \Delta; \sqrt{\frac{N}{\delta}} \Delta \right)$$

и в $\sum_4$ – по

$$d \mid m, \quad d \in \left[1; \sqrt{\frac{N}{\delta}} \frac{1}{\Delta} \right) \cap \left[\sqrt{\frac{\delta}{N}} m \Delta; \sqrt{\frac{N}{\delta}} \frac{1}{\Delta} \right).$$

Возвращаясь к $X(N, g, \delta)$, получим

$$X(N, g, \delta) \leq \frac{\pi^2}{2} \sup_a \int_{-1}^1 (1-|t|) e^{-ita} \sum_{d < \sqrt{N/\delta}/\Delta} \chi(d) \sum_{n \in A_4(N, \delta, d)} e^{itg(n)} dt \\ + O \left(\sum_{\substack{n < N, \\ n \equiv N \pmod{\delta}}} |\sum_2 \chi(d)| + |\sum_5 \chi(d)| + \sum_4 1 \right), \quad (5)$$

где в $\sum_5$ суммирование распространено по

$$d \mid \frac{N-n}{\delta}, \quad \frac{N-n}{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{N}} \leq d < \sqrt{\frac{N}{\delta}} \Delta, \\ A_4(N, \delta, d) = \{n : n \in A_3(N, \delta), \ n \equiv N \pmod{\delta}\}.$$

Для оценки первых двух сумм, стоящих под знаком $O(\dots)$ применим лемму 6. Получим, что они равны

$$O\left(\frac{N}{\delta}(\log \mathcal{L})^{5/4} \mathcal{L}^{-\beta/2}\right) \ll R(N, \delta).$$

Третья сумма будет

$$\leq \sum_{m < N/(\delta \Delta^2)} \tau(m) \ll \frac{N}{\delta \mathcal{L}^{20}} \cdot \mathcal{L} \ll R(N, \delta).$$

Если $n \in A_4(N, \delta, d)$, то $n \equiv N \pmod{\delta d}$ и $n \equiv N - \delta \pmod{4\delta}$. Пусть $d = d_1 d_2$, $p(d_1) \leq z$, $p(d_2) > z$, $z = \mathcal{L}^{10}$. Тогда эти два сравнения эквивалентны сравнению $n \equiv N - \delta d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \pmod{4\delta d_1 d_2}$, где $\bar{d}_1 d_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $\bar{d}_2 d_2 \equiv 1 \pmod{4}$. Заметим, что $(d, 2) = 1$. При таком выборе $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ мы имеем $N - \delta d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \equiv N - \delta d_1 \bar{d}_1 \pmod{4\delta d_1}$. Так как $(n, N) = 1$, то $(\delta d, N) = (\delta d, N - \delta d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2) = 1$. Возможны случаи, когда

- 1) $N - \delta d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2 = M$ — число нечетное,
- 2) $2 \mid M$, но $4 \nmid M$,
- 3) $4 \mid M$.

В каждом из этих случаев, поделив обе части сравнения на соответствующую степень двойки, мы можем добиться, чтобы модуль и остаток от деления были взаимно просты. Рассмотрим случай, когда $2 \nmid M$. Напомним, что $\delta \leq \log^3 \mathcal{L}$, а $z = \mathcal{L}^{10}$, т.е. $\delta < z$. Пусть $Q = \sqrt{N/\delta}/\Delta$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq Q, \\ (d, N)=1}} \chi(d) \sum_{n \in A_4(N, \delta, d)} e^{itg(n)} &= \sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq Q, \\ (d, N)=1}} \chi(d_1 d_2) \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \in A_4(N, \delta, d), \\ (n, d_2)=1}} e^{itg(n)} \\ &+ \sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq Q, \\ (d, N)=1}} \chi(d) \left(\sum_{\substack{z_1 < n_1 \leq z_4, \ z_2 < n_2 < N/n_1, \\ n_1 n_2 \equiv N - \delta d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \pmod{4\delta d_1 d_2}}} e^{itg(n_1 n_2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{z_1 < n_1 \leq z_4, \ z_2 < n_2 < N/n_1, \\ n_1 n_2 \equiv N - \delta d_1 \bar{d}_1 \pmod{4\delta d_1}, \\ (n_1 n_2, d_2)=1}} e^{itg(n_1 n_2)} \right). \end{aligned}$$

Используя лемму 7, выбрав в ней $A = 20$, получим, что вторая сумма в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} &\ll \frac{\sqrt{N}}{\mathcal{L}^{10}} \left(\sqrt{N\delta} \frac{1}{\mathcal{L}^{10}} + \sqrt{N} \mathcal{L}^{3/2} \right) + \log \mathcal{L} \left(\sqrt{N\delta} \frac{1}{\mathcal{L}} \sqrt{N} \mathcal{L} + \left(\frac{N}{\sqrt{z_2}} + \frac{N}{\sqrt{z_1}} \right) \mathcal{L}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{z} \mathcal{L} \log \frac{N}{z_1 z_2} \right) \ll \frac{N}{\delta \mathcal{L}} \ll R(N, \delta). \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в (5), находим

$$\begin{aligned} X(N, g, \delta) &\leq \sup_a \frac{\pi^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{-ita} \sum_{d_1 \leq \sqrt{N/\delta}/\Delta} \chi(d_1) \\ &\quad \times \sum_{n \in A_4(N, \delta, d_1)} e^{itg(n)} \sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{N/\delta}/(\Delta d_1), \\ (d_2, Nn)=1}} \frac{\chi(d_2)}{\varphi(d_2)} dt + O(R(N, \delta)). \quad (6) \end{aligned}$$

Если $q(m) > z$, $\log m = O(z)$, то

$$\frac{m}{\varphi(m)} = 1 + O\left(\exp\left(\sum_{\substack{p|m, \\ p > z}} \frac{1}{p}\right) - 1\right) = 1 + O\left(\frac{\log m}{z}\right).$$

Можно считать, что в правой части (6) $d_1 \leq z_5 = \exp(50 \log^2 \mathcal{L})$.

Действительно, часть суммы по $d_1 > z_5$ в силу леммы 2 будет

$$\ll \frac{N}{\delta} \mathcal{L} \sum_{z_5 < d_1 \leq N} \frac{1}{d_1} \ll \frac{N}{\delta} \mathcal{L} \log \mathcal{L} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z_5}{\log z}\right) \ll R(N, \delta). \quad (7)$$

Следовательно, используя лемму 3, имеем

$$\sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{N/\delta}/\Delta, \\ (d_2, Nn)=1}} \frac{\chi(d_2)}{\varphi(d_2)} = \sum_{\substack{d_2 \leq \sqrt{N/\delta}/\Delta, \\ (d_2, Nn)=1}} \frac{\chi(d_2)}{d_2} + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}^8}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\delta \mathcal{L}}\right)$$

и поэтому

$$X(N, g, \delta) \leq \sup_a \frac{\pi^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{-ita} \sum_{\substack{d \leq z_5, \\ p(d) \leq z}} \chi(d) \sum_{n \in A_5(N, \delta, d)} e^{itg(n)} dt + R(N, \delta), \quad (8)$$

где

$$A_5(N, \delta d) = \{n : n < N, (n, N) = 1, n \equiv N \pmod{\delta d}\}.$$

Здесь мы заменим условие $n \in A_4(N, \delta, d)$ на $n \in A_5(N, \delta d) \supset A_4(N, \delta, d)$. Это можно сделать, так как

$$\sum_{\substack{d|m, \\ p(d) \leq z}} \chi(d) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{it(g(n)-a)} dt \geq 0.$$

Условие $d \leq z_5$, как мы видели ранее (см. (7)), можно отбросить.

Чтобы уменьшить промежуток изменения d , мы еще раз повторим предыдущие рассуждения. Представим n в виде $n = n_1 n_2$, где $p(n_1) \leq z'_3 = \exp(\log^5 \mathcal{L})$, $q(n_2) > z'_3$. Пусть $z'_1 = \exp(\log^2 \mathcal{L})$, $z'_4 = \exp(\log^{15} \mathcal{L})$ и разобьем сумму по n на четыре суммы. В первой сумме $n_1 \leq z_1$, во второй $n_1 > z'_4$, в третьей $n_1 \leq z'_4$, $n_2 \leq z'_2 = N/(\delta z'_4 \mathcal{L}^{10})$, в четвертой $z'_1 < n_1 \leq z'_4$, $n_2 > z'_2$. Тогда сумма, стоящая под интегралом в правой части (8) также разобьется на четыре суммы. Применяя лемму 4, получим, что первая сумма будет

$$\ll \sum_{p(d) \leq z} \sum_{n_1 \leq z'_1} \frac{N}{\varphi(\delta d) n_1 \log z'_3} \ll \frac{N}{\varphi(\delta)} \log^{-2} \mathcal{L} \ll R(N, \delta).$$

Используя лемму 1, получим, что вторая и третья суммы

$$\ll z_5 N \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z'_4}{\log z'_3}\right) \cdot \mathcal{L} + \frac{N}{\delta \mathcal{L}^{10}} \cdot \log z_5 \ll R(N, \delta).$$

Пусть $z' = \log^{20} \mathcal{L}$. Представим d в виде $d = d_1 d_2$, $p(d_1) \leq z'$, $z' < q(d_2)$, $p(d_2) \leq z$. Тогда четвертую сумму можно представить в следующем виде

$$\sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq z_5, \\ (d_2, N)=1}} \chi(d_1) \frac{\chi(d_2)}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \in A_6(N, \delta d_1), \\ (n, d_2)=1}} e^{itg(n)} + \sum_{\substack{d=d_1 d_2 \leq z_5, \\ (d_2, N)=1}} \left(\sum_{n \in A_6(N, \delta d)} e^{itg(n)} - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \in A_6(N, \delta d_1), \\ (n, d_2)=1}} e^{itg(n)} \right),$$

где

$$A_6(N, m) = \{n : n \in A_5(N, m), n = n_1 n_2, z'_1 < n_1 \leq z'_4, n_2 > z'_2\}.$$

Используя лемму 7 с $Q = z_5 u$, $A = 20$, $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_2$, $z = z'$, получим, что вторая сумма

$$\ll \frac{N}{\mathcal{L}} + \frac{N \log z_5 u}{\log^{22} \mathcal{L}} \log \frac{N}{z'_1 z'_2} \ll N \frac{\log^{17} \mathcal{L}}{\log^{22} \mathcal{L}} \ll R(N, \delta).$$

В первой сумме перейдем снова к $n \in A_5(N, \delta d_1)$. Кроме этого, можно считать, что $d_1 \leq z'_5 = \exp((\log \log \mathcal{L})^3)$. Действительно, часть суммы по $d_1 > z'_5$ в силу леммы 2 будет

$$\ll \sum_{\substack{d_1 > z'_5, \\ p(d_1) \leq z'}} \frac{N \log z}{\delta d_1 \log z'} \ll \frac{N}{\delta} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\log z'_5}{\log z'}\right) \log z \ll R(N, \delta).$$

Далее, используя второе неравенство леммы 2, имеем

$$\sum_{\substack{d_2 \leq z_5 / d_1, \\ (d_2, Nn)=1}} \frac{\chi(d_2)}{\varphi(d_2)} = \prod_{z < p \leq z'} \left(1 + \frac{\chi(p)p}{(p-1)(p-\chi(p))}\right) \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{\chi(p)p}{(p-1)(p-\chi(p))}\right)^{-1} \\ \times \left(1 + O\left(\sum_{\substack{d_2|n, \\ d_2 > z'}} \frac{1}{d_2}\right)\right) + \exp\left(-\frac{1}{5} \frac{\log z_5}{\log z'}\right) \log^2 z'.$$

Заметим, что

$$\prod_{z' < p \leq z} \left(1 + \frac{\chi(p)p}{(p-1)(p-\chi(p))}\right) \ll 1, \\ \prod_{\substack{p|N, \\ z' < p \leq z}} \left(1 + \frac{\chi(p)p}{(p-1)(p-\chi(p))}\right)^{-1} \ll \prod_{\substack{p|N, \\ p > z'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\sum_{d_1 \leq z_5} \sum_{n \in A_6(N, \delta d_1)} \sum_{\substack{d_2|n, \\ z' < d_2 \leq z_5}} \frac{1}{d_2} \ll \sum_{d_1 \leq z_5} \frac{N}{\delta d_1} \sum_{d_2 > z'} \frac{1}{d_2^2} \ll R(N, \delta).$$

Поэтому возвращаясь к соотношению (8), получим

$$X(N, g, \delta) \leq \prod_{\substack{p|N, \\ p > z'}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) |X_1(N, g, \delta)| + R(N, \delta), \quad (9)$$

где

$$X_1(N, g, \delta) = \int_{-1}^1 \sum_{\substack{d \leq z'_5, \\ p(d) \leq z'}} \chi(d) \sum_{\chi_{\delta d}} \bar{\chi}_{\delta d}(N) \frac{1}{\varphi(\delta d)} \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N)=1}} \chi_{\delta d}(n) e^{itg(n)} (1 - |t|) e^{-ita} dt. \quad (10)$$

Напомним, что $z' = \log^{22} \mathcal{L}$, $z'_5 = \exp((\log \log \mathcal{L})^3)$, $\delta \leq \log^3 \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \log N$, $\delta d \leq \log^3 \mathcal{L} \exp((\log \log \mathcal{L})^3)$, $p(\delta d) \leq \log^{22} \mathcal{L} = z'$.

Разобьем $[-1; 1]$ на два множества U_1 и U_2 . Для $t \in U_1$ найдутся $\lambda(t) = \lambda$, $|\lambda| \leq T = \exp((\log \log \mathcal{L})^4)$ и характер Дирихле χ_m , $m = m(t) \leq T$, $p(m) \leq z'$, такие, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_m(p) e^{itg(p)} p^{-i\lambda}) \ll (\log \log \mathcal{L})^4. \quad (11)$$

Множество $U_2 = [-1; 1] \setminus U_1$. Применив лемму 8, получим

$$\int_{U_2} \sum_{d \leq z'_5} \frac{1}{\varphi(\delta d)} \sum_{\chi_{\delta d}} \left| \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N)=1}} \chi_{\delta d}(n) e^{itg(n)} \right| dt \ll Nz'_5 \exp\left(-\frac{1}{2}(\log \log \mathcal{L})^4\right) \ll R(N, \delta).$$

Таким образом, задача свелась к оценке интеграла по U_1 . Обозначим через $l = l(t)$ модуль примитивного характера порождающего χ_m , с которым выполняется неравенство (11). Очевидно, что (11) справедливо и для χ_l^* . Применив леммы 9, 8, получим, что для всех характеров $\chi_{\delta d}$, не порожденных χ_l^* , справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N)=1}} \chi_{\delta d} e^{itg(n)} \right| \ll N \mathcal{L}^{-1/4}.$$

Поэтому в сумме правой части (10) по характерам $\chi_{\delta d}$ можно оставить только характеры, порожденные χ_l^* . Пусть $l = l_1 l_2$, где $\delta = l_1 \delta_1$, $(\delta_1, l_2) = 1$. Тогда если $(n, \delta d_1) = 1$, то $\chi_{\delta l_2 d_1}(n) = \chi_{\delta l_2}(n)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} X_1(N, g, \delta) &= \int_{U_1} \bar{\chi}_{\delta l_2}(N) \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N)=1}} \chi_{\delta l_2}(n) \sum_{\substack{d_1 \leq z'_5/l_2, \\ p(l_2 d_1) < z', \\ (d_1, nN)=1}} \frac{\chi(\delta l_2 d_1)}{\varphi(\delta l_2 d_1)} e^{itg(n)} (1 - |t|) e^{-ita} dt \\ &\quad + O(R(N, \delta)). \end{aligned}$$

Для тех $t \in U_1$, для которых $l_2 \geq \log^3 \mathcal{L}$, модуль подынтегрального выражения будет

$$\ll \frac{N}{\varphi(\delta)} (\log \mathcal{L})^{-1} (\log \log \mathcal{L})^3 \ll R(N, \delta),$$

поэтому можно считать, что $l_2 \leq \log^3 \mathcal{L}$. Используя лемму 2 и учитывая, что $(n, N) = 1$ и $(\delta l_2, nN) = 1$, имеем

$$\sum_{\substack{d_1 \leq \frac{z'}{l_2}, \\ p(d_1) < z', \\ (d_1, nN) = 1}} \frac{\chi(d_1)}{\varphi(\delta l_2 d_1)} = \frac{1}{\varphi(\delta l_2)} \prod_{p \leq z'} \left(1 + \frac{\chi(p)p}{(p-1)(p-\chi(p))} \right) \prod_{p | \delta l_2} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + \chi(p)} \\ \times \prod_{\substack{p | nN, \\ p \leq z'}} \left(1 - \frac{\chi(p)p}{p^2 - p + \chi(p)} \right) + O\left(\frac{1}{\varphi(\delta l_2) \log^2 \mathcal{L}} \right).$$

Возвращаясь к соотношениям (9) и (10), находим

$$X(N, g, \delta) \ll \prod_{p | N} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p} \right) |X_2(N, g, \delta)| + R(N, \delta), \quad (12)$$

где

$$X_2(N, g, \delta) = \int_{U_1} \frac{1}{\varphi(\delta l_2)} \bar{\chi}_{\delta l_2}(N) \prod_{p | \delta l_2} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + \chi(p)}, \\ \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N) = 1}} \chi_{\delta l_2}(n) e^{itg(n)} F(n) (1 - |t|) e^{-ita} dt, \quad (13) \\ F(n) = \prod_{\substack{p | n, \\ p \leq z'}} \left(1 + \frac{s(p)}{\sqrt[3]{p}} \right), \quad s(p) = -\frac{p \sqrt[3]{p} \chi(p)}{p^2 - p + \chi(p)}.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{n < N, \\ (n, N) = 1}} \chi_{\delta l_2}(n) F(n) e^{itg(n)} \\ = \sum_{\substack{d \leq \log^9 \mathcal{L}, \\ p(d) \leq z'}} \chi_{\delta l_2}(d) e^{itg(d)} \frac{s(d)}{\sqrt[3]{d}} \sum_{\substack{n < N, \\ (n, N) = 1}} \chi_{\delta l_2}(n) e^{itg_d(n)} + O(\log^{-2} \mathcal{L}),$$

где $s(d) = \prod_{p|d} s(p)$, $g_d(n) = g(nd) - g(d)$ — аддитивная по n функция. Из неравенства (11) следует, что

$$\sum_{p < N/d} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_{\delta l_2}(p) e^{itg_d(p)} p^{-i\lambda}) \leq (\log \log \mathcal{L})^4 + O(\log \log \mathcal{L}). \quad (14)$$

Применив суммирование по Абелю, получим

$$\sum_{\substack{n < N/d, \\ (n, N) = 1}} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) = \sum_{\substack{n < N/d, \\ (n, N) = 1}} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) n^{-i\lambda} e^{i\lambda \log N} \\ - i\lambda \int_1^{N/d} \sum_{\substack{n < u, \\ (n, N) = 1}} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) n^{-i\lambda} e^{i\lambda \log u} \frac{du}{u}.$$

Учитывая, что $|\lambda| \leq \exp((\log \log \mathcal{L})^4)$ и, поэтому, из (14) следует

$$\sum_{p < N/d} \frac{1}{p} |1 - \chi_{\delta l_2}(p) e^{itg_d(p)} p^{-i\lambda}| \leq 2\sqrt{\log \mathcal{L}} (\log \log \mathcal{L})^2,$$

а также используя лемму 10, получим

$$\left| \sum_{\substack{n < N/d, \\ (n, N)=1}} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) - \frac{\varphi(N)}{N} \sum_{n < N/d} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) \right| \ll \frac{N}{d} \mathcal{L}^{-1/5}.$$

Следовательно, соотношения (12) и (13) примут вид

$$X(N, g, \delta) \ll \prod_{p|N} \left(1 - \frac{\chi(p) + 1}{p}\right) |X_3(N, g, \delta)| + R(N, \delta), \quad (15)$$

где

$$X_3(N, g, \delta) = \int_{U_1} \frac{1}{\varphi(\delta l_2)} \bar{\chi}_{\delta l_2}(N) \Pi(\delta l_2) \sum_{n < N} \chi_{\delta l_2}(n) e^{itg(n)} F(n) (1 - |t|) e^{-ita} dt. \quad (16)$$

Здесь

$$\Pi(m) = \prod_{p|m} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + \chi(p)}.$$

Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно показать, что

$$X_3(N, g, \delta) \ll \frac{N}{\varphi(\delta) \log \mathcal{L}}.$$

Вспоминая определение $F(n)$, имеем

$$|X_3(N, g, \delta)| \ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{d \leq \log^3 \mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt[3]{d}} \left| X_4\left(\frac{N}{d}, g_d, \delta\right) \right| + \frac{N}{\varphi(\delta) \log \mathcal{L}},$$

где

$$\left| X_4\left(\frac{N}{d}, g_d, \delta\right) \right| \leq \int_{U_1} \left| \sum_{n < N/d} e^{itg_d(n)} \chi_{\delta l_2}(n) \right| dt.$$

Дальнейшие рассуждения почти полностью повторяют заключительную часть доказательства теоремы 1 [4]. Дополнительную сложность вносит наличие суммы по $d \leq \log^3 \mathcal{L}$. Рассмотрим случай $d = 1$. Применяя лемму 8, получим

$$X_4(N, g, \delta) \ll N \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{2} \min_{\chi_\Delta, \lambda} \sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} p^{-i\lambda} \chi_\delta(p))\right) dt + \frac{N}{\log \mathcal{L}},$$

где минимум берется по $|\lambda| \leq \log^2 \mathcal{L}$ и χ_Δ , $\Delta \leq \log^6 \mathcal{L}$. Напомним, что $\delta \leq \log^3 \mathcal{L}$ и $l_2 \leq \log^3 \mathcal{L}$. Обозначим

$$M(t) = \min_{\chi_\Delta, \lambda} \sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} p^{-i\lambda} \chi_\Delta(p)),$$

$$E_k = \{t : t \in [-1; 1], M(t) \leq k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad K = 4[\log \log \mathcal{L}].$$

Тогда имеем

$$X_4(N, g, \delta) \ll N \sum_{1 \leq k \leq K} \exp\left(-\frac{k}{2}\right) m(E_k) + N(\log \mathcal{L})^{-1}.$$

Предположим, что для всех $1 \leq k \leq K$ выполняется неравенство

$$m(E_k) \leq \frac{200k}{\sqrt{\log \mathcal{L}}}.$$

Тогда мы получим

$$X_4(N, g, \delta) \ll N \sum_{k \geq 1} \exp\left(-\frac{k}{2}\right) k \log^{-1/2} \mathcal{L} \ll N \log^{-1/2} \mathcal{L}.$$

Аддитивные функции $g_d(n)$ и $g(n)$ отличаются только на $p \mid d$, поэтому применив лемму 8, получим, что в этом случае для всех $d \leq \log^3 \mathcal{L}$ имеем

$$\begin{aligned} X_4\left(\frac{N}{\delta}, g_d, \delta\right) &\ll \frac{N}{d} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{2} \min_{\chi_\Delta, \lambda} \sum_{p < N/d} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg_d(p)} p^{-i\lambda} \chi_\Delta(p))\right) dt + \frac{N}{d \log \mathcal{L}} \\ &\ll \frac{N}{d} \prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{1}{2} M(t)\right) dt + \frac{N}{d \log \mathcal{L}} \ll \frac{N\tau(d)}{d} \log^{-1/2} \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_3(N, g, \delta) \ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{d \leq \log^3 \mathcal{L}} \frac{N\tau(d)}{d^2} \log^{-1/2} \mathcal{L} \ll \frac{N}{\varphi(\delta) \sqrt{W(N)}}.$$

Предположим, что найдется $1 \leq k \leq K$, для которого

$$m(E_k) > \frac{200k}{\sqrt{\log \mathcal{L}}}.$$

Множество E_k симметрично относительно нуля и содержит нуль, поэтому (см., например, лемму 5.3 [1]) каждое число $t \in [-1; 1]$ представимо в виде $t_1 + \dots + t_r$, где $t_j \in E_k$ и $r = [12/m(E_k)]$. Напомним, что если $t_j \in E_k$, то найдется λ_j , $|\lambda_j| \leq \log^2 \mathcal{L}$, и χ_{Δ_j} , $\Delta_j \leq \log^6 \mathcal{L}$, такие, что справедливо неравенство

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{it_j g(p)} \chi_{\Delta_j}(p) p^{-i\lambda_j}) \leq k, \quad j = 1, \dots, r.$$

Пусть $z_j, j = 1, \dots, r$, – комплексные числа, $|z_j| \leq 1$. Тогда (см., например, [4]) по индукции можно доказать следующее неравенство:

$$1 - \operatorname{Re} z_1 \dots z_r \leq r^2 \sum_{j=1}^r (1 - \operatorname{Re} z_j). \quad (17)$$

Положим $t = t_1 + \dots + t_r, \lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_r, \chi_\Delta = \chi_{d_1} \dots \chi_{d_r}$. Из предыдущих двух неравенств следует, что для любого $t \in [-1; 1]$ существует $\lambda = \lambda(t)$ и χ_Δ такие, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} \chi_\Delta(p) p^{-i\lambda}) \leq r^2 k \leq 13^2 \frac{\log \mathcal{L}}{200^2 k} \ll \frac{\log \mathcal{L}}{102}. \quad (18)$$

Заметим, что $|\lambda| \leq r \log^2 \mathcal{L} \leq \log^3 \mathcal{L}, \Delta(t) \leq \log^{6r} \mathcal{L} \leq \log^6 \sqrt{\log \mathcal{L}} \mathcal{L}$ и $p(\Delta) \leq \log^6 \mathcal{L}$. Покажем, что $\chi_{\Delta(t)}$ – главный характер. Рассмотрим любые $t_1, t_2 \in [-1; 1]$ такие, что $t_1 + t_2 \in [-1; 1]$. Докажем, что характер $\chi_m = \chi_{\Delta(t_1+t_2)} \bar{\chi}_{\Delta(t_1)} \bar{\chi}_{\Delta(t_2)}$ – главный характер. Используя неравенства (18) и (17), имеем

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} \chi_m(p) p^{-i(\lambda(t_1+t_2) - \lambda(t_1) - \lambda(t_2))}) \leq 9 \frac{\log \mathcal{L}}{102} \ll \frac{\log \mathcal{L}}{10}.$$

Положим $\sigma_N = 1 + 1/\log N$. Тогда левая часть неравенства равна

$$\log \zeta(\sigma_N) - \log |L(\sigma_N + i(\lambda(t_1 + t_2) - \lambda(t_1) - \lambda(t_2)), \chi_m)| + O(1).$$

Если χ_m – не главный характер, то она будет равна (см., например, [7])

$$\log \mathcal{L} + O(1) + O(\log |\Delta| (|\lambda(t_1 + t_2) - \lambda(t_1) - \lambda(t_2)| + 2)) = \log \mathcal{L} + O(\sqrt{\log \mathcal{L}} \log \log \mathcal{L}).$$

То есть получим противоречие. Таким образом, $\chi_{d(t_1+t_2)} \bar{\chi}_{d(t_1)} \bar{\chi}_{d(t_2)}$ – главный характер. Положим

$$H = \left(\prod_{p \leq \log^6 \mathcal{L}} p \right)^s, \quad \text{где } s \leq \sqrt{\log \mathcal{L}}.$$

Тогда модули всех характеров, о которых шла речь выше, будут делить H . Обозначим через $\tilde{\chi}_\Delta$ характер по модулю H , порожденный χ_Δ . Тогда для любых $t_1, t_2 \in [-1; 1]$, $t_1 + t_2 \in [-1; 1]$, имеем $\tilde{\chi}_{\Delta(t_1+t_2)} = \tilde{\chi}_{\Delta(t_1)} \cdot \tilde{\chi}_{\Delta(t_2)}$ и, поэтому, $\tilde{\chi}_{\Delta(t)} = (\tilde{\chi}_{\Delta(t/h)})^h = \tilde{\chi}_0$, где $h = \varphi(H)$. Мы доказали, что $\tilde{\chi}_{\Delta(t)}$ – главный характер. Учитывая, что $\Delta(t) \mid H$ и

$$\sum_{p \mid H} \frac{1}{p} \leq 12 \log \log \log \mathcal{L},$$

используя неравенство (18), получим, что для любого $t \in [-1; 1]$ существует $\lambda = \lambda(t)$, $|\lambda| \leq \log^3 \mathcal{L}$, такое, что

$$\sum_{p < N} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} e^{itg(p)} p^{-i\lambda}) \leq \frac{\log \mathcal{L}}{100}.$$

Из леммы 9 следует, что примитивный характер $\chi_{l(t)}^*$, порождающий характеры $\chi_{\delta d}$, будет главный, т.е. $l = l_1 \cdot l_2 = 1$ и соотношение (15) примет вид

$$X_3(N, g, \delta) = \frac{1}{\varphi(\delta)} \bar{\chi}_{\delta}(N) \Pi(\delta) \int_{-1}^1 \sum_{\substack{n < N, \\ (n, \delta) = 1}} e^{itg(n)} F(n) (1 - |t|) e^{-ita} dt + O(R(N, \delta)).$$

Следовательно, получим

$$\begin{aligned} X_3(N, g, \delta) &\ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{d \leq \log^9 \mathcal{L}} \frac{s(d)}{\sqrt[3]{d}} \sum_{n < N/d} \left(\frac{\sin(g_d(n) - a)/2}{(g_d(n) - a)/2} \right)^2 + \frac{N}{\varphi(d) \log^3 \mathcal{L}} \\ &\ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{d \leq \log^9 \mathcal{L}} \frac{s(d)}{\sqrt[3]{d}} \sup_a \left| \left\{ n : n < \frac{N}{d}, g_d(n) \in [a; a+1) \right\} \right| + \frac{N}{\varphi(d) \log^3 \mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $g_d(p) \neq g(n)$ только для $p \mid d$, и используя лемму 11, получим

$$X_3(N, g, \delta) \ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{d \leq \log^9 \mathcal{L}} \frac{s(d)}{\sqrt[3]{d} d} \cdot \frac{N}{\sqrt{W(N)}} \sum_{p \mid d} \frac{1}{p} \ll \frac{N}{\varphi(\delta) \sqrt{W(N)}}.$$

Из этой оценки, как отмечалось ранее, вытекает утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ruzsa I. On the concentration of additive functions // Acta Math. Aca. Sci. Hungar. 1980. V. 36. P. 215–232.
- [2] Elliott P. D. T. A. The concentration function of additive functions on shifted primes // Acta Math. 1994. V. 173. P. 1–35.
- [3] Тимофеев Н. М. Гипотеза Эрмеша–Кубилюса о распределении значений аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел // Acta Arithmetica. 1991. Т. 58. № 2. С. 113–131.
- [4] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. О функции концентрации аддитивной функции с немultipликативным весом // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 6. С. 877–894.
- [5] Тимофеев Н. М. Проблема Харди и Литтлвуда для чисел, имеющих заданное число простых делителей // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 6. С. 181–206.
- [6] Tenenbaum G. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Institut Elie Cartan, 13. Université de Nancy I, 1990.
- [7] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
- [8] Halberstam H., Richert H. E. Sieve Methods. London–New York: Academic Press, 1974.
- [9] Hall R., Tenenbaum G. 90 Divisors. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- [10] Хооли К. Применение методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.