Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Субботин, Функциональные свойства пространств
Привалова голоморфных функций нескольких перемен-
ных, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 280–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1050>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:56:17

УДК 517.53

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ПРИВАЛОВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. В. Субботин

В единичном шаре и поликруге из $\mathbb{C}^n$ рассмотрены классы И. И. Привалова степеней $q > 1$, определяемые как множество голоморфных, например в шаре, функций $f(z)$, у которых $\ln_+^q |f(z)|$ имеют ограниченные средние по сферам с центрами в нуле при возрастании радиусов к 1. Классы (в одномерном случае) были введены Приваловым еще до 1941 года и в последние 10–20 лет часто возникали в иностранной литературе под разнообразными обозначениями, правда без упоминания о Привалове. В настоящей работе обсуждаются эквивалентные определения этих классов, а также свойства самого общего характера: оценки роста, свойства естественной метрики, ограниченность и полная ограниченность подмножеств.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть n – произвольное натуральное число и $\mathbb{C}^n$ – множество всех упорядоченных наборов $(z_1, \dots, z_n)$ из n комплексных чисел. Для $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ через $\langle z, \zeta \rangle$ будем обозначать эрмитово скалярное произведение $\sum_{k=1}^n z_k \bar{\zeta}_k$, через $|z|_2$ – порожденную им норму $\sqrt{\langle z, z \rangle}$ и через $|z|_\infty$ – норму, равную $\max_{1 \leq k \leq n} |z_k|$. Рассмотрим шар $G_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|_2 < 1\}$ и поликруг $G_\infty = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|_\infty < 1\}$ и их граничные множества – сферу $\Gamma_2 = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta|_2 = 1\}$ и остов поликруга $\Gamma_\infty = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_k| = 1, 1 \leq k \leq n\}$, – а также комплексные ядра Пуассона для этих областей: для $z \in G_2$ и $\zeta \in \Gamma_2$

$$P_2(z, \zeta) = (1 - |z|_2^2)^n |1 - \langle z, \zeta \rangle|^{-2n}$$

и для $z \in G_\infty$ и $\zeta \in \Gamma_\infty$

$$P_\infty(z, \zeta) = \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|^2) |1 - z_k \bar{\zeta}_k|^{-2}.$$

Стандартной мерой на сфере Γ_2 является нормированная площадь Лебега, а на торе Γ_∞ – нормированное произведение мер Лебега единичных окружностей, составляющих тор. Обозначим их через σ_2 и σ_∞ соответственно. Обсуждение свойств введенных объектов см. в [1, гл. 1–4], [2, гл. I, II]. По-возможности, будем объединять оба случая (шара и поликруга), вводя единые обозначения: $|z| = |z|_2 \vee |z|_\infty$, $G = G_2 \vee G_\infty$, $\Gamma = \Gamma_2 \vee \Gamma_\infty$, $P = P_2 \vee P_\infty$ и $\sigma = \sigma_2 \vee \sigma_\infty$.

Рассмотрим голоморфную в области G функцию $f(z)$. Скажем, что $f(z)$ принадлежит классу Привалова N^q степени $q > 1$, если существует конечная постоянная $K = K(f)$ такая, что при всех $r, 0 \leq r < 1$,

$$\int_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)| \sigma(d\gamma) \leq K.$$

Здесь $\ln_+ a = \max(0, \ln a)$ при $a > 0$ и $\ln_+ 0 = 0$.

Обобщим это определение. Пусть $\varphi(t), t \geq 0$, – произвольная неотрицательная, неубывающая, выпуклая вниз функция. Скажем, что $f(z)$ принадлежит классу $\varphi(N)$, если существует конечная постоянная $N = N(f)$ такая, что при всех $r, 0 \leq r < 1$,

$$\int_{\Gamma} \varphi(\ln_+ |f(r\gamma)|) \sigma(d\gamma) \leq N.$$

Полагая $\varphi(t)$ равной t и e^{pt} , $p > 0$, соответственно получаем класс Неванлинны N и классы Харди H^p (см. [1, гл. 5, п. 5.6] и [2, гл. III, п. 3.3, 3.4]). Случай $\varphi(t) = t^q, q > 1$, соответствует классам Привалова N^q . В одномерном случае классы N^q были рассмотрены в монографии И.И. Привалова [3], затем изучались в [4]–[6]. По поводу общих классов $\varphi(N)$ см. [7].

Несколько иной подход к определению классов дает радиальная максимальная функция

$$M_{\text{rad}} f(\gamma) = \sup_{0 \leq r < 1} |f(r\gamma)|, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Скажем, что $f(z)$ принадлежит классу $\varphi(M)$, если

$$\int_{\Gamma} \varphi(\ln_+ M_{\text{rad}} f(\gamma)) \sigma(d\gamma) < +\infty.$$

Значит, семейство функций на Γ

$$\Psi_r(\gamma) = \varphi(\ln_+ |f(r\gamma)|), \quad 0 \leq r < 1, \quad (1)$$

обладает интегрируемой мажорантой. При $\varphi(t) = t$ класс M в одномерном случае был введен Х.О. Кимом в [8] и исследовался в [9], затем многомерные и степенные обобщения M^q на случай $\varphi(t) = t^q, q > 0$, и $n \geq 1$ изучались в [10], [11].

Подчиняя семейство (1) немного более слабому условию – равностепенной (по r) абсолютной непрерывности интегралов на Γ – получаем условие принадлежности $f(z)$ к классу $\varphi(N_*)$. Здесь свойство равностепенной абсолютной непрерывности означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого σ -измеримого множества $E \subset \Gamma$ с мерой $\sigma E < \delta$ равномерно по $r, 0 \leq r < 1$, выполнено

$$\int_E \Psi_r(\gamma) \sigma(d\gamma) < \varepsilon.$$

При $\varphi(t) = t$ получается известный класс Смирнова N_* (см. [2, гл. III, п. 3.3]).

Включения $\varphi(M) \subseteq \varphi(N_*) \subseteq \varphi(N)$ очевидны. Классы $\varphi(N)$, $\varphi(N_*)$ и $\varphi(M)$ не возрастают (повключению) при неубывании (по порядку роста на $+\infty$) φ . Следовательно, $H^p \subseteq N^q \subseteq N$ при $p > 0, q > 1$. Известно также, что $N_* = \cup \varphi(N)$, где объединение берется по всем растущим быстрее t на $+\infty$ функциям φ (см. [2, гл. III, теорема 3.1.2]). Учитывая, что $\varphi(t) = t^q, q > 1$, растет на $+\infty$ быстрее t , получаем уточнение последнего включения: $N^q \subseteq N_* \subseteq N$. Функции класса N имеют почти всюду по мере σ на Γ радиальные граничные значения $f(\gamma) = \lim_{r \uparrow 1} f(r\gamma)$ (см. [1, гл. 5, теорема 5.6.4], [2, гл. III, теорема 3.3.5]).

2. Свойства эквивалентные определению N^q .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in N$ и $\tilde{f}(\gamma) = \lim_{r \uparrow 1} f(r\gamma)$ – ее радиальные граничные значения, существующие почти всюду на Γ . При $q > 1$ следующие свойства функции $f(z)$ эквивалентны:

- 1) $f \in N^q$;
- 2) $f \in N_*$ и $\ln_+^q |\tilde{f}| \in L^1(\Gamma, \sigma)$;
- 3) $\ln_+^q |\tilde{f}| \in L^1(\Gamma, \sigma)$ и для любого $z \in G$

$$\ln_+^q |f(z)| \leq \int_{\Gamma} P(z, \gamma) \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma); \quad (2)$$

- 4) $f \in M^q$;
- 5) при всех r , $0 \leq r < 1$,

$$\int_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)| \sigma(d\gamma) \leq \int_{\Gamma} \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) < +\infty; \quad (3)$$

- 6) выполнено

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\gamma)| \sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma} \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) < +\infty;$$

- 7) $f \in N_*^q = (N_*)^q$.

В одномерном случае эквивалентность свойств 1), 6) и 7) была проверена еще в [3]. Для доказательства теоремы в общем случае нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть X – измеримое пространство с неотрицательной конечной мерой μ и $(f_n(x))$ – последовательность неотрицательных интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду по мере μ к интегрируемой функции $f(x)$. Равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

справедливо тогда и только тогда, когда последовательность (f_n) имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы для $X = [a, b]$ с обычной мерой Лебега см. в [12, разд. I, § 3, п. 3.2]. Оно без труда обобщается на произвольный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Эквивалентность свойств 4), 1) и 2) получена в [10]. В работе [7, лемма 2 и теорема 3] показано, что из свойства 1) следуют 3), 5) и 6). Из свойств 5) и 6) легко следует свойство 1). Лемма 1 влечет эквивалентность свойств 6) и 7). Для полноты доказательства остается лишь показать импликацию 3) $\implies$ 5). Полагая в (2) $z = r\zeta$ ($0 \leq r < 1$) и интегрируя по ζ , имеем

$$\int_{\Gamma} \ln_+^q |f(r\zeta)| \sigma(d\zeta) \leq \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} P(r\zeta, \gamma) \sigma(d\zeta) \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma),$$

где порядок интегрирования изменен (по теореме Фубини). Используя свойства симметрии $P(r\zeta, \gamma) = P(r\gamma, \zeta)$ и нормированности (см. [1, гл. 3, предложение 3.3.3], [2, гл. II, п. 2.1])

$$\int_{\Gamma} P(z, \gamma) \sigma(d\gamma) = 1, \quad z \in G, \quad (4)$$

ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1, исключая быть может лишь свойство 4), сохраняет свою силу и при замене $\varphi(t) = t^q$ на произвольную растущую сильнее t на $+\infty$ функцию φ (неотрицательную, неубывающую и выпуклую вниз). Следовательно, $\varphi(N) = \varphi(N_*)$ для таких φ . Будут ли при этом совпадать $\varphi(N)$ и $\varphi(M)$, большой вопрос. Используя одну интерполяционную теорему Зигмунда (см. [1, гл. 5, теорема 5.7]), можно показать лишь то, что $N \ln_+ N \subset M$.

3. Оценка роста функций из N^q . Пусть $f(z)$ голоморфна в G . Функция $\ln^q(1 + |f(z)|)$ так же, как и $\ln_+^q |f(z)|$ плюрисубгармонична в области G для всякой голоморфной там функции $f(z)$ и всякого $q \geq 1$ (т.е. субгармонична при подстановке любого голоморфного отображения из единичного круга в G). Действительно, $\ln^q(1 + |f(z)|)$ плюрисубгармонична как композиция плюрисубгармоничной $\ln |f(z)|$ и неубывающих, выпуклых вниз функций $\psi(s) = \ln(1 + \exp s)$ и $\varphi(t) = t^q$. Поэтому теорема 1 сохраняет свою силу при замене в ней $\ln_+^q |f(z)|$ на $\ln^q(1 + |f(z)|)$.

Согласно лемме 2 из [7] интеграл

$$I(r, f) = \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |f(r\gamma)|) \sigma(d\gamma)$$

не убывает по r при $0 \leq r < 1$ для любой голоморфной в G функции $f(z)$. Поэтому $\lim_{r \uparrow 1} I(r, f)^{1/q}$ существует всегда, конечный для функций из N^q и бесконечный для остальных. Обозначим эту числовую характеристику через $|f|_{N^q}$. Согласно свойству 6) теоремы 1 (с заменой $\ln_+^q |f(z)|$ на $\ln^q(1 + |f(z)|)$) при $q > 1$ (при $q = 1$ это неверно)

$$|f|_{N^q} = \left(\int_{\Gamma} \ln^q(1 + |\tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q}, \quad (5)$$

где $\tilde{f}(\gamma) = \lim_{r \uparrow 1} f(r\gamma)$ — радиальные граничные значения функции $f(z)$.

Используя неравенство

$$P(z, \zeta) \leq (1 + |z|)^n (1 - |z|)^{-n}, \quad z \in G, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (6)$$

и свойство 3) теоремы 1 (с $\ln^q(1 + |f(z)|)$), можно получить простейшую оценку функций из N^q :

$$\ln(1 + |f(z)|) \leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{n/q} |f|_{N^q}.$$

Однако, свойство 3) позволяет доказать более точную оценку роста.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q > 1$ и $f \in N^q$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $A = A(\varepsilon) < +\infty$ такая, что

$$\ln_+ |f(z)| \leq A + \frac{\varepsilon}{(1 - |z|)^{n/q}}, \quad (7)$$

т.е. $\ln_+ |f(z)| = o((1 - |z|)^{-n/q})$ при $|z| \uparrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно абсолютной непрерывности интеграла от $\ln_+^q |\tilde{f}|$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого σ -измеримого множества $E \subseteq \Gamma$ с $\sigma E < \delta$ справедливо

$$\int_E \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) < \frac{\varepsilon^q}{2^n}. \quad (8)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $E_k = \{\gamma \in \Gamma : \ln_+ |\tilde{f}(\gamma)| \geq k\}$. Согласно неравенству Чебышева

$$\sigma E_k \leq \frac{1}{k^q} \int_{\Gamma} \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) \leq \frac{|f|_{N^q}^q}{k^q}.$$

Поэтому найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sigma E_k < \delta$ (например, $k > |f|_{N^q} / \delta^{1/q}$), значит для $E = E_k$ выполнено (8). Отсюда согласно свойству 3) теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} \ln_+ |f(z)| &\leq \left(\int_{E_k} P(z, \gamma) \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} + \left(\int_{\Gamma \setminus E_k} P(z, \gamma) \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{n/q} \left(\int_{E_k} \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} + k \left(\int_{\Gamma \setminus E_k} P(z, \gamma) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(1 - |z|)^{n/q}} + k; \end{aligned}$$

мы воспользовались оценкой ядра Пуассона (6), неравенствами (4), (8) и

$$(a + b)^{1/q} \leq a^{1/q} + b^{1/q}, \quad a, b \geq 0. \quad (9)$$

Следовательно, теорема доказана с $A(\varepsilon) = k$.

4. N^q как F -алгебра. Пусть $f(z), g(z)$ – голоморфные в G функции и $q \geq 1$. Из простых неравенств

$$\begin{aligned} \ln(1 + a + b) &\leq \ln(1 + a) + \ln(1 + b), \quad \ln(1 + ab) \leq \ln(1 + a) + \ln(1 + b), \\ \min(1, \alpha) \ln(1 + a) &\leq \ln(1 + \alpha a) \leq \max(1, \alpha) \ln(1 + a), \end{aligned}$$

справедливых для $a, b, \alpha \geq 0$, и неравенства Минковского в $L^q(\Gamma, \sigma)$ при $q \geq 1$ можно вывести простейшие свойства характеристики $|\cdot|_{N^q}$, введенной в п. 3:

$$|f + g|_{N^q} \leq |f|_{N^q} + |g|_{N^q}, \quad |fg|_{N^q} \leq |f|_{N^q} + |g|_{N^q}, \quad (10)$$

$$\min(1, |\alpha|) |f|_{N^q} \leq |\alpha f|_{N^q} \leq \max(1, |\alpha|) |f|_{N^q}, \quad (11)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$. Отсюда автоматически следует замкнутость N^q , $q \geq 1$, относительно поточечного сложения и умножения, т.е. N^q – коммутативная алгебра. Характеристика $|\cdot|_{N^q}$ обладает на N^q тремя свойствами:

- 1) $|f|_{N^q}$ конечна и $|f|_{N^q} \geq 0$;
- 2) из $|f|_{N^q} = 0$ следует, что $f \equiv 0$ в G ;
- 3) $|f + g|_{N^q} \leq |f|_{N^q} + |g|_{N^q}$.

Характеристики с такими свойствами называются *квазинормами*. Каждая квазинорма на линейном пространстве порождает каноническим образом инвариантную относительно сдвигов метрику: $\rho_{N^q}(f, g) = |f - g|_{N^q}$ (для $f, g \in N^q$). Свойства этой метрики и будут занимать наше внимание.

Аналогично первому утверждению теоремы 4.2 из [4] имеет место следующая теорема (многомерность не играет существенной роли).

ТЕОРЕМА 3. *При $q > 1$ метрика ρ_{N^q} превращает N^q в F -алгебру относительно поточечного сложения и умножения, т.е. метрика инвариантна при сдвигах, полна и операция умножения непрерывна в этой метрике, причем*

$$|fg|_{N^q} \leq |f|_{N^q} + |g|_{N^q}.$$

При $q = 1$ утверждение теоремы становится неверным (см. [13]). Другому утверждению теоремы 4.2 из [4] соответствует

ТЕОРЕМА 4. *Если $q > 1$, $f \in N^q$ и $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \leq r < 1$, то $f_r \rightarrow f$ при $r \uparrow 1$ по метрике N^q .*

Так как растяжения f_r при $0 \leq r < 1$ голоморфны на самом деле в области G/r , то в G они представимы равномерно сходящимся рядом Тейлора. Поэтому из теоремы 3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Многочлены плотны в N^q при $q > 1$ и N^q – сепарабельная F -алгебра.*

В [4] М. Столл показал (в одномерном случае), что функции, для которых справедлива оценка (7) (теорема 2), образуют алгебру Фреше $F_{1/q}$, накрывающую F -алгебру N^q , и обстоятельно изучил свойства этой алгебры.

5. Ограниченные подмножества N^q . Согласно теореме 3 пространства N^q при $q > 1$ являются линейными топологическими пространствами, т.е. операции сложения и умножения на скаляр непрерывны в метрике ρ_{N^q} . Подмножество B линейного топологического пространства называется ограниченным, если для любой окрестности нуля U существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех скаляров α , $|\alpha| \leq \alpha_0$, имеет место включение $\alpha B \subset U$. В случае, когда топология линейного топологического пространства порождена метрикой, ограниченность в смысле линейного топологического пространства не всегда равносильна ограниченности попарных расстояний.

ТЕОРЕМА 5. *Ограниченность подмножества L пространства N^q , $q > 1$, равносильна выполнению следующих двух условий:*

- 1) *существует $K < +\infty$ такое, что $|f|_{N^q} \leq K$ для всех $f \in L$;*
- 2) *семейство $\{\ln_+^q |\tilde{f}|\}_{f \in L}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы на Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть L – ограниченное в N^q подмножество функций.

1) Взяв в определении ограниченности $U = \{f \in N^q : |f|_{N^q} < 1\}$, видим, что при достаточно малом $\alpha_0 > 0$ квазинормы $|\alpha_0 f|_{N^q}$ ограничены 1 при $f \in L$. Следовательно, в силу неравенства (11) ограничены при $f \in L$ и

$$|f|_{N^q} \leq \max\left(1, \frac{1}{\alpha_0}\right) |\alpha_0 f|_{N^q} < \max\left(1, \frac{1}{\alpha_0}\right).$$

Тем самым, необходимость условия 1) установлена.

2) Докажем теперь равностепенную абсолютную непрерывность интегралов семейства $\{\ln_+^q |\tilde{f}|\}_{f \in L}$. А значит, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ необходимо указать $\delta > 0$ такое, что для всех σ -измеримых множеств $E \subset \Gamma$ с мерой $\sigma E < \delta$ и любой функции $f \in L$ выполнено

$$\int_{\Gamma} \ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)| \sigma(d\gamma) < \varepsilon.$$

В силу неравенства $\ln_+^q t \leq \ln^q(1+t)$, $t \geq 0$, достаточно то же самое доказать для $\ln^q(1 + |\tilde{f}(\gamma)|)$ вместо $\ln_+^q |\tilde{f}(\gamma)|$.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Так как L ограничено, то для $U = \{f \in N^q : |f|_{N^q} < \varepsilon^{1/q}/2\}$ найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что $\alpha_0 L \subset U$, т.е. для любой $f \in L$ $|\alpha_0 f|_{N^q} < \varepsilon^{1/q}/2$. Зафиксировав это α_0 и $f \in L$, для произвольного σ -измеримого множества $E \subset \Gamma$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_E \ln^q(1 + |\tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} &\leq \left(\int_E \ln^q(1 + |\alpha_0 \tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int_E \ln^q \left(1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} \\ &\leq |\alpha_0 f|_{N^q} + \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) \sigma E^{1/q}, \end{aligned} \quad (12)$$

мы воспользовались неравенством (10) (с заменой f на $\alpha_0 f$, g на $1/\alpha_0$ и Γ на E) и выражением (5). Наконец, если выразим $\delta > 0$ из равенства $\ln(1 + 1/\alpha_0) \delta^{1/q} = \varepsilon^{1/q}/2$, то при $\sigma E < \delta$ после небольших преобразований неравенства (12) получим

$$\int_E \ln^q(1 + |\tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) < \varepsilon$$

равномерно по $f \in L$. Таким образом, необходимость условия 2) установлена.

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия 1), 2). Чтобы показать ограниченность L , возьмем любую окрестность нуля U . Вписав в U шар достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$, без ограничения общности можем считать $U = \{f \in N^q : |f|_{N^q} < \varepsilon\}$. В этом случае требуется показать, что при всех достаточно малых положительных по модулю $\alpha \in \mathbb{C}$ $\alpha L \subset U$, т.е. $|\alpha f|_{N^q} < \varepsilon$ при всех $f \in L$. Для произвольных $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in N^q$ и σ -измеримого множества $E \subset \Gamma$ имеем

$$\begin{aligned} |\alpha f|_{N^q} &\leq \max(1, |\alpha|) \left(\int_E \ln^q(1 + |\tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} + \left(\int_{\Gamma \setminus E} \ln^q(1 + |\alpha \tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \right)^{1/q} \\ &= \max(1, |\alpha|) I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (13)$$

мы воспользовались неравенствами (9) и (11) (с E вместо Γ). Так как

$$\ln^q(1+t) \leq 2^{q-1}(\ln^q 2 + \ln_+^q t), \quad t \geq 0,$$

согласно условию теоремы для нашего $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\sigma E < \delta$ и $f \in L$ $I_1 < \varepsilon/2$. Зафиксировав это $\delta > 0$ и взяв K из условия 1), можно найти $m \in \mathbb{N}$

такое, что при всех $f \in L$ все множества $E_m = \{\gamma \in \Gamma : |\tilde{f}(\gamma)| \geq m\}$ имеют меру $\sigma E_m < \delta$. Действительно, в силу неравенства Чебышева

$$\sigma E_m \leq \frac{1}{\ln^q(1+m)} \int_{\Gamma} \ln^q(1+|\tilde{f}(\gamma)|) \sigma(d\gamma) \leq \frac{K^q}{\ln^q(1+m)}, \quad (14)$$

значит достаточно выбрать $m > m_0$, где m_0 определяется из уравнения $K^q / \ln^q(1+m_0) = \delta$ (для $K = 0$ m можно выбрать любым). Итак, для $f \in L$ $\sigma E_m < \delta$. Полагая $E = E_m$ в неравенстве (13) и вспоминая определения δ и E_m , имеем

$$|\alpha f|_{N^q} \leq \max(1, |\alpha|) \frac{\varepsilon}{2} + \ln(1 + |\alpha|m);$$

откуда видно, что при достаточно малых (но не равных 0) по модулю числах α $|\alpha f|_{N^q} < \varepsilon$ равномерно (m не зависит от конкретного выбора f из L) по $f \in L$. Значит, $\alpha L \subset U$ при всех достаточно малых по модулю ненулевых α и условие ограниченности для данной окрестности U проверено.

Теорема доказана.

Приведем стандартный пример ограниченного в N^q множества. Пусть $f \in N^q$ и $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \leq r < 1$. Тогда функции f_r , $0 \leq r < 1$, образуют ограниченное в N^q подмножество. Условие 1) теоремы 5 выполнено почти по определению принадлежности f к N^q , а условие 2) есть не что иное, как свойство 7) теоремы 1.

6. Полная ограниченность подмножеств N^q . Как известно, полная ограниченность подмножеств полного метрического пространства эквивалентна их относительной компактности.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $q > 1$. Множество $L \subset N^q$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда

- 1) L ограничено в N^q (в смысле линейного топологического пространства);
- 2) радиальные граничные значения функций из L образуют относительно компактное по мере σ подмножество измеримых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Множество L ограничено в N^q как любое вполне ограниченное подмножество линейного топологического пространства.

Покажем теперь, что множество $\tilde{L}$ радиальных граничных значений функций из L относительно компактно по мере. Пусть $(g_n) \subset \tilde{L}$ — любая последовательность. Пусть $\tilde{f}_n = g_n$, где $(f_n) \subset L$. Так как L относительно компактно, то существует последовательность номеров $(n_k) \uparrow \subset \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $f_{n_k} \rightarrow f \in N^q$ при $k \rightarrow \infty$. Так как из сходимости в N^q следует сходимость по мере радиальных граничных значений (см. неравенство (14)), то $g_{n_k} \rightarrow g = \tilde{f}$ и по мере σ . Итак, из любой последовательности $\tilde{L}$ мы выбрали сходящуюся по мере подпоследовательность. Значит, $\tilde{L}$ относительно компактно.

Достаточность. Пусть $(f_n) \subset L$ — любая последовательность. Так как $(\tilde{f}_n) \subset \tilde{L}$, существует подпоследовательность $\tilde{f}_{n_k} \rightarrow g$ по мере σ для некоторой измеримой g . По теореме Рисса из нее можно выделить сходящуюся почти всюду подпоследовательность, т.е. $f_{n_{k_l}} \rightarrow g$ при $l \rightarrow \infty$ почти всюду. Так как L ограничено, по критерию ограниченности (см. теорему 5) последовательность $\ln^q(1 + |\tilde{f}_{n_{k_l}}|)$ имеет ограниченные и равномерно абсолютно непрерывные интегралы на Γ . По теореме Фату функция $\ln^q(1 + |g|)$

интегрируема и, следовательно, последовательность $\ln^q(1 + |\tilde{f}_{n_{k_l}} - g|)$ также имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Согласно лемме 1

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \ln^q(1 + |\tilde{f}_{n_{k_l}} - g|) d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что $(f_{n_{k_l}})$ фундаментальна в N^q , значит сходится. Итак, из всякой последовательности L можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, L относительно компактно.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пример ограниченного в N^q множества, приведенный в конце п. 5, подходит и для примера вполне ограниченного множества. Но здесь относительная компактность этого множества очевидна. Действительно, любая последовательность здесь задается последовательностью (r_n) , $0 \leq r_n < 1$. Если эта последовательность имеет предельную точку, отличную от 1, то, выбрав соответствующую подпоследовательность (r_{n_k}) , сходящуюся к этой предельной точке, и взяв соответствующую подпоследовательность $(f_{r_{n_k}})$ последовательности (f_{r_n}) , видим, что она сходится равномерно (к функции с номером, равным предельной точке), а значит, и в метрике N^q . Если же $r_n \rightarrow 1$, то $f_{r_n} \rightarrow f$ по теореме 4. Таким образом, из любой последовательности мы выделили сходящуюся подпоследовательность, т.е. относительная компактность имеет место.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рудин У. Теория функций в шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
- [2] Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
- [3] Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М.: Изд-во МГУ, 1941.
- [4] Stoll M. Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions // Ann. Polon. Math. 1977. V. 35. P. 139–158.
- [5] Mochizuki N. Algebras of holomorphic functions between H^p and N_* // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 105. P. 898–902.
- [6] Meštrović R., Pavićević Ž. Remarks on some classes of holomorphic functions // Math. Montisnigri. 1996. V. 6. P. 27.
- [7] Stoll M. Harmonic majorants for plurisubharmonic functions // J. Reine Angew. Math. 1976. V. 282. P. 80–87.
- [8] Kim H. O. On closed maximal ideals of M // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1986. V. 62. № 9. P. 343–346.
- [9] Kim H. O. On an F -algebra of holomorphic functions // Canad. J. Math. 1988. V. 40. № 3. P. 718–741.
- [10] Choe B. R., Kim H. O. On the boundary behavior of functions holomorphic on the ball // Complex Variables Theory Appl. 1992. V. 20. P. 53–61.
- [11] Kim H. O., Park Y. Y. Maximal functions of plurisubharmonic functions // Tsukuba J. Math. 1992. V. 16. № 1. P. 11–18.
- [12] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. 2-е изд. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [13] Shapiro J., Shields A. Unusual topological properties of the Nevanlinna class // Amer. J. Math. 1975. V. 97. P. 915–936.