Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Лемма Гурса в контексте банаховых алгебр,
Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 1, 61–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:29:00

Лемма Гурса в контексте банаховых алгебр

Е. А. Горин

Классическая лемма Гурса распространяется на классы дифференцируемых отображений областей вещественных банаховых пространств в алгебры действующих на этих пространствах линейных операторов. Выясняется, как изменяется ее форма и содержание в зависимости от выбора исходного объекта. Отдельное место занимает тот случай, когда исходное пространство является банаховой алгеброй, а производные Фреше – операторами умножения на ее элементы.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10500

1. Введение. Классическая лемма Гурса устанавливает, что если $f(z)$ есть $\mathbb{C}$ -дифференцируемая функция в некоторой области V комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и Γ – ориентированная граница обычного треугольника, целиком расположенного в V , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Из леммы Гурса вытекает существование локальной $\mathbb{C}$ -первообразной и поэтому она позволяет в фундаментальных теоремах Коши об аналитических функциях освободиться от априорного предположения о непрерывности производной, что придает основаниям теории аналитических функций логически заверченный вид.

Легко убедиться, что для $\mathbb{R}$ -дифференцируемых отображений плоских областей лемма Гурса выполняется тогда и только тогда, когда производная Фреше $\mathbb{C}$ -линейна.

Естественно спросить, в какой мере лемма Гурса относится именно к теории аналитических функций комплексной переменной.

С формальной точки зрения лемма Гурса выполняется для всех (непрерывных) вещественных функций на интервале вещественной оси $\mathbb{R}$: в этом случае треугольники вырождаются, и утверждение равносильно аддитивности интеграла как функции промежутка интегрирования. Это обстоятельство наводит на мысль, что лемма Гурса – это важный, но частный случай какого-то простого общего факта линейного функционального анализа. Наша цель – придать некоторый точный смысл этому утверждению в контексте банаховых пространств и банаховых алгебр.

Сначала мы будем иметь дело с непрерывными функциями, заданными в области V вещественного банахова пространства X и принимающими значения в алгебре

$\mathbb{L} = L(X)$ всех ограниченных линейных операторов на этом пространстве. Так как большинство основных результатов здесь имеет локальный характер, совокупность $\{V\}$ допустимых областей определения функций можно было бы сузить до класса шаров.

При желании сохранить равновесие между простотой определений и содержательностью утверждений читатель в целях наглядности может иметь в виду именно этот случай, и до некоторых пор почти ничего не потеряет.

На классе таких функций в общих областях определяется интеграл, сначала по одномерным «сингулярным» отрезкам, а затем – по всем непрерывным спрямляемым одномерным сингулярным цепям, включая границы треугольников. Значения интегралов суть элементы пространства X . Заметим, что наше определение интеграла немного отличается от классического определения Бохнера (см., например, [1; с. 92]).

Класс Гурса $G(V)$ составляют все те непрерывные отображения из V в алгебру $\mathbb{L}$ на X , для которых в случае простейших треугольников, целиком попадающих в область, все указанные выше интегралы равны 0.

Производная Фреше f'_x , если для f существует дифференциал в данной точке, формально принадлежит $\mathbb{L}(\mathbb{L}(X))$ и в данном контексте отождествляется с билинейной формой на X (со значениями в X). Вместо $\mathbb{L}(\mathbb{L}(X))$ мы будем часто писать $\mathbb{B}(X)$ или даже $\mathbb{B}$. Условие дифференцируемости можно записать в стандартном виде:

$$f(x+h) = f(x) + f'_x h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Заметим, что в классическом случае отображений банаховых пространств билинейная форма возникает только на втором шаге. В нашем случае область значений состоит из *отображений*. Иначе говоря, дело в том (см. ниже), что каждая непрерывная функция $B(0, r) \rightarrow L(X)$ имеет первообразную $B(0, r) \rightarrow \mathbb{L}(X)$.

Отображение называется *дифференцируемым* в V , если оно дифференцируемо в каждой точке из V .

Мы выясняем, когда дифференцируемое отображение попадает в $G(V)$.

Во второй части для ясности более или менее независимо рассматривается случай, когда X – вещественная (или комплексная) банахова алгебра, а значения функций суть операторы умножения слева (или справа) на элементы этой алгебры.

Единица в банаховой алгебре A , если она есть в алгебре, обычно обозначается $\mathbb{I} = \mathbb{I}_A$. Предполагается, что

$$|ab| \leq |a| \cdot |b| \quad \text{для всех } a, b \in A, \quad |\mathbb{I}| = 1. \quad (1)$$

В некоторых содержательных случаях наличие единицы и, стало быть, последнее условие в (1) не предполагается.

Наличие (или отсутствие) единицы в возникающих алгебрах может сильно изменить дело.

Наконец, отдельно и чуть более тщательно рассматриваются комплексные коммутативные банаховы алгебры. Этот случай можно трактовать в качестве частного случая вещественного. Однако он гораздо ближе к классической ситуации, чем может показаться на первый взгляд. Дело в том, что для локально ограниченных комплексно-дифференцируемых отображений (когда производная Фреше

$\mathbb{C}$ -линейна) сохраняются практически все «конечномерные» факты (см., например, [2]).

По существу здесь кратко описывается теория Лорха, построенная им в 40-е годы прошлого века (см., например, [1; с. 123]): класс Лорха содержит только функции, локально представимые степенным рядом, т.е. появляется класс «функций», которые заданы, вообще говоря, в бесконечномерных областях, но в определенном смысле ближе к функциям одной переменной, чем двух. Класс Лорха в его теории тесно связан с леммой Гурса.

В некоторых бесконечномерных сужениях таких классов естественно было бы развить теорию алгебраических уравнений с простым спектром и кос Зарисского–Артина. Первые шаги в изучении таких уравнений были сделаны давно [3], но, в отличие от теории кос, с тех пор, кажется, существенных продвижений не было. Здесь мы только кое-что напомним.

Описанные выше схемы параллельны той, которая получается в теории дифференциальных форм, и в этом смысле мы не идем дальше 2-форм, однако излишняя гладкость не предполагается.

Некоторые из приводимых ниже результатов подводят к интересным вопросам, например, к вопросу об оболочке голоморфности для отображений областей в банаховых пространствах над полем $\mathbb{C}$. Впрочем, для этого есть и более убедительные основания (в частности, теория Каупа однородных аналитических бесконечномерных областей).

В этой работе нет трудных теорем, но текст немного растянут, так как по ходу дела воспроизводится (с некоторыми акцентами) несколько общих мест. Часть доказательств почти повторяет классические, и мы опускаем детали, но стараемся не экономить на определениях.

У автора нет никаких иллюзий ни по поводу новизны, ни по поводу возникающих вопросов, однако конкретные обстоятельства не позволяют заняться библиографическими изысканиями. Я не буду спорить по поводу того, что в известной мере работа имеет методический характер.

Наконец, хочу отметить, что Б. Н. Кукушкин и Б. М. Макаров указали на некоторые небрежности первоначальных вариантов рукописи данной работы.

2. Обозначения. Мы будем пользоваться следующим стандартным списком обозначений:

- $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел;
- $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$;
- $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел;
- $\mathbb{C}^* = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq 0\}$.

Символика естественно комбинируется. Например, $\mathbb{Z}_+$ – это натуральный ряд.

Когда выбор поля не важен, символ Λ иногда употребляется для обозначения какого-нибудь из названных полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если X – банахово пространство и $x \in X$, то $|x|$ – норма элемента x .

Мы уже отмечали во введении, что при $\Lambda = \mathbb{C}$ для ограниченных в данной области функций различные типы дифференцируемости эквивалентны. В частности,

для дифференцируемости по Фреше достаточно, чтобы сужения функции на (комплексные) прямые были слабо дифференцируемыми. Кроме того, в этом случае $x \rightarrow f'_x$ – дифференцируемая функция. Ограниченность, вообще говоря, нельзя опустить, например, в (бесконечномерном) банаховом пространстве каждый разрывный линейный функционал дает контрпример к аналогу классической теоремы Хартогса. Заметим, кстати, что когда X бесконечномерно, сужение целой функции на шар *не обязательно* будет ограниченной функцией (достаточно рассмотреть $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_1^\infty \xi_k^k$, где ξ_k – стандартная координата точки $x \in l_2$ в шаре $\{x \in X \mid |x| < c\}$ при $c > 1$).

3. Интеграл. В схеме Колмогорова построения меры и интеграла Лебега (см., например, [4]) исходным объектом служит некоторое полукольцо S подмножеств не пустого множества T . Если $T \in S$, то S называется *кольцом*. *Мерой* называется неотрицательная аддитивная функция на S . Если $T \in S$ и исходная мера счетно-аддитивна, то она продолжается с сохранением этого свойства на σ -алгебру измеримых по Лебегу множеств.

С некоторыми оговорками (которые, правда, начинаются сразу) эту схему можно перенести на меры μ со значениями в банаховом пространстве.

Счетная аддитивность означает, что если

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \text{где } E_i \cap E_k = \emptyset \quad \text{при } i \neq k,$$

(все множества из S), то

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Ряд справа должен сходиться коммутативно (иными словами, безусловно). Если X конечномерно, то это равносильно сходимости ряда из норм. Однако для бесконечномерных банаховых пространств второе условие сильнее первого, и мы будем считать выполненным именно это условие.

Теперь мы можем сопоставить мере μ положительную меру – ее *сильную вариацию* ρ по формуле

$$\rho(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным не более чем счетным разбиениям множества $E \in S$ на подмножества E_i из S . Легко убедиться, что ρ – (конечная, неотрицательная, счетно-аддитивная) мера. Будем считать эту меру продолженной по Лебегу.

Ясно, что мера μ продолжается до счетно-аддитивной меры на σ -алгебре ρ -измеримых множеств с сохранением неравенства $|\mu(E)| \leq \rho(E)$.

Будем называть множество *измеримым*, если оно измеримо по Лебегу относительно меры ρ . Заметим, что вместо $\rho(E)$ (особенно в неравенствах) более наглядно писать $\text{var}_E(\mu)$. Число $\text{var}_T(\mu)$ называется *полной вариацией меры* μ .

Интеграл, который мы в основном будем использовать, определяется для функций на V со значениями в $\mathbb{L}$, однако начать надо с интеграла по обычному отрезку.

Подчеркнем еще раз, что значения лежат не в X , а в $\mathbb{L} = L(X)$. Последнее позволяет говорить не только об обычных симметричных билинейных формах, но и о *симметричных линейных* формах (производных Фреше φ) со значениями в X , скажем, писать $(\varphi(a))b = (\varphi(b))a$, где $a, b \in X$, а $\varphi: X \rightarrow \mathbb{L}$ – линейная форма.

Функция $g: T \rightarrow \mathbb{L}$ называется *простой*, если множество ее значений не более чем счетно. Каждой простой функции отвечает разбиение $\{E_i\}$ множества T на «линии уровня» функции g . По определению простая функция измерима, если измеримы все ее «линии уровня».

Простая измеримая функция g называется *суммируемой*, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \rho(E_i) < \infty, \quad \text{где } a_i = g|_{E_i},$$

и в этом случае интеграл определяется равенством

$$\int_T g(t) \mu(dt) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Функция g называется суммируемой, если она представляется в виде предела равномерно сходящейся последовательности $\{g_n\}$ простых суммируемых функций, и тогда

$$\int_T g(t) \mu(dt) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T g_n(t) \mu(dt);$$

предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности (до сих пор специальная природа области значений не существенна).

Следующий пример (ср. [4; с. 72 и далее]) важен для дальнейшего. Положим $T = [0, 1]$ и обозначим через S полукольцо всех стрелок $[s, t) \subset T$. Говорят, что функция $\omega: T \rightarrow X$ имеет *конечную сильную вариацию*, если числа

$$\sum_{i=0}^n |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|, \quad \text{где } 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1,$$

ограничены в совокупности (и по n , и по t_k). Мы предположим, что это условие выполнено и что, кроме того, функция ω непрерывна слева (в том числе в точке 1). Верхняя грань множества этих чисел называется *полной вариацией функции* ω и обозначается $\text{var}_T(\omega)$.

Определим (аддитивную) меру μ на *стрелках* (т.е. конечных полуинтервалах вида $[s, t)$) равенством

$$\mu([s, t)) = \omega(t) - \omega(s).$$

Кроме того, для определенности положим $\mu(\{1\}) = 0$ (лучше сказать, что ω продолжается константами за пределы $(0, 1)$, оставаясь непрерывной слева).

Для каждого непрерывного линейного функционала ψ на X суперпозиция $\psi \circ \omega$ – непрерывная слева скалярная функция конечной полной вариации. Поэтому скалярная мера, порожденная такой функцией, счетно-аддитивна. В сочетании с теоремой Хана–Банаха отсюда следует, что счетно-аддитивна мера μ . Ясно, что эта

мера обладает конечной полной вариацией, совпадающей с полной вариацией функции ω . Поэтому к ней применимы описанные выше конструкции. Возникающий на этом пути интеграл – это интеграл Лебега – Стильтеса:

$$\int_0^1 g(t) d\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T g(t) \mu(dt).$$

Пусть E – банахово пространство и V – область в E . Две непрерывные функции $\omega_i: [a_i, b_i] \rightarrow V$, $i = 1, 2$, конечной вариации назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм отрезков, сохраняющий порядок концов, под действием которого одна из них превращается в другую. Заметим, что достаточно было бы потребовать конечность вариации одной из функций, тогда и вторая имеет ту же вариацию. Класс эквивалентности таких функций обозначается Γ и называется *путем*. Практически обычно мы имеем дело с фиксированным представителем класса, чаще всего вида $\{[0, 1], \omega, V\}$. В подобном случае мы говорим, что ω – параметризация пути. Множество $|\Gamma| \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega(t)\}$ называется *орбитой* пути, точки $\omega(0)$ и $\omega(1)$ – *концы пути*. Когда требуется уточнение, точка $\omega(0)$ называется *началом пути*. Если концы пути совпадают, то путь называется *петлей*. *Длиной пути* Γ называется число $l(\Gamma) = \text{var}_{[0,1]}(\omega)$. От выбора конкретной параметризации указанные величины не зависят.

В теории интегрирования обычно начинают с путей конечной длины (а затем переходят к σ -конечным). Нам потребуются только пути конечной длины.

Если V – область в X , то мы пишем $\Gamma \subset V$ вместо более тщательного $|\Gamma| \subset V$. Аналогичный смысл имеет запись $x \in \Gamma$.

Если $\Gamma \subset V$, то говорят, что путь проходит в V .

Совокупность всех функций с конечными носителями, заданных на множестве всех таких путей и принимающих значения из Λ (формальные линейные комбинации путей), составляет абелеву группу $C_1(V, \mathbb{L})$ одномерных вещественных (а в дальнейшем – комплексных) цепей. Функция $l(\Gamma)$ естественно (аддитивно и положительно-однородно) продолжается на $C_1(V, \mathbb{L})$.

Пусть $f: V \rightarrow \mathbb{L}$ – непрерывное отображение. Тогда для каждого пути $\Gamma \subset V$ функция $f \circ \omega$ непрерывна. Поэтому, если $l(\Gamma) < \infty$, то имеет смысл следующее определение:

$$\int_{\Gamma} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(\omega(t)) d\omega(t),$$

причем для непрерывно дифференцируемых ω справа вместо $d\omega(t)$ можно написать $\omega'(t) dt$. Правая часть при этом становится даже более выразительной. С формальной точки зрения делается «замена переменной» $x = \omega(t)$ в левом интеграле, но теперь справа *оператор* $f(\omega(t))$ *применяется к вектору* $\omega'(t)$, и такая запись подчеркивает, что здесь природа области значений (уже) важна. Ясно, что

$$\left| \int_{\Gamma} f(x) dx \right| \leq \left(\sup_{x \in \Gamma} |f(x)| \right) \cdot l(\Gamma).$$

По линейности определение интеграла распространяется на цепи, и последнее неравенство сохраняется (если $l(\Gamma)$ заменить на сумму длин «слагаемых» цепи, умноженных на модули коэффициентов).

При $a, b \in X$ обозначим через $[a, b]$ путь с параметризацией

$$\omega(t) = (1-t)a + tb.$$

Положим

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

Очевидно, что если $l(x) = \beta (= \text{const})$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b l(x) dx = \beta(b-a).$$

Легко вычисляется и интеграл от линейной функции.

Таким образом, если $l: X \rightarrow \mathbb{L}$ – аффинная функция, т.е. $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x) + \beta$, где $\alpha(x), \beta \in \mathbb{L}$, то, как легко вычислить,

$$\int_a^b l(x) dx = \frac{1}{2}(l(b) + l(a))(b-a). \quad (2)$$

Разумеется, (2) имеет место для всех $a, b \in X$ (в одномерном случае формула (2) – это формула площади трапеции).

4. Класс Гурса (банаховы пространства). Пусть V – область в банаховом пространстве X и $f: V \rightarrow \mathbb{L}$ – непрерывная функция. Будем говорить, что f – *функция класса Гурса*, если

$$\left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a \right) f(x) dx = 0$$

для каждой трети точек $a, b, c \in V$, выпуклая оболочка которых остается в V .

Легко видеть, что это свойство локальное. Совокупность всех функций Гурса в области V составляет линейное пространство, которое обозначается через $G(V)$.

Все константы содержатся в $G(V)$. Аффинная функция l тогда и только тогда является функцией Гурса, когда

$$l(a)(b-c) + l(b)(c-a) + l(c)(a-b) = 0 \quad (3)$$

для каждой трети точек $a, b, c \in X$. Для доказательства достаточно сложить три слагаемых типа (3).

Если l – линейная функция, то условие (3) превращается в условие симметрии

$$l(a)b = l(b)a \quad (4)$$

для любых $a, b \in X$ (достаточно взять $c = 0$).

Обратно, условие (4) влечет за собой условие (3).

Пусть $g: V \rightarrow X$ – функция в области V , в каждой точке x обладающая непрерывной производной $g' = f: V \rightarrow \mathbb{L}$. Легко видеть, что тогда сохраняется формула Ньютона–Лейбница: для каждого (спрямляемого) пути в Γ с концами $a, b \in V$ имеем

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = g(b) - g(a).$$

Поэтому все непрерывные функции f такого вида принадлежат $G(V)$. Имеется широкий класс областей, для которых *только такие* f содержатся в $G(V)$. Следующая лемма (доказательство которой очевидно), предьявляет простейшие из таких областей.

ЛЕММА 1. Пусть V – выпуклая область в банаховом пространстве X , причем $0 \in V$. Функция $f: V \rightarrow \mathbb{L}$ тогда и только тогда является функцией Гурса в области V , когда у нее есть первообразная, т.е. существует такая дифференцируемая функция $g: V \rightarrow X$, что $g'(x) = f(x)$. Каждая первообразная с точностью до аддитивной константы совпадает с $\int_0^x f(\xi) d\xi$.

Пусть $\Gamma_0 = \{\omega_0: [0, 1] \rightarrow V\}$ – путь. Обозначим через c расстояние от $|\Gamma_0|$ до $X \setminus V$. Тогда $c > 0$.

ЛЕММА 2. Если Γ – путь с теми же концами и с параметризацией ω на $[0, 1]$, что $|\omega(t) - \omega_0(t)| < \varepsilon \ll c$ при всех $t \in [0, 1]$, то

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \int_{\Gamma_0} f(x) dx$$

для каждой функции $f \in G(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО мы опустим, поскольку фактически достаточно повторить классическое.

Лемма 2 имеет серию стандартных следствий, часть из которых мы перечислим (мы не будем делать никаких шрифтовых выделений в текстах следствий, так как эти следствия носят описательный характер).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для функций Гурса естественно определяется интеграл по каждому непрерывному пути Γ , и это среди прочего позволяет не приговаривать «спрямляемый», когда речь идет об интегралах от таких функций. Определение состоит в следующем. Если ω – параметризация пути Γ , то мы можем рассмотреть последовательность ω_k гладких функций (с теми же значениями на концах), равномерно сходящуюся к ω . Последовательность значений интегралов по аппроксимирующим в этом смысле путям заведомо стабилизируется.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если два пути гомотопны в классе путей с фиксированными концами, то интегралы совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 3. В «лемме Гурса» стандартный треугольник можно заменить сингулярным (т.е. непрерывным отображением стандартного). Поэтому интеграл будет равен 0 по каждой сингулярной цепи, гомологичной нулю. Этот факт можно рассматривать как предварительную форму теоремы Коши об интеграле по границе.

ТЕОРЕМА 1. Дифференцируемая в области V функция $f: V \rightarrow \mathbb{L}$ тогда и только тогда является функцией Гурса, когда в V выполняется условие симметрии: билинейная форма f'_x симметрична, т.е.

$$((f'_x)a)b = ((f'_x)b)a \quad \text{при любых } a, b \in X. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы покажем, что $f \in G(V)$, если f – дифференцируемая функция с симметричной производной. Рассуждение очень близко к классическому, но необходимы и дополнительные элементы.

Мы можем считать, что V – шар $\{x \in X \mid |x| < 1\}$. Рассмотрим обычный треугольник Δ_0 с вершинами $a_0, b_0, c_0 \in V$, и пусть Γ_0 – его обычная (ориентированная) граница. Будем говорить, что Δ_0 и Γ_0 – объекты ранга 0. Объекты ранга 1 получаются (как обычно) путем проведения средних линий, и т.д. На каждом следующем шаге возникает 4 новых объектов каждого вида, в частности, 4 новых треугольных цепи из $C_1(V, \mathbb{R})$. Ясно, что для каждой из четырех цепей ранга n имеем $l(\Gamma) = l(\Gamma_0)/2^n$.

Пусть $\lambda = \int_{\Gamma_0} f(x) dx$. Тогда

$$\left| \int_{\Gamma_n} f(x) dx \right| \geq \frac{\lambda}{4^n}$$

хотя бы для одной цепи Γ_n ранга n , и далее Γ_n будет обозначать именно такую цепь. Заметим, что соответствующие треугольники составляют «вложенную систему» компактов убывающих к 0 размерам. Поэтому они имеют в точности одну общую точку, и мы будем считать, что такой точкой служит 0 (это, как обычно, достигается согласованным сдвигом области и отображения).

Имеем $f(x) = f'_0 x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Линейное по x отображение из X в $\mathbb{L}$ симметрично в силу формулы (5). Поэтому, как мы уже знаем, оно принадлежит классу Гурса. В частности, мы можем заменить $f(x)$ на $f(x) - f_0 x$. Новую функцию обозначаем по-прежнему. Теперь мы имеем $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Далее снова достаточно повторить классическую схему. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда при больших значениях n имеем

$$\left| \int_{\Gamma_n} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\Gamma_n} \varepsilon |x| dx \right| \leq C \varepsilon (l(\Gamma_n))^2 = \frac{C \varepsilon l_0^2}{4^n},$$

где $l_0 \stackrel{\text{def}}{=} l(\Gamma_0)$ (C – общая константа), так что $\lambda \leq C \varepsilon l_0^2$, и доказательство достаточности закончено.

Обратное утверждение устанавливается в некотором смысле аналогично, в частности, мы используем обозначения Γ_n из первой части доказательства, однако фиксируем x и поэтому иначе обозначаем «независимую переменную».

Снова будем считать, что V – шар $\{x \in X \mid |x| < 1\}$. Покажем, что билинейная форма f'_x симметрична при каждом $x \in V$. Фиксируем x . Нам достаточно убедиться, что *линейная форма* $u \rightarrow f'_x u$ принадлежит классу Гурса: мы уже знаем, что это эквивалентно симметрии для таких форм, и это влечет за собой все, что требуется.

Положим теперь $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f'_x(u) du$. Если $l(\Gamma) = l_0$, то снова $l(\Gamma_n) = l_0/2^n$ и

$$\left| \int_{\Gamma_n} f'_x(u) du \right| \geq \frac{\lambda}{4^n}.$$

Можно считать, что 0 – общая точка всех Δ_n и что $f(0) = 0$. Тогда

$$f(u) - f'_x(u) = o(u) \quad \text{при } u \rightarrow 0. \quad (6)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как f принадлежит классу Гурса, из приведенной выше оценки интеграла вытекает, что при больших n имеем

$$\frac{\lambda}{4^n} \leq \left| \int_{\Gamma_n} f'_x(u) du \right| \leq \frac{C\varepsilon(l_0)^2}{4^n},$$

(где снова C – общая константа), так что $\lambda = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ни свойство Гурса, ни условие (6), вообще говоря, не приводят ни к какой дополнительной гладкости. Условия (5) можно переписать иначе. При $0 \neq \xi, \eta \in X$ положим

$$\partial_\xi f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(x + t\xi)|_{t=0},$$

если предел существует.

Для дифференцируемых f будет $\partial_\xi f(x) = f_x(\xi)$. Поэтому условия (5) можно переписать в виде

$$(\partial_\xi f(x))\eta = (\partial_\eta f(x))\xi,$$

и это напоминает условия Коши – Римана, однако по существу не имеет к ним отношения.

Пусть $F = F(V, X)$ – совокупность всех непрерывно дифференцируемых отображений из V в X . Положим $F' \stackrel{\text{def}}{=} \{f'_x \mid f \in F\}$. Тогда $F' \subset G$, и мы хотим составить представление о связи G/F' с топологическими характеристиками области V . Существует несколько способов это сделать, мы выбираем самый формальный (зато самый короткий) путь. В том, что касается когомологий с коэффициентами в пучках, мы следуем [5] и [6].

По лемме 1 имеем $G = F'$, если V – выпуклая область. Отсюда вытекает следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\check{F}$ – пучок ростков непрерывно дифференцируемых отображений из V в X и $\check{G}$ – пучок ростков отображений Гурса из V в $\mathbb{L}$. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow X \rightarrow \check{F} \xrightarrow{D} \check{G} \rightarrow 0, \quad (7)$$

где X – пучок констант, а D – оператор дифференцирования.

В соответствии с топологическими правилами последовательность (7) приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow X \rightarrow F \xrightarrow{D} G \xrightarrow{\beta} H^1(V, X) \rightarrow H^1(V, \check{F}) \rightarrow \dots \quad (8)$$

(β – гомоморфизм Бокштейна), которая влечет за собой два очевидных следствия.

ТЕОРЕМА 2. Если $H^1(V, X) = 0$, то

$$G(V) = F'(V). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. Если $H^1(V, \check{F}) = 0$, то имеет место изоморфизм

$$G(V)/F'(V) = H^1(V, X). \quad (10)$$

Заключение теоремы 3 имеет смысл обсудить.

При $\Lambda = \mathbb{R}$ пучок $\check{F}$ тонкий, если X – сепарабельное гильбертово пространство (в частности, это так, если $\dim X < \infty$). При $\Lambda = \mathbb{C}$ пучок $\check{F}$ тонким не будет, однако условие теоремы 3 выполняется, если $\dim X < \infty$ и V – область голоморфности (теорема А. Картана). Во всех этих случаях изоморфизм (10) имеет место. Последний случай укладывается в следующую общую схему.

Пусть $X = \mathbb{C}^n$, где n – натуральное число, и $V \subset \mathbb{C}^n$. Пусть $\tilde{V}$ – оболочка голоморфности области V . Тогда $\tilde{V}$ – (связное) многообразие Штейна (риманова область), в котором V содержится в качестве открытого подмногообразия, причем каждая голоморфная функция однозначно продолжается с V на $\tilde{V}$. Поэтому, так как $\tilde{V}$ – многообразие Штейна, имеет место изоморфизм вида (8), где, однако, справа V следует заменить на $\tilde{V}$.

Следующий пример показывает, что такая замена, вообще говоря, обязательна: топологически $\tilde{V}$ может быть устроено существенно проще, чем V .

ПРИМЕР. Пусть $0 < r_0 < r_1 < 1$ и $\varepsilon > 0$, причем $\varepsilon < \min\{1 - r_1, r_0\}$. Обозначим через U стандартный единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Пусть V_0 – область, целиком расположенная в $r_0 U$, причем точка с координатами $(-r_0, 0, 0, \dots, 0)$ принадлежит границе этой области. Обозначим ε -окрестность отрезка

$$x_1 \in [-r_1, -r_0], \quad x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

через V_1 . Ясно, что топологические характеристики области $V_0 \cup V_1$ в зависимости от ε могут меняться в очень широких пределах. Пусть V_2 – шаровой слой $\{x \in X \mid r_1 < |x| < 1\}$, из которого удален интервал

$$x_1 \in (r_1, 1), \quad x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0.$$

Положим $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$. Легко убедиться, что область V гомотопически эквивалентна области $V_0 \cup V_1$. Далее, из весьма общих топологических и аналитических соображений вытекает, что при $n \geq 3$ оболочкой голоморфности области V будет служить шар U .

5. Класс Гурса (вещественные банаховы алгебры). Теперь мы будем считать, что X – вещественная банахова алгебра и что $V \subset X$. Каждому элементу $a \in X$ сопоставляются операторы L_a и R_a левого и правого регулярного представления,

$$L_a: x \rightarrow a \cdot x, \quad R_a: x \rightarrow x \cdot a, \quad x \in X.$$

Если V – область в X и $f: V \rightarrow X$ – непрерывная функция, то для каждого (спрямого) пути $\Gamma \subset V$ мы полагаем

$$\int_{\Gamma} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} L_f x dx$$

(левый интеграл). Аналогично определяется правый интеграл.

Левый класс Гурса G_l составляют те f , для которых $L_f(X) \in G$ при всех $x \in X$, и аналогично определяется *правый класс Гурса* G_r .

В основном мы будем говорить о левом классе Гурса. В этом случае мы отождествляем L_f с f и $(L_f)'_x$ с $f'(x)$, разумеется, пока одновременно не появятся операторы умножения справа. Конечно, общие свойства этих классов неразличимы.

Однако левый и правый классы Гурса для фиксированной алгебры X , вообще говоря, не совпадают.

Из определения кажется, что многие свойства класса G_l только графически отличаются от свойств класса G , но это не совсем так. Поэтому мы применяем смешанную стратегию.

Заметим, что следствия леммы 2 дословно сохраняются. Ряд свойств приобретет дополнительную окраску, в частности, потому, что теперь (говоря неформально) $f'_x \in X$.

Как обычно, $[a, b] = ab - ba$. Выше мы применяли такое же обозначение для простейшего пути, оба обозначения стандартные, и из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

Следующая теорема вытекает из теоремы 1. Напомним, что $f(x)$ – оператор умножения слева. В теореме в виде исключения сначала не предполагается наличие единицы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f: V \rightarrow X$ – дифференцируемое отображение. Если X – алгебра без единицы, то $f \in G_l(V)$ в том и только в том случае, когда

$$f'_x \cdot [a, b] = 0 \quad \text{для всех } x \in V \text{ и всех } a, b \in X.$$

Если X – алгебра с единицей, то последнее условие выполняется автоматически.

Заметим, что если алгебра X не коммутативна, то из условия (10), вообще говоря, не вытекает условие типа (9), даже если $V = X$ и f – линейная функция. С другой стороны, из условия (9) вытекает, что $f' \in G_l(V)$.

Будем называть алгебру X квазикоммутативной слева, если

$$c \cdot [a, b] = 0 \quad \text{для любых } a, b, c \in X.$$

Очевидно, что квазикоммутативность слева имеет место, если алгебра коммутативна. В соответствии с этим можно (по крайней мере, формально) усилить последнюю теорему. Заметим еще, что в случае алгебр X квазикоммутативность эквивалентна принадлежности к классу Гурса каждой из функций $x \rightarrow cx$ при всех $c \in X$.

Аналогично обстоит дело с квазикоммутативностью справа¹.

Приведем несколько простых конечномерных примеров.

Над полем $\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма существует три двумерных алгебры с единицей. Все эти алгебры коммутативны и реализуются матрицами 2-го порядка над $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Так как алгебры коммутативны, то дифференцируемые отображения областей, по теореме 4, принадлежат левому классу Гурса. В частности (что не удивительно), теорема 4 включает классическую лемму Гурса.

Подобные алгебры представляют некоторый интерес для общей теории коммутативных алгебр.

¹Я не знаю, как связана квазикоммутативность с классическими понятиями.

В размерности 3 и выше, как известно, возникают не коммутативные алгебры. Простейшая из них – алгебра X верхних треугольных матриц,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

В этом случае коммутаторы в X скалярно пропорциональны матрице

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $V = X$. Мы можем естественно отождествить X с $\mathbb{R}^3$ в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 и рассмотреть матрицу – функцию

$$\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что тогда δ – дифференцируемая функция, причем

$$\delta'_x \epsilon = 0, \quad \text{тогда как} \quad \epsilon \delta'_x \neq 0.$$

Поэтому δ принадлежит левому классу Гурса, а правому – нет.

6. Класс Гурса (комплексные банаховы алгебры). Почти все из сказанного выше сохраняется при замене $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, причем, как мы отмечали во введении, многое упрощается. Теперь X считается не только комплексной, но и коммутативной банаховой алгеброй с единицей Π . Мы не будем повторяться.

Производная Фреше считается оператором умножения и, стало быть, $\mathbb{C}$ -линейна. Грубо говоря, *класс Гурса в этом случае совпадает с классом $\mathbb{C}$ -аналитических функций с некоторыми дополнительными свойствами (класс Лорха).*

Пусть f – функция рассматриваемого класса в диске $\{x \in X \mid |x| < R\}$. Положим

$$g(\lambda) = f(\lambda \cdot \Pi),$$

где λ – комплексное переменное. Тогда g является аналитической функцией в числовом диске $|\lambda| < R$ со значениями в X . Поэтому

$$g(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots, \quad (11)$$

в этом диске, причем в каждом диске $0 \leq |\lambda| \leq r < R$ ряд справа в (11) сходится равномерно. Разумеется, $a_k \in X$.

Следовательно, $|a_k| r^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что функция

$$\tilde{g}(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad z \in X,$$

является $\mathbb{C}$ -аналитической при $|z| < R$ и ограниченной в каждом (замкнутом) меньшем диске. Легко видеть, что

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

По теоремам единственности $g = f$ во всем диске $|z| < R$ (ср. с [1; с. 776]).

Через $\mathbf{L}(X)$ будем обозначать класс Лорха во всем X (обычно опуская аргумент X). Пусть $S = \text{Spec}(X)$ – пространство максимальных идеалов алгебры X .

Уравнения вида $f(z) = 0$, где $f \in \mathbf{L}$ и z – искомый элемент из X , естественно расширяют класс алгебраических уравнений, которым отвечают полиномы f . Обозначим через $\hat{x}$ преобразование Гельфанда элемента $x \in X$. Если S отождествить с множеством линейных мультипликативных функционалов, то, по определению, $\hat{x}(s) = s(x)$. Положим

$$\hat{f}(\lambda, s) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \lambda + \hat{a}_2 \lambda^2 + \dots,$$

где λ – независимая (комплексная) переменная.

Уравнение $f(z) = 0$ будем называть *уравнением с простым спектром*, если при каждом $s_0 \in S$ все нули целой функции $\hat{f}(\lambda, s_0)$ простые. Для полиномов f со старшим коэффициентом 1 это равносильно тому, что $d(s) \neq 0$ при каждом $s \in S$, где d – дискриминант полинома.

Для таких полиномов довольно полная теория предъявлена в [7].

Для полиномов с простым спектром имеются критерии полной приводимости. Например, если S – конечный клеточный комплекс, q – такой полином и $\deg(q) = n$, то критерием служит тривиальность гомоморфизмов $\pi_1(S, s_0) \rightarrow B(n)$, где $B(n)$ – группа кос Зарисского–Артина. В предположении, что S – связная компактная группа, условие упрощается до делимости на $n!$ в группе $H^1(S, \mathbb{Z})$. В частности, в силу теоремы Бора (см., например, [8] или [9]), полином $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots$ с почти периодическими коэффициентами на $\mathbb{R}^k$ (и многих других абелевых группах) q представляется в виде произведения n различных полиномов 1-й степени.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда $f(z) = f_0(z) + q(z)$, где f_0 – целая трансцендентная функция (с числовыми коэффициентами) экспоненциального порядка $\varrho < 1/2$, а q – полином (с коэффициентами из алгебры).

Для ясности будем считать, что алгебра X полупростая (это не снижает общности), т.е. $X = \hat{X}$. Пусть $S = \text{Spec}(X)$ – пространство максимальных идеалов алгебры X . Заметим, что при перемещении s по компакту S , по условию, коэффициенты функции f_0 (т.е. «главного члена») не меняются, тогда как коэффициенты дополнительного члена q суть непрерывные функции от s и, вообще говоря, меняются.

Вместе с тем, по теореме Вимана (см., например, [10; с. 98]), найдется такая последовательность $0 < r_1 < r_2 < \dots \rightarrow \infty$, что на окружностях $\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r_m$ и при каждом s функция $\hat{f}(\lambda, s)$ будет «гораздо больше» нуля по модулю.

Предположим, что S – линейно связное пространство. Фиксируем точку $s_0 \in S$ и рассмотрим группу Галуа «полинома» $f_0(\lambda) + q(\lambda, s)$. Так как нули никакой такой функции при достаточно больших m не попадают на окружности радиуса r_m с центром в точке 0, то группа Галуа будет подгруппой возрастающей фильтрации конечных групп. В частности, если $f(0) = 1$ и в $C(S)$ приводимы все полиномы с коэффициентами из $C(S)$, то

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (\mathbb{I} - a_k z),$$

где $|a_k|$ быстро убывают.

В заключение мы хотим отметить, что все это применимо к алгебре Бора почти периодических функций на прямой. В этой алгебре уравнение $\cos \sqrt{z} = a$ при простом спектре может не иметь решений, тогда как функция $\cos \sqrt[4]{z} + \text{ch} \sqrt[4]{z} - a$ при

подходящих a имеет указанное выше разложение в бесконечное произведение. Алгебраический случай в свое время исследовали Бор и Фландерс.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [2] Н. Бурбаки, *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов*, Мир, М., 1975.
- [3] Е. А. Горин, К. Санчес Фернандес, “О трансцендентных уравнениях в коммутативных банаховых алгебрах”, *Функц. анализ и его прил.*, **11:1** (1977), 63–64.
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.
- [5] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
- [6] Г. Грауэрт, Р. Реммерт, *Теория пространств Штейна*, Наука, М., 1989.
- [7] Е. А. Горин, В. Я. Лин, “Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос”, *Матем. сб.*, **78:4** (1969), 579–610.
- [8] Е. А. Горин, “Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора–ван Кампена”, *Матем. сб.*, **82:2** (1970), 260–272.
- [9] J. L. Taylor, *Measure Algebras*, Reg. Conf. Ser. in Math., **16**, Amer. Math. Soc., Providens, RI, 1973.
- [10] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

Е. А. Горин

E-mail: evgeny.gorin2012@gmail.com

Поступило

26.02.2014