Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов, О равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с “лакунарными последовательностями частичных сумм”, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 186–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:19:44

О равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье с “лакунарными последовательностями частичных сумм”

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов

В работе исследуется вопрос о равносходимости на $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$ разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$, в случае, когда “частичные суммы” указанных разложений, т.е. $S_n(x; f)$ и $J_\alpha(x; g)$ соответственно, имеют “номера” $n \in \mathbb{Z}^N$ и $\alpha \in \mathbb{R}^N$ ($n_j = [\alpha_j]$, $j = 1, \dots, N$, $[t]$ – целая часть $t \in \mathbb{R}^1$), в которых $N - 1$ компонента является элементом “лакунарной последовательности”.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10503

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим

$$(nx) = n_1x_1 + \dots + n_Nx_N, \quad |x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}.$$

Введем множество

$$\mathbb{R}_0^N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq 0, j = 1, \dots, N\},$$

и множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами. Положим $\mathbb{Z}_0^N = \mathbb{R}_0^N \cap \mathbb{Z}^N$.

Пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, где

$$\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, N\},$$

разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}$.

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \dots \sum_{|k_N| \leq n_N} c_k e^{i(kx)}, \quad (1)$$

частным случаем которой является кубическая частичная сумма, когда $n_1 = \dots = n_N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417).

Пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ разложена в кратный интеграл Фурье:

$$g(x) \sim \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi.$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ рассмотрим собственный интеграл Фурье

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dots \int_{-\alpha_N}^{\alpha_N} \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi_1 \dots d\xi_N. \quad (2)$$

Частным случаем “прямоугольной частичной суммы” (2) является “кубическая частичная сумма”, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_N$.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$. Обозначим через $R_\alpha(x; f, g)$ следующую разность:

$$R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g), \quad (3)$$

и символом $R_\alpha(x; f)$ – разность

$$R_\alpha(x; f) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g), \quad \text{если } g(x) = 0 \text{ вне } \mathbb{T}^N, \quad (4)$$

где $n = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_0^N$, $[\alpha_j]$ – целая часть $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$.¹

Основной целью нашего исследования является изучение поведения разностей (3) и (4) при $\alpha \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} \alpha_j \rightarrow \infty$) в зависимости от условий, накладываемых на функции $f(x)$ и $g(x)$, а также от ограничений на компоненты $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ вектора α – “номера” разности $R_\alpha(x; f)$.

2. В случае $N = 1$ для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^1)$ на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$, разность $R_\alpha(x; f, g)$ равномерно стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$ (см. [1; с. 362–364]). То есть в одномерном случае имеет место равномерная равносходимость разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье.

В работе [2] Блошанский доказал, что для $N = 2$ и $p > 1$ $R_\alpha(x; f, g) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$; более того,

$$\left\| \sup_{\alpha_1, \alpha_2 > 0} |R_{\alpha_1, \alpha_2}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, \quad (5)$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g . Таким образом, при $N = 2$ в классах L_p , $p > 1$, имеет место равносходимость п.в. разложений в тригонометрический ряд и интеграл Фурье.

В этой же работе была выяснена существенность вида сходимости $R_\alpha(x; f)$ и условий $N = 2$, $p > 1$. А именно, были построены непрерывные функции $f_1 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ и $f_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N > 2$, такие, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(0; f_1)| = +\infty, \quad \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(x; f_2)| = +\infty \quad \text{всюду внутри } \mathbb{T}^N$$

[2; теорема 7]. В классе же L_1 приведен пример функции f_3 такой, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(x; f_3)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } x \in \mathbb{T}^N, \quad N \geq 2.$$

¹В дальнейшем символом $[t]$ будем обозначать целую часть $t \in \mathbb{R}^1$.

Далее, в работах [3] и [4] Блошанский исследовал равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье при суммировании по кубам. В работе [4] были построены две функции f и g , $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, совпадающие на $\mathbb{T}^N$ и такие, что кратный ряд Фурье функции f неограниченно расходится п.в. на $\mathbb{T}^N$ по некоторым подпоследовательностям, в то время как кратный интеграл Фурье функции g сходится п.в. по тем же подпоследовательностям.

3. Сформулированные выше результаты ставят вопрос о справедливости равносходимости п.в. разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в классах L_p , $p > 1$, при $N \geq 3$, при дополнительных ограничениях на вектор α .

В работе [5] Блошанским и Графовым было введено следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественная последовательность $\{\alpha^{(\lambda)}\}$, $\alpha^{(\lambda)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\lambda = 1, 2, \dots$, называется *лакунарной*, если последовательность натуральных чисел $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} = [\alpha^{(\lambda)}]$, является лакунарной, т.е. $n^{(1)} = 1$ и существует $q > 1$ такое, что $n^{(\lambda+1)}/n^{(\lambda)} \geq q$, $\lambda = 1, 2, \dots$.

В настоящей работе мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\alpha_j^{(\lambda_j)}\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N-1$, – вещественные лакунарные последовательности и

$$R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, \alpha_N} (x; f, g) = S_{n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, n_N} (x; f) - J_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, \alpha_N} (x; g),$$

где $n_j^{(\lambda_j)} = [\alpha_j^{(\lambda_j)}]$, $j = 1, \dots, N-1$, $n_N = [\alpha_N]$.

Тогда для любых функций $g(x)$ и $f(x)$ таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, $p > 1$, и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\lim_{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \alpha_N \rightarrow \infty} R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, \alpha_N} (x; f, g) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathbb{T}^N. \quad (6)$$

Более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \alpha_N > 0} |R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, \alpha_N} (x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \quad (7)$$

где константа $C(p)$ не зависит от функций f и g .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя функцию Фейффермана из работы [6] и слегка уточняя доказательство теоремы 7 из работы Блошанского [2], можно доказать, что результат теоремы 1 не может быть усилен в следующем смысле (см. [5]): если мы оставляем две компоненты вектора n (а значит, вектора α) “свободными” (т.е., в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), то даже в классе $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, равносходимость п.в. рассматриваемых разложений Фурье будет отсутствовать.

4. Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье (1) и собственный интеграл Фурье (2). Можем записать эти выражения соответственно в следующем виде:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(x+u) D_n(u) du, \quad (8)$$

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{R}^N} g(u) \tilde{D}_\alpha(u-x) du = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{R}^N} g(x+u) \tilde{D}_\alpha(u) du, \quad (9)$$

где $D_n(t) = D_{n_1}(t_1) \cdots D_{n_N}(t_N)$, а $\tilde{D}_\alpha(t) = \tilde{D}_{\alpha_1}(t_1) \cdots \tilde{D}_{\alpha_N}(t_N)$; здесь

$$D_{n_j}(t_j) = \frac{\sin(n_j + 1/2)t_j}{2 \sin(t_j/2)}, \quad n_j \in \mathbb{Z}_0^1,$$

– ядро Дирихле, а $\tilde{D}_{\alpha_j}(t_j) = (\sin \alpha_j t_j)/t_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^1$, – упрощенное ядро Дирихле. Положим также

$$D_{n_0}(t_0) = D_0(t_0) = \tilde{D}_{\alpha_0}(t_0) = \tilde{D}_0(t_0) = 1.$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}^1$, $k \geq 3$, и пусть $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, k-1$, – лакунарные последовательности, причем $n_0^{(\lambda_0)} = 0$. Символом $n^{(\lambda, k)}$ обозначим вектор $n^{(\lambda, k)} = (n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}, n_k) \in \mathbb{Z}_0^k$. Для любого m , $0 \leq m \leq k$, и для любой 2π -периодической (по каждому аргументу) функции $f \in L_1(\mathbb{T}^k)$ положим

$$\begin{aligned} & (S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) \\ &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \cdot \prod_{0 \leq j \leq m} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \prod_{m+1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_k \end{aligned} \quad (10)$$

при $0 \leq m \leq k-1$,

$$(S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) = \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \prod_{1 \leq j \leq k-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot D_{n_k}(u_k) du \quad (10')$$

при $m = k$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, $k \geq 3$, $p > 1$, и для любого m , $1 \leq m \leq k$,

$$(S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) = (S^{(m-1)} J^{(k-m+1)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) + I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f), \quad (11)$$

где $I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f) \rightarrow 0$ при $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k \rightarrow \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^k$; более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^k)}. \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $k = 2$ результат леммы 1 доказан в работе [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Фиксируем произвольное m , $1 \leq m \leq k$, $k \geq 3$ (чтобы не загромождать запись, не ограничивая общности, будем считать, что $m \neq k-1, k$) и рассмотрим интеграл $(S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f)$ (10). Имеем

$$\begin{aligned} & (S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) \\ &= (S^{(m-1)} J^{(k-m+1)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) + \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \prod_{0 \leq j \leq m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m) \\ & \quad \times \prod_{m+1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_k \\ &= (S^{(m-1)} J^{(k-m+1)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) + I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f), \end{aligned} \quad (13)$$

²Очевидно, что при $m = k-1$ упрощенные ядра Дирихле $\tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)$ с номерами $j \geq m+1$ отсутствуют.

где функция

$$G_r(t) = D_r(t) - \tilde{D}_r(t) = \varphi(t) \sin rt + \frac{1}{2} \cos rt;$$

в свою очередь, $\varphi(t)$ – 2π -периодическая, непрерывная функция, которая на $[-\pi, \pi]$ определяется так:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} & \text{при } t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Оценим второй интеграл в (13). Имеем

$$\begin{aligned} I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f) &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \prod_{0 \leq j \leq m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m) \\ &\quad \times \prod_{m+1 \leq j \leq k-1} \{D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) - G_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j)\} \{D_{n_k}(u_k) - G_{n_k}(u_k)\} du_1 \dots du_k \\ &= I_{n^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; f) + \sum_{2 \leq j \leq 2(k-m)-1} I_{n^{(\lambda, k)}}^{(j)}(x; f) + I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2(k-m))}(x; f). \end{aligned} \quad (14)$$

При этом мы будем считать, что в первом слагаемом (т.е. $I_{n^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; f)$) в сумме (14) в k -кратном интеграле на местах с номерами $m+1, \dots, k$ “стоят” только ядра Дирихле; в свою очередь, в последнем слагаемом (т.е. $I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2(k-m))}(x; f)$) на этих местах нет ни одного ядра Дирихле. Остальные слагаемые в сумме (14) пронумерованы произвольным образом.³

Оценим каждое слагаемое в сумме (14). Оценим, например, следующий интеграл, обозначив его для определенности $I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; f)$ (остальные интегралы $I_{n^{(\lambda, k)}}^{(j)}(x; f)$, $j = 1, 3, \dots, 2(k-m)$, оцениваются аналогично):

$$\begin{aligned} I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; f) &= -\frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \prod_{0 \leq j \leq m-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot G_{n_m^{(\lambda_m)}}(u_m) \cdot G_{n_{m+1}^{(\lambda_{m+1})}}(u_{m+1}) \\ &\quad \times \prod_{m+2 \leq j \leq k-1} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot D_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_k. \end{aligned}$$

В силу ограниченности функции $G_r(t)$ и 2π -периодичности функции $f(x)$ имеем

$$\begin{aligned} &|I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; f)| \\ &\leq C \int_{\mathbb{T}^2} \left| \frac{1}{\pi^{k-2}} \int_{\mathbb{T}^{k-2}} f(x_1 + u_1, \dots, x_{m-1} + u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, x_{m+2} + u_{m+2}, \dots, x_k + u_k) \right. \\ &\quad \times \prod_{\substack{0 \leq j \leq k-1, \\ j \neq m, m+1}} D_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) D_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_{m-1} du_{m+2} \dots du_k \Big| du_m du_{m+1} \\ &= C \int_{\mathbb{T}^2} |S_{\tilde{n}^{(\lambda, k-2)}}(\tilde{x}^{(k-2)}, f; u_m, u_{m+1})| du_m du_{m+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

³Они отличаются числом и месторасположением функций $G_{n_j^{(\lambda_j)}}$, $m+2 \leq j \leq k$, на местах с номерами $m+2, \dots, k$ в этом же интеграле.

здесь векторы $\tilde{n}^{(\lambda, k-2)}$ и $\tilde{x}^{(k-2)}$ определяются так:

$$\begin{aligned}\tilde{n}^{(\lambda, k-2)} &= (n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{m-1}^{(\lambda_{m-1})}, n_{m+2}^{(\lambda_{m+2})}, \dots, n_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}, n_k), \\ \tilde{x}^{(k-2)} &= (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+2}, \dots, x_k).\end{aligned}$$

Выражение под знаком модуля в (15) для п.в. $(u_m, u_{m+1}) \in \mathbb{T}^2$ можно рассматривать как частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $\tilde{x}^{(k-2)}$. Так как последовательности $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $j = 1, \dots, m-1, m+2, \dots, k-1$, являются лакунарными последовательностями, то для оценки интеграла в (15) можно применить мажорантную оценку Кожимы (см. [7]), т.е. оценку вида

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\varkappa-1}, n_{\varkappa} > 0} |S_{n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{\varkappa-1}^{(\lambda_{\varkappa-1})}, n_{\varkappa}}(x; \phi)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^{\varkappa})} \leq C(p) \cdot \|\phi\|_{L_p(\mathbb{T}^{\varkappa})}, \quad p > 1; \quad (16)$$

здесь функция $\phi \in L_p(\mathbb{T}^{\varkappa})$, $\varkappa \geq 2$, а $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, \varkappa-1$, — лакунарные последовательности.⁴

Используя оценку (16), неравенство Гёльдера, а также оценку (15), получаем следующую оценку для интеграла $I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; f)$:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |I_{n^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^k)}. \quad (17)$$

Принимая во внимание, что остальные интегралы в (14) оцениваются аналогично, можем сделать вывод: оценка (12) доказана. Учитывая, что для бесконечно дифференцируемых функций “остаточный член” $I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f)$ в равенстве (11) стремится к нулю при $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k \rightarrow \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^k$, из мажорантной оценки (12) стандартные рассуждения (см., например, [9; с. 58–59]) дают возможность утверждать, что это же справедливо и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, $k \geq 3$, $p > 1$, и для любого m , $1 \leq m \leq k$. Лемма 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 1. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, $k \geq 3$, $p > 1$, и для любого m , $1 \leq m \leq k$, выполнено равенство

$$(S^{(m)} J^{(k-m)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) = (S^{(0)} J^{(k)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) + I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f; m), \quad (18)$$

где $I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f; m) \rightarrow 0$ при $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k \rightarrow \infty$ п.в. на $\mathbb{T}^k$. Более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |I_{n^{(\lambda, k)}}(x, f; m)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^k)}. \quad (19)$$

Результат следствия получается путем последовательного применения (m раз) результата леммы 1 к интегралу (10) (к интегралу (10')).

5. Схема доказательства теоремы 1 основывается на схеме доказательства теоремы 4 из работы [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 проведем методом математической индукции по N , $N \geq 2$. Для $N = 2$ результат теоремы является частным случаем более общей теоремы 4 из работы Блошанского [2].

⁴Заметим, что при $\varkappa = 2$ оценка (16) получена в работе П. Шёлина [8].

Далее, предположим, что результат теоремы 1 верен для некоторого $N = k - 1$, $k \geq 3$, т.е. если $\{\alpha_j^{(\lambda_j)}\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, k - 2$, – вещественные лакунарные последовательности, $n_j^{(\lambda_j)} = [\alpha_j^{(\lambda_j)}]$, $j = 1, \dots, k - 2$, числа $n_{k-1} = [\alpha_{k-1}]$ и разность

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; f, g) \\ = S_{n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, n_{k-1}}(x; f) - J_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \alpha_2^{(\lambda_2)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; g), \end{aligned}$$

то для любых функций g, f : $g \in L_p(\mathbb{R}^{k-1})$, $f \in L_p(\mathbb{T}^{k-1})$ и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^{k-1}$,

$$\lim_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \alpha_{k-1} \rightarrow \infty} R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; f, g) = 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^{k-1}. \quad (20)$$

Более того,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \alpha_{k-1} > 0} |R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^{k-1})} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{k-1})}. \quad (21)$$

Докажем, что теорема 1 справедлива для $N = k$, т.е. для любых функций g, f таких, что $g \in L_p(\mathbb{R}^k)$, $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$ и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^k$, справедливо неравенство

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}, \alpha_k}(x; f, g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}, \quad (22)$$

где $\{n_j^{(\lambda_j)}\} = \{[\alpha_j^{(\lambda_j)}]\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, k - 1$, – лакунарные последовательности, $n_k = [\alpha_k]$ (заметим, что так же, как и при доказательстве леммы, предел (6) для $N = k$ будет следовать из оценки (22)).

Докажем сначала оценку (22) для функций $f(x)$ и $g(x) = g_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^k$, где

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [-2\pi, 2\pi)^k, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^k \setminus [-2\pi, 2\pi)^k. \end{cases} \quad (23)$$

По аналогии с вектором $n^{(\lambda, k)} \in \mathbb{Z}_0^k$ обозначим $\alpha^{(\lambda, k)} = (\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}, \alpha_k) \in \mathbb{R}_0^k$ и рассмотрим разность

$$R_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; f, g_1) = S_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) - J_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; g_1). \quad (24)$$

Распишем собственный интеграл Фурье $J_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; g_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; g_1) &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} g_1(x+u) \tilde{D}_{\alpha^{(\lambda, k)}}(u) du + \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{T}^k} g_1(x+u) \tilde{D}_{\alpha^{(\lambda, k)}}(u) du \\ &= J_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; g_1) + J_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x; g_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим и оценим следующую разность:

$$R_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; f, g_1) = S_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) - J_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; g_1). \quad (26)$$

Применяя следствие леммы 1 для $S_{n^{(\lambda, k)}}(x; f) = (S^{(k)} J^{(0)})_{n^{(\lambda, k)}}(x; f)$ (см. обозначения (10) и равенство (18)), разность (26) можем расписать следующим образом:

$$R_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; f, g_1) = \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) \tilde{D}_{n^{(\lambda, k)}}(u) du + I_{n^{(\lambda, k)}}^{(0)}(x, f) - J_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(1)}(x; g_1)$$

(здесь интеграл $I_{n^{(\lambda,k)}}^{(0)}(x, f) = I_{n^{(\lambda,k)}}(x, f; k)$ удовлетворяет оценкам (18) и (19)); в силу определения функции $g_1(x)$ (23) правую часть последнего равенства можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} g_1(x+u) \tilde{D}_{n^{(\lambda,k)}}(u) du - J_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1)}(x; g_1) + I_{n^{(\lambda,k)}}^{(0)}(x, f) \\
 &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} g_1(x+u) \prod_{0 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_k \\
 &\quad - \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} g_1(x+u) \prod_{0 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k) du_1 \dots du_k + I_{n^{(\lambda,k)}}^{(0)}(x, f) \\
 &= \tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1)}(x; f, g_1) + I_{n^{(\lambda,k)}}^{(0)}(x; f). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Далее, распишем первый интеграл в разности (27) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1)}(x; f, g_1) \\
 &= \sum_{l=1}^{k-2} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \prod_{0 \leq j \leq l-1} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \prod_{l+1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u) [\tilde{D}_{n_l^{(\lambda_l)}}(u_l) - \tilde{D}_{\alpha_l^{(\lambda_l)}}(u_l)] du_l \right\} du_1 \dots du_{l-1} du_{l+1} \dots du_k \\
 &\quad + \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u) [\tilde{D}_{n_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}}(u_{k-1}) - \tilde{D}_{\alpha_{k-1}^{(\lambda_{k-1})}}(u_{k-1})] du_{k-1} \right\} \\
 &\quad \times \prod_{1 \leq j \leq k-2} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 \dots du_{k-2} du_k \\
 &\quad + \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u) [\tilde{D}_{n_k}(u_k) - \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k)] du_k \right\} \\
 &\quad \times \prod_{1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) du_1 \dots du_{k-1} \\
 &= \sum_{l=1}^k \tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,l)}(x; f, g_1). \tag{28}
 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что при $l = 0$ в (28) отсутствует интеграл вида $(1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \dots du_0$, а (по нашей договоренности) ядро $\tilde{D}_{\alpha_0^{(\lambda_0)}}(u_0) = 1$.

Оценим $\tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,2)}(x; f, g_1)$ (остальные интегралы в (28) оцениваются аналогично). Расписав упрощенные ядра Дирихле и применяя вторую теорему о среднем, интеграл в фигурной скобке $\tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,2)}(x; f, g_1)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u) [\tilde{D}_{n_2^{(\lambda_2)}}(u_2) - \tilde{D}_{\alpha_2^{(\lambda_2)}}(u_2)] du_2 \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x+u) \frac{n_2^{(\lambda_2)} - \alpha_2^{(\lambda_2)}}{n_2^{(\lambda_2)} - \alpha_2^{(\lambda_2)}} \\
 &\quad \times \frac{2 \sin((n_2^{(\lambda_2)} - \alpha_2^{(\lambda_2)})u_2/2)}{u_2} \cdot \cos \frac{(n_2^{(\lambda_2)} + \alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2} du_2
 \end{aligned}$$

$$= \frac{n_2^{(\lambda_2)} - \alpha_2^{(\lambda_2)}}{\pi} \cdot \int_{-\delta_1}^{\delta_2} g_1(x+u) \cos \frac{(n_2^{(\lambda_2)} + \alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2} du_2,$$

где $0 < \delta_1, \delta_2 < \pi$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,2)}(x; f, g_1) &= \frac{n_2^{(\lambda_2)} - \alpha_2^{(\lambda_2)}}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \left\{ \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{\mathbb{T}^{k-1}} g_1(x+u) \tilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1) \right. \\ &\quad \times \prod_{3 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 du_3 \dots du_k \Big\} \\ &\quad \times \cos \frac{(n_2^{(\lambda_2)} + \alpha_2^{(\lambda_2)})u_2}{2} du_2. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,2)}(x; f, g_1)| &\leq C \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{\mathbb{T}^{k-1}} g_1(x_1+u_1, u_2, x_3+u_3, \dots, x_k+u_k) \tilde{D}_{\alpha_1^{(\lambda_1)}}(u_1) \right. \\ &\quad \times \prod_{3 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{n_k}(u_k) du_1 du_3 \dots du_k \Big| du_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, воспользуемся индуктивным предположением. Принимая во внимание следующие оценки: мажорантную оценку (21) для разности

$$R_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; f, g), \quad f \in L_p(\mathbb{T}^{k-1}),^5$$

мажорантную оценку Кожимы (16) для частичной суммы $S_{n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, n_{k-1}}(x; f)$:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |S_{n_1^{(\lambda_1)}, \dots, n_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, n_{k-1}}(x; f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^{k-1})} \leq C(p) \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^{k-1})}, \quad p > 1$$

(в обеих оценках $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, k-2$, – лакунарные последовательности), получаем интегральный аналог неравенства Кожимы (для собственного интеграла Фурье (2) при $N = k-1$, $k \geq 3$), т.е. оценку вида

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \alpha_{k-1} > 0} |J_{\alpha_1^{(\lambda_1)}, \alpha_2^{(\lambda_2)}, \dots, \alpha_{k-2}^{(\lambda_{k-2})}, \alpha_{k-1}}(x; g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^{k-1})} \leq C(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{k-1})}, \quad p > 1 \quad (30)$$

(здесь $\{\alpha_j^{(\lambda_j)}\}$, $\alpha_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{R}_0^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, k-2$, – вещественные лакунарные последовательности).⁶

Применим в (29) оценку (30). Используя неравенство Гёльдера, получаем следующую мажорантную оценку для второго слагаемого в сумме (28):

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |\tilde{R}_{\alpha^{(\lambda,k)}}^{(1,2)}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}.$$

⁵Здесь функции f, g : $f \in L_p(\mathbb{T}^{k-1})$, $g \in L_p(\mathbb{R}^{k-1})$ и $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^{k-1}$.

⁶Заметим, что при $k = 3$ оценка (30) является фактически интегральным аналогом неравенства Шёлина.

Учитывая, что остальные слагаемые в сумме (28) оцениваются аналогично, мы получаем следующую оценку для интеграла $\tilde{R}_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x; f, g_1)$:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |\tilde{R}_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}. \quad (31)$$

В свою очередь, учитывая оценку (19) для интеграла $I_{n(\lambda,k)}^{(0)}(x, f) = I_{n(\lambda,k)}(x, f; k)$ (см. следствие для $m = k$) из оценок (31) и (27) мы получаем аналогичную оценку для разности $R_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x; f, g_1)$; точнее,

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, n_k > 0} |R_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x; f, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}. \quad (32)$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 (в случае, когда в качестве функции g рассматривается функция g_1 (23)) нам осталось оценить $J_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x; g_1)$ в (25).

Пусть r, v, l – целые числа, $0 \leq r, l \leq k$, $0 \leq v < k$, и пусть $m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(r, v, l) = \left\{ m \in \mathbb{Z}^k : 0 = m_0 < m_1 < \dots < m_r \leq k, 0 = m_0 < m_{r+1} < \dots < m_{r+v} \leq k, \right. \\ \left. 1 \leq m_{r+v+1} < \dots < m_{r+v+l} \leq k, m_{\mu_1} \neq m_{\mu_2} \text{ при } \mu_1 \neq \mu_2 \right\}, \\ 0 \leq r, l \leq k, \quad 0 \leq v < k, \quad r + v + l = k.$$

Обозначим точки $-\pi$ и π на оси Ox_j соответственно $-a_j$ и a_j , $j = 1, \dots, k$. Распишем интеграл $J_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x; g_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x; g_1) &= \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{T}^k} g_1(x+u) \tilde{D}_{\alpha(\lambda,k)}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ 0 \leq v < k \\ r+v+l=k}} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} \frac{1}{\pi^k} \int_{-\infty}^{-a_{m_1}} \dots \int_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} \dots \int_{-a_{m_{r+v}}}^{a_{m_{r+v}}} \\ &\quad \int_{a_{m_{r+v+1}}}^{+\infty} \dots \int_{a_{m_{r+v+l}}}^{+\infty} g_1(x+u) \tilde{D}_{\alpha(\lambda,k)}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ 0 \leq v < k \\ r+v+l=k}} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r, v, l)}(m; x, g_1). \end{aligned} \quad (33)$$

При этом мы предполагаем, что при $r = 0$ в (33) отсутствуют интегралы вида $\int_{-\infty}^{-a_j}$, $j = 1, \dots, k$, при $v = 0$ – интегралы вида $\int_{-a_j}^{a_j}$, $j = 1, \dots, k$, при $l = 0$ – интегралы вида $\int_{a_j}^{+\infty}$, $j = 1, \dots, k$.

Обозначим через $B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r, v, l)}(x, g_1)$ внутреннюю сумму в (33), т.е.

$$B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r, v, l)}(x, g_1) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r, v, l)}(m; x, g_1). \quad (34)$$

Учитывая (33) и (34), имеем

$$J_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x; g_1) = \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ 0 \leq v < k \\ r+v+l=k}} B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r, v, l)}(x, g_1).$$

Разобьем последнюю сумму на три суммы:

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x; g_1) &= \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ v=0 \\ r+l=k}} B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1) + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ v=1 \\ r+l=k-1}} B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1) + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq k \\ 2 \leq v < k \\ r+v+l=k}} B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1) \\
 &= B_{\alpha(\lambda,k)}^{(0)}(x, g_1) + B_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x, g_1) + B_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x, g_1).
 \end{aligned} \tag{35}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_k > 0} |B_{\alpha(\lambda,k)}^{(0)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}, \quad p > 1,$$

где константа $C(p) = C(p, k)$ не зависит от функции g_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим и оценим $B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1)$ при $v = 0$, $0 \leq r, l \leq k$, $r + l = k$. Имеем

$$B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,0,l)}(x, g_1) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,0,l)} A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,0,l)}(m; x, g_1), \quad 0 \leq r, l \leq k, \quad r + l = k. \tag{36}$$

Фиксируем произвольный вектор $m \in \mathfrak{A}(r, 0, l)$ и рассмотрим $A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,0,l)}(m; x, g_1)$ из суммы (36). В силу определения множества $\mathfrak{A}(r, v, l)$ и суммы (33) можем записать

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,0,l)}(m; x, g_1) &= \frac{1}{\pi^k} \int_{-\infty}^{-a_{m_1}} \cdots \int_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int_{a_{m_{r+1}}}^{+\infty} \cdots \int_{a_{m_{r+l}}}^{+\infty} \\
 &\quad g_1(x + u) \prod_{1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{\alpha_j(\lambda_j)}(u_j) \cdot \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k) du_1 \dots du_k,
 \end{aligned} \tag{37}$$

где $0 \leq r, l \leq k$, $r + l = k$. Так как для любого $\sigma \in \mathbb{R}_0^1$

$$|\tilde{D}_\sigma(t)| \leq |t|^{-1} \quad \text{при} \quad 0 < |t| < +\infty, \tag{38}$$

то из (23), (37) и (38), учитывая неравенство Гёльдера, получаем

$$|A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,0,l)}(m; x, g_1)| \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}.$$

В силу произвольности выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r, 0, l)$ последняя оценка справедлива для каждого слагаемого в сумме (36) при $v = 0$. Тогда, учитывая опять-таки неравенство Гёльдера, мы получаем оценку и для $B_{\alpha(\lambda,k)}^{(0)}(x, g_1)$:

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |B_{\alpha(\lambda,k)}^{(0)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}.$$

Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |B_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}, \quad p > 1,$$

где константа $C(p) = C(p, k)$ не зависит от функции g_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим и оценим $B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1)$ при $v = 1$, $0 \leq r, l \leq k$, $r + l = k - 1$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (34) при $v = 1$, которое для произвольного вектора $m \in \mathfrak{A}(r, 1, l)$ имеет вид

$$A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,1,l)}(m; x, g_1) = \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{-\infty}^{-a_{m_1}} \cdots \int_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} \int_{a_{m_{r+2}}}^{+\infty} \cdots \int_{a_{m_{r+1+l}}}^{+\infty} g_1(x+u) \prod_{1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{n_j(\lambda_j)}(u_j) \cdot \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k) du_1 \dots du_k, \quad (39)$$

где $0 \leq r, l \leq k$, $r + l = k$.

В силу (12) и (38), учитывая неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} & |A_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,1,l)}(m; x, g_1)|^p \\ & \leq C(p, k) \int_{-2\pi}^{2\pi} \cdots \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} g_1(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_k}) \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{D}_{\alpha_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) du_{m_{r+1}} \right|^p du_{m_1} \dots du_{m_r} du_{m_{r+2}} \dots du_{m_k} \\ & = C(p, k) \int_{-2\pi}^{2\pi} \cdots \int_{-2\pi}^{2\pi} |\tilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}}}(x_{m_{r+1}}, g_1; \tilde{u}^{(k-1)})|^p du_{m_1} \dots du_{m_r} du_{m_{r+2}} \dots du_{m_k}. \end{aligned} \quad (40)$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $\tilde{u}^{(k-1)} = (u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_k}) \in [-2\pi, 2\pi]^{k-1}$ можно рассматривать как “главный член” одномерного собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменной $x_{m_{r+1}}$. В свою очередь, для одномерного собственного интеграла Фурье функции $\psi \in L_p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$, справедлив интегральный аналог неравенства Ханта (см. [10], [2; оценка (2.1)]), т.е. оценка вида

$$\left\| \sup_{\alpha > 0} |J_{\alpha}(x, \psi)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \leq C(p, k) \cdot \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^1)}. \quad (41)$$

Применяя оценку (41) в интеграле (40) и учитывая неравенство Гёльдера, определение функции g_1 (23), а также произвольность выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r, 1, l)$, получаем

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |B_{\alpha(\lambda,k)}^{(1)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p, k) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}.$$

Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_k > 0} |B_{\alpha(\lambda,k)}^{(2)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}, \quad p > 1,$$

где константа $C(p) = C(p, k)$ не зависит от функции g_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим и оценим

$$B_{\alpha(\lambda,k)}^{(r,v,l)}(x, g_1) \quad \text{при} \quad 0 \leq r, l \leq k, \quad 2 \leq v < k, \quad r + v + l = k.$$

Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (34) при $2 \leq v < k$, которое для произвольного вектора $m \in \mathfrak{A}(r, v, l)$ имеет вид

$$A_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(r, v, l)}(m; x, g_1) = \frac{1}{\pi^k} \int_{-\infty}^{-a_{m_1}} \cdots \int_{-\infty}^{-a_{m_r}} \int_{-a_{m_{r+1}}}^{a_{m_{r+1}}} \cdots \int_{-a_{m_{r+v}}}^{a_{m_{r+v}}} \int_{a_{m_{r+v+1}}}^{+\infty} \cdots \int_{a_{m_{r+v+l}}}^{+\infty} g_1(x+u) \prod_{1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j) \cdot \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k) du_1 \dots du_k, \quad (42)$$

где $0 \leq r, l \leq k$, $2 \leq v < k$, $r + v + l = k$.

В силу (23), (38), учитывая неравенство Гёльдера, получаем

$$|A_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(r, v, l)}(m; x, g_1)|^p \leq C(p, k) \int_{-2\pi}^{2\pi} \cdots \int_{-2\pi}^{2\pi} |\tilde{J}_{\alpha_{m_{r+1}}^{(\lambda_{m_{r+1}})}, \dots, \alpha_{m_{r+v}}^{(\lambda_{m_{r+v}})}}(\tilde{x}^{(v)}, g_1; \tilde{u}^{(k-v)})|^p \times du_{m_1} \dots du_{m_r} du_{m_{r+v+1}} \dots du_{m_k}. \quad (43)$$

Выражение под знаком модуля для п.в. $\tilde{u}^{(k-v)} = (u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+v+1}}, \dots, u_{m_k}) \in [-2\pi, 2\pi]^{k-v}$ можно рассматривать как “главный член” собственного интеграла Фурье функции $g_1(x)$ по переменным $\tilde{x}^{(v)} = (x_{m_{r+1}}, \dots, x_{m_{r+v}})$. Применяя оценку (30) для этого интеграла, учитывая неравенство Гёльдера, оценки (42) и (23), а также произвольность выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r, v, l)$, получаем

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |B_{\alpha^{(\lambda, k)}}^{(2)}(x, g_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p, k) \cdot \|g_1\|_{L_p([-2\pi, 2\pi]^k)}.$$

Предложение 3 доказано.

Из результатов предложений 1–3 вытекает справедливость теоремы 1 при $N = k$ для функции g_1 .

Теперь докажем теорему при $N = k$ для функции, определенной условием

$$g(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_k) & \text{при } (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{T}^k, \\ 0 & \text{вне } \mathbb{T}^k. \end{cases} \quad (44)$$

Для этого разделим куб $[-2\pi, 2\pi]^k$ на 3^k частей: $[-2\pi, 2\pi]^k = \mathbb{T}^k \cup \bigcup_{i=2}^{3^k} T_i^k$. Параллелепипеды T_i^k , $i = 2, \dots, 3^k$, которые перенумеруем в произвольном порядке, имеют вид

$$T_i^k = \bigotimes_{1 \leq \tau \leq r} [-2\pi, -a_{m_\tau}] \times \bigotimes_{r+1 \leq \tau \leq r+v} [-a_{m_\tau}, a_{m_\tau}] \times \bigotimes_{r+v+1 \leq \tau \leq r+v+l} [a_{m_\tau}, 2\pi],$$

$$m \in \mathfrak{A}(r, v, l), \quad 0 \leq r, \quad l \leq k, \quad 0 \leq v < k, \quad r + v + l = k.^7$$

Определим на этих множествах $3^k - 1$ функций

$$\tilde{g}_i(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_k) & \text{при } (x_1, \dots, x_k) \in T_i^k, \\ 0 & \text{вне } T_i^k, \quad i = 2, \dots, 3^k. \end{cases} \quad (45)$$

⁷При этом мы предполагаем, что при $r = 0$ в этом множестве отсутствуют отрезки вида $[-2\pi, -a_{m_\tau}]$, при $v = 0$ – отрезки вида $[-a_{m_\tau}, a_{m_\tau}]$, при $l = 0$ – отрезки вида $[a_{m_\tau}, 2\pi]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |J_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; \tilde{g}_i)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C(p) \cdot \|g_1\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}, \quad p > 1, \quad (46)$$

$i = 2, \dots, 3^k$, где константа $C(p) = C(p, k)$ не зависит от функции g_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценку (46) для одного из параллелепипедов T_i^k (для остальных параллелепипедов доказательство аналогично). Пусть для определенности это будет множество T_2^k , которое имеет вид $\mathbb{T}^{k-1} \times [\pi, 2\pi]$. В таком случае имеем

$$\begin{aligned} J_{\alpha^{(\lambda)}}(x; \tilde{g}_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_1(u) \prod_{1 \leq j \leq k-1} \tilde{D}_{\alpha_j^{(\lambda_j)}}(u_j - x_j) du_1 \dots du_{k-1} \right\} \\ &\quad \times \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k - x_k) du_k \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \tilde{J}_{\alpha^{(\lambda, k)}}(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k) \tilde{D}_{\alpha_k}(u_k - x_k) du_k, \end{aligned} \quad (47)$$

где в данном случае $\alpha^{(\lambda, k)} = (\alpha_1^{(\lambda_1)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(\lambda_{k-1})})$ и $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{k-1})$.

Пусть

$$J_*(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k) = \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} > 0} |\tilde{J}_{\alpha^{(\lambda, k)}}(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k)|;$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \alpha_k > 0} |J_{\alpha^{(\lambda, k)}}(x; \tilde{g}_1)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)}^p \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^k} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} |J_*(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k)| \frac{du_k}{|u_k - x_k|} \right)^p dx_1 \dots dx_k \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \left(\left\{ \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right\} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} |J_*(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k)| \frac{du_k}{|u_k - x_k|} \right)^p dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Если $x_k \in [-\pi, 0]$, $u_k \in [\pi, 2\pi]$, то $|u_k - x_k| \geq \pi$; тогда для A_1 можно применить оценку (30) и получить оценку (46). Далее, рассмотрим и оценим A_2 . Сделав в A_2 замену переменных $x'_k = \pi - x_k$, получим

$$A_2 = \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} |J_*(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k)| \frac{du_k}{|u_k + x_k - \pi|} \right)^p dx_k \right\} dx_1 \dots dx_{k-1};$$

сделав еще одну замену переменных $u'_k = u_k - \pi$, имеем

$$A_2 = \int_{\mathbb{T}^{k-1}} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |J_*(\tilde{x}; \tilde{g}_1, u_k + \pi)| \frac{du_k}{(u_k + x_k)} \right)^p dx_k \right\} dx_1 \dots dx_{k-1}. \quad (48)$$

Далее, применяя в (48) неравенство Гильберта–Шура–Харди (см. [9; с. 318]) и оценку (30), получим

$$A_2 \leq C(p, k) \cdot \|g_1\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}^p.$$

Предложение 4 доказано.

Из результатов предложений 1–4 следует справедливость теоремы 1 при $N = k$ для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (44).

В силу метода математической индукции получаем, что теорема 1 верна для любого $N \geq 3$ для функции $g(x)$, удовлетворяющей условию

$$g(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_N) & \text{при } (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N, \\ 0 & \text{вне } \mathbb{T}^N. \end{cases}$$

И, наконец, покажем, что результат теоремы 1 справедлив для любой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, удовлетворяющей условию $g(x) = f(x)$ на $\mathbb{T}^N$. Для этого достаточно оценки интегралов, в которых присутствует бесконечный предел (например, интегралы (37), (39), (42)), начинать с применения неравенства Гёльдера. Например, оценка интеграла $A_{\alpha(\lambda, k)}^{(r, 0, l)}(m; x, g_1)$ в предложении 1 (см. оценку (37)) проводится так: учитывая неравенство (38) и используя неравенство Гёльдера, можем записать

$$|A_{\alpha(\lambda, k)}^{(r, 0, l)}(m; x, g_1)|^p \leq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} t^{-q} dt \right\}^{kp/q} \cdot \|g_1\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}^p, \quad q^{-1} + p^{-1} = 1.$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 2, Мир, М., 1965.
- [2] И. Л. Блошанский, “О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье”, *Матем. заметки*, **18:2** (1975), 153–168.
- [3] И. Л. Блошанский, “Равносходимость разложений в кратный ряд и интеграл Фурье при суммировании по квадратам”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40:3** (1976), 685–705.
- [4] И. Л. Блошанский, “Кратный интеграл и кратный ряд Фурье при суммировании по квадратам”, *Сиб. матем. журн.*, **31:1** (1990), 39–52.
- [5] И. Л. Блошанский, Д. А. Графов, “Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае “лакунарной последовательности частичных сумм””, *Докл. РАН*, **450:3** (2013), 260–263.
- [6] С. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77:2** (1971), 191–195.
- [7] М. Kojima, “On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series”, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **22:2** (1977), 163–177.
- [8] Р. Sjölin, “Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series”, *Ark. Mat.*, **9:1** (1971), 65–90.
- [9] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [10] R. A. Hunt, “On the convergence of Fourier series”, *Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill, 1968, 235–255.

И. Л. Блошанский

Московский государственный областной
университет
E-mail: ig.bloshn@gmail.com

Поступило

10.03.2014

Исправленный вариант

04.10.2014

Д. А. Графов

Московский государственный областной
университет
E-mail: grafov.den@yandex.ru