Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Тсегау, Об отсутствии глобальных решений для квазилинейных обратных параболических неравенств с оператором типа p -Лапласа, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 591–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:18:50

Об отсутствии глобальных решений для квазилинейных обратных параболических неравенств с оператором типа p -Лапласа

Б. Б. Тсегая

В статье мы доказываем отсутствие глобальных решений квазилинейного обратного параболического неравенства

$$u_t + \operatorname{div}(|x|^\alpha |u|^\beta |Du|^{p-2} Du) \geq |x|^\gamma |u|^{q-1} u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

с однородным граничным условием Дирихле и ограниченной интегрируемой знакопеременной начальной функцией, где Ω – ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство основано на получении априорных оценок для решений путем алгебраического анализа интегральной формы неравенства с оптимальным выбором пробных функций. Установим условия отсутствия решений, основанные на слабой постановке задачи с пробными функциями вида

$$\phi_{R,\epsilon}(x,t) = (\pm u^\pm(x,t) + \epsilon)^\delta \varphi_R(x,t) \quad \text{при } \epsilon > 0, \quad \delta > 0,$$

где u^+ и u^- являются положительной и отрицательной частями решения u задачи, а φ_R – стандартная срезающая функция, носитель которой зависит от параметра R .

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10505

1. Введение. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим квазилинейную обратную параболическую задачу

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(|x|^\alpha |u|^\beta |Du|^{p-2} Du) \geq |x|^\gamma |u|^{q-1} u, & (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где α, β, γ, p и q – вещественные числа такие, что $1 < p < +\infty$, $q > \max\{1, p + \beta - 1\}$ и $\gamma > (\alpha - p)(q - 1)/(p + \beta - 2)$.

Целью данной работы является установление условий для отсутствия глобального решения этой задачи с знакопеременным начальным данным. Начнем с уже известных результатов для обратных параболических задач и соответствующих прямых параболических задач.

При $p = 2$ и $\alpha = \beta = \gamma = 0$ результаты о глобальном существовании и разрушении решений аналогичных прямых параболических уравнений были получены в работах [1]–[4]. В зависимости от начального данного u_0 было показано, что решение существует глобально, если u_0 мало, а если u_0 велико в некотором подходящем смысле, то соответствующее решение разрушается за конечное время.

Для $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и $u \geq 0$ Галактионов и Васкес [5] доказали отсутствие нетривиальных слабых положительных решений аналогичной прямой параболической задачи при $\max\{1, p - 1\} < q \leq p - 1 + p/N$ (см. также [6], [7]). Полачик и Квиттнер [8] изучили существование и отсутствие неотрицательных ограниченных целых решений (т.е. решений, определенных для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \in \mathbb{R}$) полулинейного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^q, & x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}, \\ u \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Они доказали, что не существует положительных ограниченных целых решений (1.2) в классе радиально-симметричных функций при $1 < q < p_{\text{cr}}$, тогда как при $q \geq p_{\text{cr}}$ такие решения существуют, где p_{cr} – критический показатель Соболева:

$$p_{\text{cr}} = \begin{cases} \frac{N+2}{N-2}, & \text{если } N > 2, \\ +\infty, & \text{если } N = 1, 2. \end{cases}$$

Глобальное существование и разрушение решений обратного параболического уравнения с бигармоническим оператором

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = |u|^{q-1}u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.3)$$

изучали Гаццола, Грюнау [9]. Они доказали, что существует глобальное решение, если $q > 1 + 4/N$, $N \geq 2$ и существует $\alpha > 0$ такое, что

$$|u_0(x)| \leq \frac{\alpha}{1 + |x|^{4/(q-1)}}. \quad (1.4)$$

Кроме того, было показано, что если α достаточно велико и в (1.4) имеет место равенство, то любое положительное решение уравнения (1.3) разрушается за конечное время. Результат для задачи (1.3) может быть легко распространен на общие полулинейные параболические задачи более высокого порядка:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u = |u|^{q-1}u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $q > 1 + 2k/N$. Как и в бигармоническом случае, можно доказать для (1.5) тот же результат, что и для задачи (1.3), с заменой $1 + 4/N$ на $1 + 2k/N$ и $4/(q-1)$ на $2k/(q-1)$ (см. [10]).

Кай, Пан и Син [11] исследовали проблему отсутствия решений для полулинейной параболической системы уравнений высокого порядка с переменной времени в $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u = |v|^q, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \\ v_t + (-\Delta)^k v = |u|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Они доказали, что если две функции $u \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^{N+1})$ и $v \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^{N+1})$ удовлетворяют параболической системе уравнений (1.6), то глобальное решение тривиально (т.е. $u \equiv 0$, $v \equiv 0$) при $k \geq 1$ и $p, q > 1$ таких, что

$$\frac{N}{2k} \leq \max \left\{ \frac{p+1}{pq-1}, \frac{q+1}{pq-1} \right\}.$$

Пусть Ω – открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Для скалярных функций $u(x, t)$ и $f(x, t, u, \nabla u)$ было показано (Зубелевич [12]), что краевая обратная параболическая задача

$$\begin{cases} u_t + \Delta u = f(x, t, u, \nabla u), & x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

имеет решения в $H_0^1(\Omega)$ при условии, что $\sup_{t \geq 0} \|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} < +\infty$. Доказано также, что существует не более одного решения (1.7), если f удовлетворяет условию монотонности, т.е.

$$(f(\cdot, t, u, \nabla u) - f(\cdot, t, v, \nabla v), u - v)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{для всех } u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ и } t \geq 0.$$

В настоящей работе глобальная (при $t > 0$) разрешимость обратной параболической задачи (1.1) в классе знакопеременных функций представляет особый интерес. Применяя метод пробных функций [6], мы получим условия отсутствия глобальных решений для этой задачи с ограниченным, интегрируемым и знакопеременным начальным условием.

Работа организована следующим образом. В п. 2 мы определим слабые решения уравнений (1.1), установим некоторые оценки и введем пробные функции для последующего использования. Пункт 3 посвящен исследованию отсутствия результатов задачи (1.1). Подробные формулировки основных результатов и их доказательства содержатся в этом пункте.

2. Предварительные оценки. В этом пункте мы вводим самоподобные пробные функции и установим некоторые оценки, которые будут играть важную роль в следующем пункте.

Прежде всего построим пробную функцию на $\Omega \times [0, +\infty)$. На протяжении всей работы можно считать, что Ω является ограниченной открытой областью в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Более того, всюду в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от R , x , t и u , символами C_i , $i = 1, 2, \dots$.

Пусть $\theta > 0$ и $R > 0$. Значение параметра θ будет указано ниже. При достаточно больших $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ выберем срезающую функцию φ_R , определенную по формуле

$$\varphi_R(x, t) = \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R} \right) \eta^{\lambda_2} \left(\frac{t}{R^\theta} \right), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.1)$$

где $\xi, \eta \in C_0^\infty([0, +\infty); [0, 1])$ – две гладкие функции такие, что $0 \leq \xi(s) \leq 1$, $-C_1 \leq \xi'(s) \leq 0$ и

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad (2.2)$$

$0 \leq \eta(\tau) \leq 1$, $-C_1 \leq \eta'(\tau) \leq 0$ и

$$\eta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1, \\ 0, & \text{если } \tau \geq 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отметим, что параметр R выбран так, что $\{(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty) : |x| \leq 2R, t \leq 2R^\theta\}$ полностью лежит в $\Omega \times [0, +\infty)$.

Непосредственным вычислением с $r = |x|$ мы получим

$$\left| \frac{d\xi(r/R)}{dr} \right| \leq \frac{C_1}{R}, \quad \left| \frac{d\eta(t/R^\theta)}{dt} \right| \leq \frac{C_1}{R^\theta}.$$

Для любых вещественных чисел $\nu_1 > 1$ и $\nu_2 > 1$ легко видеть, что

$$|D\varphi_R|^{\nu_1} \varphi_R^{1-\nu_1} \leq C_2(\lambda_1, \nu_1) R^{-\nu_1} \quad \text{при } \lambda_1 > \nu_1, \quad (2.4)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right|^{\nu_2} \varphi_R^{1-\nu_2} \leq C_3(\lambda_2, \nu_2) R^{-\theta \nu_2} \quad \text{при } \lambda_2 > \nu_2. \quad (2.5)$$

Поскольку $\xi \equiv 1$ при $r \leq R$ и $\eta \equiv 1$ при $t \leq R^\theta$, мы знаем, что $D\varphi_R(x, t) = 0$ при $r \leq R$ и $(\partial/\partial t)\varphi_R(x, t) = 0$ при $t \leq R^\theta$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \text{supp}(\varphi_R) &\subset \{x : |x| \leq 2R\} \times \{t : t \leq 2R^\theta\}, \\ \text{supp}(|D\varphi_R|) &\subset \{x : R \leq |x| \leq 2R\} \times \{t : t \leq 2R^\theta\}, \\ \text{supp}\left(\left|\frac{\partial \varphi_R}{\partial t}\right|\right) &\subset \{x : |x| \leq 2R\} \times \{t : R^\theta \leq t \leq 2R^\theta\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда из (2.4)–(2.6) следует, что

$$\int_0^{2R^\theta} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |D\varphi_R|^{\nu_1} \varphi_R^{1-\nu_1} |x|^{\kappa_1} dx dt \leq C_4(\lambda_1, \nu_1, \kappa_1, N) R^{N+\kappa_1+\theta-\nu_1}, \quad (2.7)$$

$$\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{|x| \leq 2R} \left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right|^{\nu_2} \varphi_R^{1-\nu_2} |x|^{\kappa_2} dx dt \leq C_5(\lambda_2, \nu_2, \kappa_2, N) R^{N+\kappa_2+\theta-\theta \nu_2}, \quad (2.8)$$

где κ_1 и κ_2 – вещественные постоянные.

Предположим, что α, β, γ – вещественные числа и параметры p и q в нашей задаче удовлетворяют соотношению $\gamma > (\alpha - p)(q - 1)/(p + \beta - 2)$ и $q > \max\{1, p + \beta - 1\}$ при $1 < p < +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть функция $u : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega \times [0, +\infty)) \cap L_{\text{loc}}^q(\Omega \times [0, +\infty))$. Функция u называется *слабым решением* задачи (1.1), если

$$|x|^\gamma |u|^q, |x|^\alpha |u|^\beta |Du|^p \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \times [0, +\infty)),$$

т.е. оба элемента принадлежат одному пространству, и для любой неотрицательной функции $\phi \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega \times [0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ с компактным носителем выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_\Omega |x|^\gamma |u|^{q-1} u \phi dx dt \\ &\leq - \int_0^{+\infty} \int_\Omega \left(|x|^\alpha |u|^\beta |Du|^{p-2} (Du, D\phi) + u \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dt - \int_\Omega u_0(x) \phi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Аналогично определим слабые решения соответствующей задачи (1.1) для области $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Предположим, что функция u является нетривиальным слабым решением задачи (1.1) в смысле приведенного выше определения. Для любого такого решения u обозначим его положительную часть как

$$u^+(x, t) := \max\{u(x, t), 0\}$$

и его отрицательную часть – как

$$u^-(x, t) := \min\{u(x, t), 0\}.$$

Далее, введем допустимый класс решений задачи (1.1). При достаточно малом $\delta > 0$ определим

$$\begin{aligned} S_\delta^+(\Omega \times [0, +\infty)) &:= \{u : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, |x|^\gamma(u^+)^{q+\delta}, |x|^\alpha(u^+)^{\beta+\delta-1}|Du^+|^p, \\ &\quad |x|^\alpha(u^+)^{\beta+\delta}|Du^+|^{p-1} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \times [0, +\infty))\}, \\ S_\delta^-(\Omega \times [0, +\infty)) &:= \{u : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, |x|^\gamma(u^-)^{q+\delta}, |x|^\alpha(u^-)^{\beta+\delta-1}|Du^-|^p, \\ &\quad |x|^\alpha(u^-)^{\beta+\delta}|Du^-|^{p-1} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \times [0, +\infty))\}, \end{aligned}$$

где α и γ – вещественные числа и Du понимается в смысле распределений.

Мы также определим пересечение множеств

$$S_\delta(\Omega \times [0, +\infty)) := S_\delta^+(\Omega \times [0, +\infty)) \cap S_\delta^-(\Omega \times [0, +\infty)).$$

Аналогично мы определим

$$S_\delta(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) := S_\delta^+(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \cap S_\delta^-(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)).$$

Наконец, введем множества

$$\begin{aligned} D_+(\Omega) &:= \{(x, t) \in \Omega \times [0, \infty) : u(x, t) > 0\}, & D_{0+}(\Omega) &:= \{x \in \Omega : u_0(x) > 0\}, \\ D_-(\Omega) &:= \{(x, t) \in \Omega \times [0, \infty) : u(x, t) \leq 0\}, & D_{0-}(\Omega) &:= \{x \in \Omega : u_0(x) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить $D_+(\mathbb{R}^N)$, $D_-(\mathbb{R}^N)$, $D_{0+}(\mathbb{R}^N)$ и $D_{0-}(\mathbb{R}^N)$.

3. Результаты об отсутствии решений и их доказательства. В этом пункте мы докажем отсутствие глобальных решений задачи (1.1) при соответствующих предположениях.

Следующая теорема является основным результатом этого пункта об отсутствии решений.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что $q > \max\{1, p + \beta - 1\}$, $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\Omega \times [0, +\infty); \mathbb{R})$. Если для любого достаточно малого $\delta > 0$ существуют константы $c, c', R_0 > 0$ такие, что*

$$\begin{aligned} cR_0^\sigma - \frac{1}{\delta + 1} \|u_0^+\|_{L_{\xi^{\lambda_1}}^{\delta+1}(D_{+0}(\Omega))}^{\delta+1} &\leq 0, & c'R_0^\sigma - \frac{1}{\delta + 1} \|-u_0^-\|_{L_{\xi^{\lambda_1}}^{\delta+1}(D_{-0}(\Omega))}^{\delta+1} &\leq 0, \\ \text{supp}\left(\xi\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\right) &\subset \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где ξ – стандартная срезающая функция, определенная в (2.2), и

$$\sigma := \frac{N(q-p-\beta+1) - (p+\gamma-\alpha)(\delta+1)}{q-p-\beta+1},$$

$$\|\cdot\|_{L_{\xi^{\lambda_1}}^{\delta+1}(D_{\pm 0}(\Omega))} := \left(\int_{D_{\pm 0}(\Omega)} (\cdot)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx \right)^{1/(\delta+1)},$$

то задача (1.1) не имеет глобальных нетривиальных решений в $S_\delta(\Omega \times [0, +\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы предполагаем, что $u \in S_\delta(\Omega \times [0, +\infty))$ – глобальное нетривиальное решение задачи (1.1) в смысле распределений, удовлетворяющее условию теоремы. Возьмем пробную функцию $\varphi_{R_0} \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega \times [0, +\infty); \mathbb{R}_+)$, определенную формулой (2.1), удовлетворяющую (2.2) и (2.3). Предположим, что u^+ не равна тождественно нулю в $\Omega \times [0, +\infty)$. Если $u^+ > 0$, то используем пробную функцию $(u^+)^{\delta} \varphi_R$, иначе положим

$$u_{\epsilon}^+(x, t) := u^+(x, t) + \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

и определим $\phi_{R_0, \epsilon}$ по формуле

$$\phi_{R_0, \epsilon}(x, t) := (u_{\epsilon}^+)^{\delta}(x, t) \varphi_{R_0}(x, t), \quad \delta > 0, \quad R_0 > 0. \quad (3.2)$$

Теперь, умножая неравенство (1.1) на $\phi_{R_0, \epsilon}$ и интегрируя по частям на $\Omega \times [0, +\infty)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} |u|^{q-1} u (u_{\epsilon}^+)^{\delta} \varphi_{R_0} dx dt + \delta \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{\delta-1} |Du^+|^p \varphi_{R_0} dx dt \\ & \leq \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{\delta} |Du^+|^{p-1} |D\varphi_{R_0}| dx dt \\ & \quad + \frac{1}{1+\delta} \iint_{D_+(\Omega)} (u_{\epsilon}^+)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right| dx dt - \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_{0, \epsilon}^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx \\ & \quad + \epsilon^{\delta} \iint_{D_-(\Omega)} (|u_t| \varphi_{R_0} + |x|^{\alpha} |u|^{\beta} |Du|^{p-1} |D\varphi_{R_0}|) dx dt, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $u_{0, \epsilon}^+(x) := u_{\epsilon}^+(x, 0)$.

Применяя неравенство Юнга с параметром $\mu_1 > 0$ к первому интегралу в правой части неравенства (3.3), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{\delta} |Du^+|^{p-1} |D\varphi_{R_0}| dx dt \\ & \leq \mu_1 \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{\delta-1} |Du^+|^p \varphi_{R_0} dx dt \\ & \quad + C_6(\mu_1, p') \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{p+\delta-1} |D\varphi_{R_0}|^p \varphi_{R_0}^{1-p} dx dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $p' = p/(p-1)$.

Теперь выберем μ_1 так, что $\mu_1 < \delta$. Тогда неравенство (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} |u|^{q-1} u (u_{\epsilon}^+)^{\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\
 & \quad + C_7(\delta, \mu_1) \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{\delta-1} |Du^+|^p \varphi_{R_0} dx dt \\
 & \leq C_6(\mu_1, p') \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} |u|^{\beta} (u_{\epsilon}^+)^{p+\delta-1} |D\varphi_{R_0}|^p \varphi_{R_0}^{1-p} dx dt \\
 & \quad + \frac{1}{1+\delta} \iint_{D_+(\Omega)} (u_{\epsilon}^+)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right| dx dt - \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_{0,\epsilon}^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx \\
 & \quad + \epsilon^{\delta} \iint_{D_-(\Omega)} (|u_t| \varphi_{R_0} + |x|^{\alpha} |u|^{\beta} |Du|^{p-1} |D\varphi_{R_0}|) dx dt, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

где $C_7(\delta, \mu_1) = \delta - \mu_1$ и $C_6(\mu_1, p')$ – положительные постоянные.

Далее выберем

$$\epsilon := \epsilon_n = \left(n \iint_{\text{supp}(\varphi_{R_0} + |D\varphi_{R_0}|)} (|u_t| \varphi_{R_0} + |x|^{\alpha} |u|^{\beta} |Du|^{p-1} |D\varphi_{R_0}|) dx dt \right)^{-1/\delta} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 & \epsilon^{\delta} \iint_{D_-(\Omega)} (|u_t| \varphi_{R_0} + |x|^{\alpha} |u|^{\beta} |Du|^{p-1} |D\varphi_{R_0}|) dx dt \\
 & \leq \epsilon^{\delta} \iint_{\text{supp}(\varphi_{R_0} + |D\varphi_{R_0}|)} (|u_t| \varphi_{R_0} + |x|^{\alpha} |u|^{\beta} |Du|^{p-1} |D\varphi_{R_0}|) dx dt \\
 & = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Заметим сначала, что

$$|u|^{q-1} u u^+ = (u^+)^{q+1} \quad \text{при почти всех } x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Принимая во внимание неотрицательность второго интеграла в левой части неравенства (3.5) и применяя теоремы Фату и Лебега при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\
 & \leq C_6(\mu_1, p') \iint_{D_+(\Omega)} |x|^{\alpha} (u^+)^{p+\beta+\delta-1} |D\varphi_{R_0}|^p \varphi_{R_0}^{1-p} dx dt \\
 & \quad + \frac{1}{1+\delta} \iint_{D_+(\Omega)} (u^+)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right| dx dt - \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_0^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

где $|x|^{\gamma} (u^+)^{q+\delta}$, $|x|^{\alpha} (u^+)^{p+\beta+\delta-1}$, $(u^+)^{\delta+1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times [0, +\infty); \mathbb{R})$.

Снова, применяя неравенство Юнга с параметрами $\mu_2, \mu_3 > 0$ к первым двум интегралам в правой части неравенства (3.6), получаем

$$\begin{aligned} & C_6(\mu_1, p') \iint_{D_+(\Omega)} |x|^\alpha (u^+)^{p+\beta+\delta-1} |D\varphi_{R_0}|^p \varphi_{R_0}^{1-p} dx dt \\ & \leq \mu_2 \iint_{D_+(\Omega)} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\ & \quad + C_8(\mu_1, \mu_2, p', r') \iint_{D_+(\Omega) \cap \text{supp}(|D\varphi_{R_0}|)} |x|^{\alpha r' + \gamma(1-r')} |D\varphi_{R_0}|^{pr'} \varphi_{R_0}^{1-pr'} dx dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\delta} \iint_{D_+(\Omega)} (u^+)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right| dx dt \\ & \leq \mu_3 \iint_{D_+(\Omega)} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\ & \quad + C_9(\mu_3, m', \delta) \iint_{D_+(\Omega) \cap \text{supp}(|\partial \varphi_{R_0} / \partial t|)} |x|^{\gamma(1-m')} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right|^{m'} \varphi_{R_0}^{1-m'} dx dt, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{q+\delta}{p+\beta+\delta-1}, & m &= \frac{q+\delta}{\delta+1}, \\ r' &= \frac{r}{r-1} = \frac{q+\delta}{q-p-\beta+1}, & m' &= \frac{m}{m-1} = \frac{q+\delta}{q-1}. \end{aligned}$$

Выбирая μ_2 и μ_3 достаточно малыми и подставляя неравенства (3.7) и (3.8) в (3.6), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_\Omega |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\ & \leq C_8(\mu_1, \mu_2, p', r') \iint_{D_+(\Omega) \cap \text{supp}(|D\varphi_{R_0}|)} |x|^{\alpha r' + \gamma(1-r')} |D\varphi_{R_0}|^{pr'} \varphi_{R_0}^{1-pr'} dx dt \\ & \quad + C_9(\mu_3, m', \delta) \iint_{D_+(\Omega) \cap \text{supp}(|\partial \varphi_{R_0} / \partial t|)} |x|^{\gamma(1-m')} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right|^{m'} \varphi_{R_0}^{1-m'} dx dt \\ & \quad - \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_0^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $C_8(\mu_1, \mu_2, p', r')$ и $C_9(\mu_3, m', \delta)$ – положительные константы, зависящие от $\mu_1, \mu_2, \mu_3, p', r', m'$ и δ .

В силу (2.7) и (2.8) с $\nu_1 = pr', \nu_2 = m', \kappa_1 = \alpha r' + \gamma(1-r')$ и $\kappa_2 = \gamma(1-m')$ можно переписать неравенство (3.9) как

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_\Omega |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \leq C^* (R_0^{N+\alpha r' + \gamma(1-r') + \theta - pr'} + R_0^{N+\gamma(1-m') + \theta - \theta m'}) \\ & \quad - \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_0^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $C^* := \max\{C_4 C_8, C_5 C_9\} > 0$.

Легко видеть, что выражение в скобках в правой части неравенства (3.10) минимально тогда и только тогда, когда оба слагаемых имеют одинаковый показатель, т.е. оптимальное значение θ равно

$$\frac{(p - \alpha)(q - 1) + \gamma(p + \beta - 2)}{q - p - \beta + 1}.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \leq C^* R_0^{\sigma} - \frac{1}{1 + \delta} \int_{D_{0+}(\Omega)} (u_0^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx, \quad (3.11)$$

где

$$\sigma := \frac{N(q - p - \beta + 1) - (p + \gamma - \alpha)(\delta + 1)}{q - p - \beta + 1}.$$

Из условий (3.1) легко видно, что правая часть неравенства (3.11) не является положительной, т.е.

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} (u^+)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \leq 0.$$

Это означает, что $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\Omega \times [0, +\infty)$. Следовательно, $u \leq 0$ почти всюду в $\Omega \times [0, +\infty)$.

С другой стороны, предположим, что u^- не равна тождественно нулю в области $\Omega \times [0, +\infty)$. Умножая (1.1) на пробную функцию

$$\Phi_{R_0, \epsilon}(x, t) := (-u^-(x, t) + \epsilon)^{\delta} \varphi_{R_0}(x, t) \quad (3.12)$$

вместо (3.2) и интегрируя по частям на $\Omega \times [0, +\infty)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} (-u^-)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \\ & \leq C'_6(\mu_1, p') \iint_{D_-(\Omega)} |x|^{\alpha} (-u^-)^{p+\beta+\delta-1} |D\varphi_{R_0}|^p \varphi_{R_0}^{1-p} dx dt \\ & \quad + \frac{1}{1 + \delta} \iint_{D_-(\Omega)} (-u^-)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_{R_0}}{\partial t} \right| dx dt \\ & \quad - \frac{1}{1 + \delta} \int_{D_{0-}(\Omega)} (-u_0^-)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R_0} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $|x|^{\gamma} (-u^-)^{q+\delta}$, $|x|^{\alpha} (-u^-)^{p+\beta+\delta-1}$, $(-u^-)^{\delta+1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times [0, +\infty); \mathbb{R})$.

Аналогично предыдущим рассуждениям из (3.13) получаем

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |x|^{\gamma} (-u^-)^{q+\delta} \varphi_{R_0} dx dt \leq 0,$$

откуда следует $u^- \equiv 0$ почти всюду в $\Omega \times [0, +\infty)$ и, следовательно, $u \geq 0$ почти всюду в $\Omega \times [0, +\infty)$. В результате получаем отсутствие нетривиальных решений задачи (1.1), что противоречит нашему предположению. Это завершает доказательство.

Для $\Omega = \mathbb{R}^N$ получаем задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(|x|^\alpha |u|^\beta |Du|^{p-2} Du) \geq |x|^\gamma |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (3.14)$$

с параметрами $p > 1$, $q > \max\{1, p + \beta - 1\}$ и $\gamma > \max\{\alpha - p, (\alpha - p)(q - 1)/(p + \beta - 2)\}$.

В этом случае легко понять, что соответствующие неравенства (3.3)–(3.9) справедливы и с пробной функцией (3.2) в области $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$. Аналогичные неравенства были получены также с пробной функцией (3.12), определенной в области $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$. Мы применяем аналогичные процедуры, чтобы доказать эти неравенства.

Мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Если*

$$\max\{1, p + \beta - 1\} < q \leq p + \beta - 1 + \frac{(p + \gamma - \alpha)(\delta + 1)}{N}, \quad (3.15)$$

то задача (3.14) не имеет глобальных нетривиальных решений в $S_\delta(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u является глобальным нетривиальным решением задачи (3.14). Возьмем пробную функцию $\varphi_R \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, \infty); \mathbb{R})$, определенную формулой (3.2), для $x \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$. Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3.1, устанавливаем

$$\begin{aligned} & \iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt + C'_7 \iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^\alpha (u^+)^{\beta+\delta-1} |Du^+|^p \varphi_R dx dt \\ & + \frac{1}{1+\delta} \int_{D_{0+}(\mathbb{R}^N)} (u_0^+)^{\delta+1} \xi^{\lambda_1} \left(\frac{|x|}{R} \right) dx \\ & \leq C^{**} (R^{N+\alpha r' + \gamma(1-r') + \theta - pr'} + R^{N+\gamma(1-m') + \theta - \theta m'}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где C'_7 и C^{**} – положительные постоянные, не зависящие от R , x , t , u . Параметры r' и m' определены как в (3.8).

Оптимальное значение $\theta = \theta_0$ определяется из условия “равновесия” на бесконечности ($R \rightarrow \infty$) двух слагаемых в правой части неравенства (3.16) равенства, т.е.

$$\theta_0 = \frac{(p - \alpha)(q - 1) + \gamma(p + \beta - 2)}{q - p - \beta + 1}$$

с $\gamma > \max\{\alpha - p, (\alpha - p)(q - 1)/(p + \beta - 2)\}$. Это означает, что носитель пробной функции φ_R не обращается в нуль.

Теперь, подставляя это значение $\theta = \theta_0$ в (3.16) и сужая область интегрирования в левой части неравенства (3.16) на $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\} \times \{t \in [0, +\infty) : t \leq R^\theta\}$, где $\varphi_R \equiv 1$, в силу (2.2) и (2.3) получаем

$$0 \leq \int_0^{R^\theta} \int_{|x| \leq R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} dx dt \leq C^{**} R^\sigma, \quad (3.17)$$

где параметр σ определен как в (3.1).

Если выполнено строгое неравенство в (3.15), т.е.

$$\max\{1, p + \beta - 1\} < q < p + \beta - 1 + \frac{(p + \gamma - \alpha)(\delta + 1)}{N},$$

то, переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ в (3.17), получаем, что правая часть неравенства (3.17) не является положительной. Следовательно,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} dx dt = 0, \quad (3.18)$$

откуда следует, что $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$. Таким образом, $u \leq 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$.

Если $q = p + \beta - 1 + (p + \gamma - \alpha)(\delta + 1)/N$ (т.е. $\sigma = 0$), то из неравенства (3.17) следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{R^\theta} \int_{|x| \leq R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} dx dt \leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt \\ &\leq C_8 \int_0^{2R^\theta} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |x|^{\alpha r' + \gamma(1-r')} |D\varphi_R|^{pr'} \varphi_R^{1-pr'} dx dt \\ &\quad + C_9 \int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{|x| \leq 2R} |x|^{\gamma(1-m')} \left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right|^{m'} \varphi_R^{1-m'} dx dt \leq c_0 < +\infty. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поскольку u является слабым решением задачи (3.14), из (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt &\leq C_6 \iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^\alpha (u^+)^{p+\beta+\delta-1} |D\varphi_R|^p \varphi_R^{1-p} dx dt \\ &\quad + \frac{1}{1+\delta} \iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} (u^+)^{\delta+1} \left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right| dx dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Применяя неравенство Гёльдера, из (3.20) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt &\leq C_6 \left(\iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt \right)^{1/r} \\ &\quad \times \left(\iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^{\alpha r' + \gamma(1-r')} |D\varphi_R|^{pr'} \varphi_R^{1-pr'} dx dt \right)^{1/r'} \\ &\quad + \frac{1}{1+\delta} \left(\iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt \right)^{1/m} \\ &\quad \times \left(\iint_{D_+(\mathbb{R}^N)} |x|^{\gamma(1-m')} \left| \frac{\partial \varphi_R}{\partial t} \right|^{m'} \varphi_R^{1-m'} dx dt \right)^{1/m'}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где r, r', m и m' определены, как в (3.7) и (3.8).

Теперь, если принять во внимание наш выбор φ_R и (3.19), из (3.21) следует

$$\begin{aligned} \int_0^{2R^\theta} \int_{|x| \leq 2R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt &\leq C_6 (c_0)^{1/r'} \left(\iint_{D_R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt \right)^{1/r} \\ &\quad + \frac{(c_0)^{1/m'}}{1+\delta} \left(\iint_{D_R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt \right)^{1/m}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$D_R := D_+(\mathbb{R}^N) \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) : R \leq |x| \leq 2R, R^\theta \leq t \leq 2R^\theta\}.$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt < +\infty,$$

по общей теории интеграла Лебега, существует последовательность $\{R_k\} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{R_k}} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt = 0. \quad (3.23)$$

Комбинируя предельное соотношение (3.23) с неравенством (3.22), приходим к

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2R^\theta} \int_{|x| \leq 2R} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\gamma (u^+)^{q+\delta} \varphi_R dx dt = 0.$$

Таким образом, $u^+ \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$, т.е. $u \leq 0$.

Аналогично можно легко показать, что $u^- \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ с помощью пробных функций (3.12) вместо (3.2) для $x \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$. Таким образом, $u \equiv 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$. Но это противоречит предположению, что u является нетривиальным решением задачи (3.14). Это противоречие завершает доказательство.

В заключение я хотел бы поблагодарить Евгения Галахова за постановку задачи, руководство и полезное обсуждение результатов работы в ходе подготовки этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Ma, “Blow-up for semilinear parabolic equations with critical Sobolev exponent”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **12**:2 (2013), 1103–1110.
- [2] M. Fila, P. Souplet, “The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains”, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **8**:4 (2001), 473–480.
- [3] F. Gazzola, T. Weth, “Finite time blow-up and global solutions for semilinear parabolic equations with initial data at high energy level”, *Differential Integral Equations*, **18**:9 (2005), 961–990.
- [4] С. И. Похожаев, “Отсутствие глобальных знакопеременных решений нелинейного уравнения теплопроводности”, *Докл. РАН*, **443**:3 (2012), 296–299.
- [5] V. Galaktionov, J. L. Vazquez, “Extinction for a quasilinear heat equation with absorption. I. Technique of intersection comparison”, *Comm. Partial Differential Equations*, **19**:7-8 (1994), 1075–1106.

- [6] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [7] G. Wei, Z. Chen, “Nonexistence of global positive solutions for quasi-linear parabolic inequalities”, *J. Univ. Sci. Technol. China*, **34**:3 (2004), 273–282.
- [8] P. Poláčik, P. Quittner, “A Liouville-type theorem and the decay of radial solutions of a semilinear heat equation”, *Nonlinear Anal.*, **64**:8 (2006), 1679–1689.
- [9] F. Gazzola, H.-C. Grunau, “Global solutions for superlinear parabolic equations involving the biharmonic operator for initial data with optimal slow decay”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **30**:3 (2007), 389–415.
- [10] G. Caristi, E. Mitidieri, “Existence and nonexistence of global solutions of higher-order parabolic problem with slow decay initial data”, *J. Math. Anal. Appl.*, **279**:2 (2003), 710–722.
- [11] G. Cai, H. Pan, R. Xing, “A note on parabolic Liouville theorems and blow-up rates for a higher-order semilinear parabolic system”, *Int. J. Differ. Equ.*, **2011** (2011), Art. ID 896427.
- [12] O. Zubelevich, *On Weakly Nonlinear Backward Parabolic Problem*, Mathematical Physics Preprint Archive, №09-28, 2009.

Б. Б. Тсерай

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: Birilewb@yahoo.com

Поступило

02.02.2014