Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кащенко, Динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 85–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:11:34

УДК 517.929

Динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание

С. А. Кащенко

Рассматривается логистическое уравнение с добавлением слагаемого, характеризующего запаздывание. Исследуется локальная и нелокальная динамика этого уравнения. Используются стандартные бифуркационные методы Андронова–Хопфа для уравнений с запаздыванием и разработанный автором асимптотический метод, основанный на построении специальных эволюционных уравнений, которые и определяют локальную динамику уравнений, содержащих запаздывание. Кроме этого, исследуются вопросы существования и построения асимптотики нелокальных релаксационных циклов. Приведено сравнение полученных результатов с результатами для уравнения Хатчинсона и некоторых его обобщений.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10507

1. Постановка задачи. Логистическое уравнение

$$\dot{u} = r[1 - u]u, \quad r > 0, \quad (1.1)$$

обладает простой динамикой. Все решения с положительными начальными условиями стремятся к 1 при $t \rightarrow \infty$. Динамика логистического уравнения с запаздыванием (уравнения Хатчинсона)

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u, \quad r, T > 0, \quad (1.2)$$

существенно богаче. При $rT \leq 37/24$ все решения (1.2) с положительной начальной функцией тоже стремятся к 1 при $t \rightarrow \infty$ [1]. При $\lambda = rT \leq \pi/2$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ асимптотически устойчиво, а при $\lambda = rT > \pi/2$ это уравнение имеет периодическое решение $u_0(t, \lambda)$ [2]. При достаточно малых значениях $\lambda - \pi/2$ и при достаточно больших λ этот цикл устойчив [3]. Отметим еще, что количество неустойчивых периодических решений (1.2) неограниченно растет при $\lambda \rightarrow \infty$ [4].

Здесь будет рассматриваться в некотором смысле “среднее” между (1.1) и (1.2) уравнение

$$\dot{u} = r[1 - au - bu(t - T)]u,$$

где $a, b > 0$ и выполнено условие нормировки $a + b = 1$.

Удобно перейти к обозначениям $a = \alpha$ и $b = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, и произвести замену времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к уравнению

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - 1)]u, \quad \lambda = Tr. \quad (1.3)$$

Начальные функции $\varphi \in C_{[-1,0]}$ для уравнения (1.3) предполагаются неотрицательными. Решения с этими начальными функциями остаются неотрицательными при увеличении t . Как и в [3], [5] можно показать, что все (неотрицательные) решения (1.3) удовлетворяют при достаточно больших t оценке

$$u \leq \min(\alpha^{-1}, \exp(\lambda(1 - \alpha))).$$

У всех уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) нулевое решение неустойчиво. Устойчивость состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ в (1.3) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\mu = -\lambda[\alpha + (1 - \alpha)\exp(-\mu)]. \quad (1.4)$$

Сформулируем два простых утверждения о расположении корней уравнения (1.4).

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 1/2$. Тогда все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha < 1/2$. Тогда все корни (1.4) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \mu \leq \ln \frac{b}{a}.$$

В условии леммы 1 все (положительные) решения (1.3) стремятся к 1 при $t \rightarrow \infty$, а в условиях леммы 2 они ограничены по λ при $\lambda \rightarrow \infty$. Эти утверждения уже указывают на существенные отличия динамических свойств (1.2) и (1.3).

Основные результаты работы составляют содержание разделов 2–4. В первых двух из них исследуется поведение решений (1.3) в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. В разделе 2 рассматривается простейший – “регулярный” случай, основанный на бифуркации Андронова–Хопфа. Важную роль играет расположение корней (1.4). При каждом $\alpha < 1/2$ найдется такое значение $\lambda_0(\alpha) > 0$, что при $\lambda < \lambda_0(\alpha)$ все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а при $\lambda > \lambda_0(\alpha)$ имеются корни с положительной вещественной частью. Будет исследовано поведение решений (1.3) при условии

$$|\lambda - \lambda_0(\alpha)| \ll 1.$$

Отметим, что $\lambda_0(0) = \pi/2$ и $\lambda_0(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 1/2 - 0$. Отличие динамических свойств решений уравнений (1.2) и (1.3) ярче проявляется при условии, когда

$$\epsilon = \lambda^{-1} \ll 1. \quad (1.5)$$

В разделе 3 предполагается, что вместе с условием (1.5) выполнено условие $\alpha = 1/2 - \nu$, где

$$|\nu| \ll 1. \quad (1.6)$$

Исследуется вопрос о локальной – в некоторой достаточно малой (и независимой от ϵ и ν) окрестности состояния равновесия u_0 – динамике решений уравнения (1.3) при условиях (1.5) и (1.6).

Для линеаризованного на u_0 уравнения (1.3)

$$\epsilon \dot{v} = -\frac{1}{2}[v + v(t-1) + \mu(v - v(t-1))] \quad (1.7)$$

характеристический квазиполином представим в виде

$$2\epsilon\mu = -(1 + \exp(-\mu) - \nu(1 - \exp(-\mu))). \quad (1.8)$$

Просто показать, что (1.8) не имеет корней с положительными и отдельными от нуля при $\epsilon, \nu \rightarrow 0$ вещественными частями. Важно, что вещественные части бесконечно многих корней (1.8) стремятся к нулю при $\epsilon, \nu \rightarrow 0$. Тем самым, можно говорить о том, что в задаче об устойчивости состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ реализуется бесконечномерный критический случай. Методики исследования динамических свойств решений в подобных ситуациях разрабатывались в [6]–[10]. Ниже они будут применены к изучению локальной динамики уравнения (1.3). В качестве основных результатов будут построены специальные нелинейные уравнения параболического и вырождено-параболического типов, не содержащие малых параметров. Их нелокальная динамика определяет в главном поведение решений исходного уравнения при малых ϵ и ν .

В следующем разделе рассмотрен “базовый” случай, когда $\nu = \epsilon\epsilon^2$. Как оказывается, соответствующие решения при этом условии формируются, в основном, на невысоких модах (в параболическом уравнении). Поэтому их естественно назвать медленно осциллирующими.

При условии $\nu = \epsilon\epsilon^{2\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$, решения построенных эволюционных уравнений будут содержать быстро осциллирующие по пространственной переменной компоненты.

Наконец, в разделе 4 исследуется нелокальное поведение решений (1.3) при условии (1.5). Обратим внимание, что поведение решений вырожденного при $\epsilon = 0$ уравнения (1.3) не дает информации о поведении решений при $\epsilon \neq 0$. Используется специальный асимптотический метод, разработанный в [3], [4], [11]. С его помощью показано, что при $0 < \alpha < 1/2$ и при достаточно малых ϵ уравнение (1.3) имеет устойчивое релаксационное периодическое решение и для него получены асимптотические формулы. Приведено сравнение с асимптотикой релаксационного цикла для уравнения (1.2) и для логистического уравнения с ограничением и с запаздывающим аргументом

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t-1)]u(A - u), \quad A > 1. \quad (1.9)$$

2. Бифуркация Андронова–Хопфа. Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения (1.3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. Это поведение во многом зависит от расположения корней характеристического квазиполинома (1.4). Их леммы 1 вытекает, что необходимо рассматривать лишь ситуации, когда

$$\alpha < \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Сформулируем одно простое утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено неравенство (2.1). Тогда найдется такое $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$, что при $\lambda < \lambda_0(\alpha)$ все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а при $\lambda > \lambda_0(\alpha)$ у уравнения (1.4) существует корень с положительной вещественной частью.

Отсюда следует, что при $\lambda < \lambda_0$ все решения (1.3) с достаточно близкими к 1 начальными условиями стремятся к единице при $t \rightarrow \infty$, а при $\lambda > \lambda_0$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ неустойчиво и задача перестает быть локальной. Здесь будет рассмотрен “пограничный” случай. Фиксируем значение α_0 так, чтобы $0 < \alpha_0 < 1/2$, и пусть для некоторых постоянных λ_1 и α_1 имеем

$$\lambda = \lambda_0(\alpha_0) + \epsilon\lambda_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \epsilon\lambda_1, \quad (2.2)$$

где ϵ – малый параметр:

$$0 < \epsilon \ll 1. \quad (2.3)$$

При $\epsilon = 0$ уравнение (1.4) имеет пару чисто мнимых корней $\mu_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega > 0$, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. При условиях (2.2), (2.3) имеет место хорошо известная бифуркация Андронова–Хопфа: это означает, что в достаточно малой (и независимой от ϵ) окрестности $u_0 \equiv 1$ уравнение (1.3) имеет локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие (см., например, [12], [13]). На нем это уравнение представимо (при выполнении некоторых условий типа невырожденности) в виде комплексного уравнения первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon a_1 \xi + d|\xi|\xi + O(\epsilon^2 + |\xi|^2). \quad (2.4)$$

После нормализующих замен $\epsilon = \epsilon t$ и $\xi \rightarrow \epsilon^{1/2}\xi$ получаем, что в главном поведении решений (2.4) определяется уравнением – нормальной формой (см., например [14]):

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_1 \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (2.5)$$

Решения уравнения (2.5) связаны с решениями уравнения (1.3) формулой

$$u = 1 + \epsilon^{1/2}(\xi(\tau) \exp(i\omega t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-i\omega t)) + \epsilon u_2(\tau, t) + \epsilon^{3/2} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (2.6)$$

в которой функции $u_j(\tau, t)$ являются $2\pi/\omega$ -периодическими по t . Таким образом, динамические свойства (1.3) в окрестности u_0 определяются в главном поведении решений (2.5), поэтому остается лишь определить коэффициенты a_1 и d . Для этого воспользуемся формальным рядом (2.6). Подставим его в (1.3) и в получившемся формальном тождестве будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ϵ . Так, на втором шаге, собирая коэффициенты при ϵ^1 , определим функцию $u_2(\tau, t)$:

$$u_2(\tau, t) = g\xi^2 \exp(2i\omega t) + \bar{g}\bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega t),$$

где

$$g = \lambda_0(1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-2i\omega)]^{-1}.$$

На третьем шаге собираем коэффициенты при $\epsilon^{3/2}$. Из условий разрешимости получающего уравнения относительно 2π -периодической по t функции $u_3(\tau, t)$ приходим к уравнению (2.5) для неизвестной амплитуды $\xi(\tau)$, в котором

$$\begin{aligned} a_1 &= -[1 - (1 - \alpha_0)\lambda_0 \exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [\lambda_1(1 + (1 - \alpha_0)\exp(-i\omega)) + \lambda_0\alpha_1(1 + \exp(-i\omega))], \\ d &= -\lambda_0^2[1 - \lambda_0(1 - \alpha_0)\exp(-i\omega)]^{-1} \cdot [2\alpha_0 + (1 - \alpha_0)(\exp(i\omega) + \exp(-2i\omega))] \\ &\quad \times [(1 - \alpha_0)i \sin \omega \cdot [2i\omega + \alpha_0\lambda_0 + (1 - \alpha_0)\lambda_0] \exp(-2i\omega)]^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что устойчивость нулевого решения в (2.5) определяется знаком выражения $\operatorname{Re} a_1$, а при условиях $\operatorname{Re} a_1 > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$ это уравнение имеет устойчивые периодические решения

$$\xi_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\varphi_0\tau),$$

где $\rho_0 = [(-\operatorname{Re} a_1)(\operatorname{Re} d)^{-1}]^{1/2}$, $\varphi_0 = \operatorname{Im} a_1 + \rho_0^2 \operatorname{Im} d$.

Сформулируем для примера соответствующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\operatorname{Re} a_1 > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$. Тогда существует такое $\epsilon_0 > 0$, что при всех $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ уравнение (1.3) имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение $u_0(t, \epsilon)$ периода

$$T(\epsilon) = 2\pi\omega^{-1}(1 + \epsilon\varphi\omega^{-1} + o(\epsilon^2))$$

и

$$u_0(t, \epsilon) = 1 + \epsilon^{1/2}\rho_0 \cos[(\omega + \epsilon\varphi_0 + o(\epsilon^2))t] + o(\epsilon).$$

Отметим, что при $\alpha_1 = 0$ и $\lambda_1 > 0$ выполнено условие $\operatorname{Re} a_1 > 0$, а при $\lambda_1 = 0$ и $\alpha_1 > 0$ имеем неравенство $\operatorname{Re} a_1 < 0$. При достаточно малых значениях параметра α_0 параметры в (1.3) близки к параметрам в (1.2), а значит $\omega \sim \pi/2$ и $\operatorname{Re} d < 0$ [3].

Покажем, что количество различных периодических решений уравнения (1.3) неограниченно растет при $\lambda \rightarrow \infty$. Воспользуемся построениями из [4]. Пусть $\alpha_1 = 0$. Сначала заметим, что при изменении параметра ϵ от 0 до ϵ_0 период $T(\epsilon)$ периодического решения $u_0(t, \epsilon)$ изменяется от $2\pi/\omega$ до $2\pi/\omega(1 + \epsilon\varphi_0\omega^{-1} + o(\epsilon^2))$, длина которого близка к $2\pi\omega^{-2}\varphi_0\epsilon_0$. Заметим, что функция $u_0(t, \epsilon)$ одновременно является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t - nT(\epsilon))]u.$$

Проведем нормировочные замены $t \rightarrow (1 + nT(\epsilon))t$ и $u((1 + nT(\epsilon))t) = V(t)$. В результате приходим для функции V к тому же самому уравнению (1.3) с той лишь разницей, что вместо коэффициента λ стоит коэффициент $\lambda_n = \lambda(1 + nT(\epsilon))$. Это уравнение имеет периодическое решение $V_n(t, \epsilon) = u_0((1 + nT(\epsilon))t, \epsilon)$ периода $T_n(\epsilon) = T(\epsilon)(1 + nT(\epsilon))^{-1}$. И оно заведомо существует при всех

$$\lambda \in \{(\lambda_0 + \epsilon\lambda_1)(1 + nT(\epsilon)), 0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при $\lambda \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) количество периодических решений уравнения (1.3) неограниченно растет.

3. Построение квазинормальных форм при больших значениях параметра λ . Здесь продолжено изучение локальной – в малой окрестности $u_0 \equiv 1$ – динамики уравнения (1.3). Основное предположение состоит в том, что выполнено условие

$$\lambda^{-1} = \epsilon \ll 1.$$

В этом случае $\alpha_0 = 1/2$. Как уже отмечалось, в рассматриваемой ситуации вещественные части бесконечно многих корней характеристического уравнения (1.4) стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$. Стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на теории инвариантных многообразий и теории нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимыми. Будут использоваться методики разработанные в [6]–[10]. Сначала остановимся на наиболее простом случае, когда параметр ν имеет по ϵ порядок ϵ^2 , а затем на более сложной ситуации, когда $\nu = \epsilon^{2\gamma}$ и $0 < \gamma < 1$.

3.1. Медленно осциллирующие решения. Положим здесь

$$\nu = c\epsilon^2 \tag{3.1}$$

и выпишем асимптотику (при $\epsilon \rightarrow 0$) тех корней $\lambda_k(\epsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) уравнения (1.4), вещественные части которых стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$. Стандартными методами получим, что

$$\lambda_k(\epsilon) = \lambda_{k_0} + \epsilon \lambda_{k_1} + \epsilon^2 \lambda_{k_2} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{k_0} &= \pi(2k+1)i, \\ \lambda_{k_1} &= -2\pi(2k+1)i, \\ \lambda_{k_2} &= -2\pi^2(2k+1)^2 + 4\pi(2k+1)i - 2c. \end{aligned}$$

Функции $\text{const} \cdot \exp(\lambda_k(\epsilon)t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, являются решениями линейного уравнения (1.7). Их можно записать в виде произведения медленно осциллирующей по времени (т.е. зависящей от $\tau = \epsilon^2 t$) функции на осциллирующую (периодическую) функцию: $\xi(\tau) \exp[i\pi(2k+1)(1-2\epsilon)t]$.

Следуя методике [6]–[10], введем в рассмотрение формальный ряд

$$v = \epsilon^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i(2k+1)\pi y] + \epsilon^2 v_1(\tau, y) + \epsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots,$$

в котором $y = (1-2\epsilon)t$ и зависимость от y функций $v_i(\tau, y)$ периодическая. Удобно ввести еще одно обозначение. Положим

$$\xi(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp[i\pi(2k+1)y].$$

Тогда

$$v(t, \epsilon) = \epsilon^{1/2} \xi(\tau, \epsilon) + \epsilon^2 v_1(\tau, y) + \epsilon^{5/2} v_2(\tau, y) + \dots \tag{3.2}$$

Положим затем в (1.3) $u = 1 + v$. В результате для $v(t)$ получаем уравнение

$$\epsilon \dot{v} = -\frac{1}{2}[v + v(t-1) + c\epsilon^2(v - v(t-1))](1+v). \tag{3.3}$$

Подставим (3.2) в (3.3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ϵ . На втором шаге приходим к соотношению

$$v_1(\tau, y) = -\xi(\tau, y) \frac{\partial \xi(\tau, y)}{\partial y}.$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\epsilon^{5/2}$, получаем уравнение для определения $v_2(\tau, y)$. Из условия разрешимости этого уравнения приходим к уравнению для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau, y)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - c\xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (3.4)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, y + 1) \equiv -\xi(\tau, y). \quad (3.5)$$

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть краевая задача (3.4), (3.5) имеет при всех $\tau > \tau_0$ ограниченное вместе с производными по τ и по y решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда уравнение (3.3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\epsilon^{5/2})$ решение $v_0(t, \epsilon)$, для которого

$$v_0(t, \epsilon) = \epsilon^{1/2} \xi_0(\tau, y) - \epsilon^2 \xi_0^2(\tau, y) \frac{\partial \xi_0(\tau, y)}{\partial y}$$

и $\tau = \epsilon^2 t$, $y = (1 - 2\epsilon)t$.

Отметим, что в некоторых случаях, например, для состояний равновесия или периодических по времени решений (3.4), (3.5), удается получить утверждение о существовании близкого к нему точного решения (3.3), и исследовать вопросы устойчивости.

3.2. О решении краевой задачи (3.4), (3.5). Рассмотрим краевую задачу (3.4), (3.5). В ней удобно выполнить замены $\tau_1 = 2\tau$, $x = y - 2\tau$ и $\alpha = -c$. Затем переобозначим τ_1 на τ и получим итоговое уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \xi + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.6)$$

с антипериодическими краевыми условиями (3.5).

Отметим сначала, что состояние равновесия $\xi \equiv 0$ является устойчивым при $\alpha \leq \pi^2$ и неустойчивым при $\alpha > \pi^2$. Просто обосновывается утверждение, что при $\alpha < 0$ это состояние равновесия глобально устойчиво: все решения (3.6), (3.5) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Действительно, следующее утверждение описывает поведение решений (3.6), (3.5), а значит и уравнения (3.3) при $\alpha < 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha < 0$ и пусть решение краевой задачи (3.6), (3.5) определено при всех $\tau \geq \tau_0$ и является непрерывно дифференцируемым по τ и y . Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^2 \xi^2(\tau, y) dy = 0.$$

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теоремы достаточно умножить (3.6) на $\xi(\tau, y)$ и проинтегрировать от 0 до 2 по y (с учетом (3.5)).

Численные исследования показывают, что и при $0 \leq \alpha \leq \pi^2$ все решения краевой задачи (3.6), (3.5) тоже стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow \infty$.

Рассмотрим ситуацию, когда

$$\alpha = \pi^2 + \nu, \quad 0 < \nu \ll 1.$$

Линеаризованная в нуле краевая задача (3.6), (3.5) имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + (\pi^2 + \nu)\eta, \quad \eta(\tau, x+1) = -\eta(\tau, x). \quad (3.7)$$

Характеристическое для (3.7) уравнение

$$\mu = -\pi^2(2k+1) + (\pi^2 + \nu), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.8)$$

при $\nu = 0$ имеет два нулевых корня. В (3.7) им отвечают решения $c \cos \pi x$ и $c \sin \pi x$. Остальные корни (3.8) отрицательные. При достаточно малых ν краевая задача (3.6), (3.5) имеет в некоторой достаточно малой и независимой от ν окрестности состояния равновесия $\xi \equiv 0$ устойчивое двумерное локальное инвариантное интегральное многообразие [12], [13]. На этом многообразии рассматриваемая краевая задача сводится к нормальной форме – системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной нелинейностью. Специфика данной системы состоит в том, что имеется несколько “вырождений”. Во-первых, нелинейность в (3.6) является кубической (отсутствуют квадратичные слагаемые). Во-вторых, как оказывается, ляпуновская величина [15] равна нулю. Систему двух уравнений на инвариантном многообразии можно записать с точностью до $o(\nu)$ в виде одного скалярного уравнения вида

$$\frac{d\eta}{ds} = i\delta|\eta|^2\eta + \nu[a + b|\eta|^4]\eta, \quad (3.9)$$

где $s = \nu^{1/2}\tau$, а коэффициенты δ , a и b подлежат определению. Связь между решениями (3.6), (3.5) на этом многообразии и решениями (3.9) устанавливает асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \xi(\tau, \epsilon) = & \nu^{1/4}[\eta(s) \exp(i\pi x) + \bar{\eta}(s) \exp(-i\pi x)] + \nu^{1/2}\xi_2(s, x) \\ & + \nu^{3/4}\xi_3(s, x) + \nu\xi_4(s, x) + \nu^{5/4}\xi_5(s, x) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для нахождения всех коэффициентов (3.10), а значит и решений (3.8), подставим выражение (3.10) в краевую задачу (3.6), (3.5) и будем с учетом (3.9) собирать коэффициенты при одинаковых степенях ν . Сначала находим, что $\xi_2(s, x) \equiv 0$, а из условия разрешимости получающегося уравнения относительно $\xi_3(s, x)$ получаем равенство

$$\delta = \pi, \quad \xi_3(s, x) = \frac{i\eta^3}{8\pi} e^{3\pi x} + \frac{-i\bar{\eta}^3}{8\pi} e^{-3\pi x}.$$

На следующем шаге приходим к соотношению $\xi_4(s, x) \equiv 0$, а из условия разрешимости соответствующего уравнения для $\xi_5(s, x)$ определяем коэффициенты a и b : $a = 1$, $b = -1/8$. При найденных δ , a и b уравнение (3.9) имеет единственный устойчивый цикл $\eta_0(s)$, для которого

$$\eta_0(s) = \sqrt[4]{8} \exp(i\pi\sqrt{8}s).$$

Отсюда следует, что при малых ν краевая задача (3.4), (3.5) устойчивый цикл

$$\xi_0(\tau, \epsilon) = 2\sqrt[4]{8\epsilon} \cos(\pi x + \pi\tau\sqrt{8\epsilon} + \gamma) + O(\sqrt{\epsilon}).$$

Численные исследования показывают, что при всех $\alpha > \pi^2$ краевая задача (3.6), (3.5) имеет единственный устойчивый цикл. При больших α этот цикл имеет ярко выраженную релаксационную структуру.

Приведем несколько графиков, полученных на основе численного анализа.

Рис. 1. Сплошной линией нанесено значение амплитуды при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение амплитуды

Рис. 2. Сплошной линией нанесено значение периода при численных расчетах. Прерывистой линией нанесено аналитически полученное значение периода

На рисунке 4 представлен трехмерный график колебаний решения изучаемой краевой задачи, при значении $\epsilon = 2$. Как видно из рисунка, поверхность образованная решением представляет собой так называемый режим “бегущей волны”.

3.3. Быстро осциллирующие решения. Положим здесь

$$y = c\epsilon^{2\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3.11)$$

Выше было показано, что в случае выполнения условия (3.1) (т.е. при $\alpha = 1$) локальная динамика (3.3) определяется с помощью формулы (3.2) нелокальным

Рис. 3. Увеличение частоты и амплитуды колебаний при увеличении параметра ε . Сплошная линия $\varepsilon = 0.01$, пунктирная $\varepsilon = 0.5$. Выполнен сдвиг по времени $t = \tau - 100980$

Рис. 4. Бегущая волна при $\varepsilon = 2$

поведением решений краевой задачи (3.4), (3.5). Тем самым можно было говорить о том, что основной вклад в формирование структур (3.6), (3.5) вносят моды с относительно небольшими номерами. Поэтому они и были названы медленно осциллирующими.

При условии (3.11) это уже не так. В рассматриваемой ситуации будет показано, что основной вклад в формирование структур вносят моды с асимптотически большими (при $\epsilon \rightarrow 0$) номерами.

Введем несколько обозначений. Фиксируем произвольно параметр $z \in (-\infty, \infty)$ и $z \neq 0$ и через $\theta_z = \theta_z(\epsilon)$ обозначим такое значение из полуинтервала $[0, 2)$, для которого величина $z\epsilon^{\gamma-1} + \theta_z$ является целым нечетным числом. Рассмотрим затем множество целых чисел $K_z = \{(z\epsilon^{\gamma-1} + \theta_z)(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Для значений k из K_z асимптотические формулы (2.5) принимают вид

$$\lambda_k(\epsilon) = (z\epsilon^{\gamma-1} + \theta_z)\pi(2k+1)(1-2\epsilon)i - z^2\epsilon^{2\gamma}\pi^2(2k+1)^2 - c\epsilon^{2\gamma} + o(\epsilon^{2\alpha}).$$

Аналог формального ряда (3.2) в рассматриваемом случае такой:

$$v = \epsilon^{\gamma/2} \xi(\tau, x) + \epsilon^{2\gamma} v_1(\tau, x) + \epsilon^{5\gamma/2} v_2(\tau, x) + \dots,$$

где $\tau = \epsilon^{2\gamma} t$, $x = (z\epsilon^{\gamma-1} + \theta)(1 - 2\epsilon)t$. Подставляя это выражение в (3.3) и производя стандартные действия, приходим к краевой задаче для определения функции $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon} = z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c\xi + z\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (3.12)$$

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (3.13)$$

Сформулируем итоговый результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для некоторого $z = z_0$ краевая задача (3.12), (3.13) имеет при всех $\tau > \tau_0$ ограниченное вместе с производными по τ и по y решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда уравнение (1.3) при $\alpha = 1/2$ и $y = c\epsilon^{2\gamma}$ имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\epsilon^{5\gamma/2})$ решение $u_0(t, \epsilon)$, для которого

$$u_0(t, \epsilon) = 1 + \epsilon^{\gamma/2} \xi_0(\tau, x) - \epsilon^{2\gamma} z \xi_0(\tau, x) \frac{\partial \xi_0(\tau, x)}{\partial x},$$

где $\tau = \epsilon^{2\gamma} t$, $x = (z_0\epsilon^{\gamma-1} + \theta)(1 - 2\epsilon)t$.

3.4. Более сложная конструкция. Пусть выполнено условие (3.11). Фиксируем произвольное целое $n > 1$ и рассмотрим произвольный набор чисел $z_1, \dots, z_n$, $z_j \neq 0$. Через $\theta_j = \theta_j(z_j, \epsilon) \in [0, 2)$ обозначим такое значение, для которого выражение $z_j\epsilon^{\gamma-1} + \theta$ является целым нечетным числом. Роль краевой задачи (3.12), (3.13) играют уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \xi - c\xi + \xi^2 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \xi \quad (3.14)$$

с 1-периодическими или 1-антипериодическими по $x_1, \dots, x_n$ краевыми условиями, причем количество антипериодических краевых условий нечетно.

Имеет место утверждение теоремы 3, причем решения (1.3) и (3.14) связаны соотношениями

$$u = 1 + \epsilon^{\gamma/2} \xi(\tau, x_1, \dots, x_n) + \epsilon^{2\gamma} \xi(\tau, x_1, \dots, x_n) \left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \xi(\tau, x_1, \dots, x_n),$$

где $\tau = \epsilon^{2\gamma} t$, $x_j = (z_j\epsilon^{\gamma-1} + \theta_j)(1 - 2\epsilon)t$.

4. Асимптотика релаксационного цикла при больших λ . Здесь предполагается, что выполнено условие $\alpha < 1/2$ и параметр λ является достаточно большим. Для исследования динамических свойств уравнения (1.3) будем использовать специальный асимптотический метод, разработанный в [3], [5], [11]. Суть его применительно к уравнению (1.3) состоит в следующем. Сначала в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}$ уравнения (1.3) фиксируем некоторое множество начальных функций S . Затем изучаем асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ всех решений с начальными условиями из S . Как оказывается, каждое такое решение через некоторый отрезок времени снова попадает в исходное множество S . Тем самым по решениям (1.3) удастся построить

такой оператор последования, который множество S переводит в себя. На основании известных утверждений о такого типа отображениях приходим к выводу о существовании в S неподвижной точки-функции $\varphi_0(s) \in C_{[-1,0]}$ – рассматриваемого оператора. Решение (1.3) с начальным условием $\varphi_0(s)$, очевидно, является периодическим. Это решение обычно называют медленно осциллирующим, поскольку, как будет показано ниже, расстояние между “всплесками” – корнями уравнения $u(t) = 1$ – не меньше времени запаздывания 1.

Множество $S \subset C_{[-1,0]}$ определяем следующим образом. Пусть S – множество всех таких неотрицательных непрерывных функций $\varphi(s)$ из $C_{[-1,0]}$, для которых выполнены условия

- 1) $\varphi(0) = 1$;
- 2) $0 \leq \varphi(s) \leq \bar{\varphi}(s)$, где

$$\bar{\varphi}(s) = \begin{cases} \delta, & \text{если } -1 \leq s \leq -\delta \\ (\delta^{-1} - 1)s + 1, & \text{если } -\delta \leq s \leq 0, \delta = \lambda^{-1/2} \ll 1. \end{cases}$$

Через $u(t, \varphi)$ будем обозначать решение (1.3) с начальным при $t = 0$ условием $u(0, \varphi) = \varphi(s) \in S$. Приступим к построению асимптотики $u(t, \varphi)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала два уравнения

$$\dot{u} = \lambda u[1 - \alpha u - (1 - \alpha)\delta], \quad (4.1)$$

$$\dot{u} = \lambda u[1 - \alpha u]. \quad (4.2)$$

Обозначим через $u_0(t)$ и $u^0(t)$ соответственно решения этих уравнений с начальными условиями $u_0(0) = u^0(0) = 1$. Тем самым,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= [1 - (1 - \alpha)\delta] \exp(\lambda(1 - (1 - \alpha)v)t) \\ &\quad \times [1 - \alpha - (a - \alpha)\delta + \alpha \exp(\lambda(1 - (1 - \alpha)\delta)t)]^{-1}, \\ u^0(t) &= \exp(\lambda t)[1 - \alpha + \alpha \exp(\lambda t)]^{-1}. \end{aligned}$$

На основании известных результатов о дифференциальных неравенствах заключаем, что

$$u_0(t) \leq u(t, \varphi) \leq u^0(t) \quad \text{при } t \in [0, 1 - \delta], \quad (4.3)$$

$$u^0(t) \geq u(t, \varphi) \quad \text{при } t \in [0, 1]. \quad (4.4)$$

Отсюда приходим к выводу, что равномерно на отрезке $[\delta, 1 - \delta]$ и по всем $\varphi(s) \in S$ имеют место асимптотические при $\lambda \rightarrow \infty$ соотношения

$$u(t, \varphi) = \alpha^{-1} + o(1) \quad \text{и} \quad u(1, \varphi) \leq \alpha^{-1}. \quad (4.5)$$

Пусть теперь $t \in [1, 2 - \delta]$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = \lambda u[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u_0(t - 1)]$$

и через $u_{00}(t)$ обозначим его решение с начальным при $t = 1$ условием $u_{00}(1) = \alpha^{-1}$. Из неравенства $u(t, \varphi) \leq u_{00}(t)$ и из свойств $u_{00}(t)$ вытекает, что равномерно по $t \in [1 + \delta, 2 - \delta]$

$$u(t, \varphi) = o(1), \quad (4.6)$$

а для первого положительного корня $t_1(\varphi)$ уравнения $u(t, \varphi) = 1$ выполнено соотношение

$$t_1 = 1 + o(\lambda^{-1/2}). \quad (4.7)$$

Далее, при $t \in [1 + \delta, 2 - \delta]$ уравнение (1.3) представимо в виде

$$\dot{u} = \lambda u[1 - (1 - \alpha)\alpha^{-1} + o(1)],$$

поэтому

$$u(t, \varphi) = \exp \left[\lambda \frac{2\alpha - 1}{\alpha} (1 + o(1))(t - t_1) \right] \quad (4.8)$$

и, в частности,

$$u(2 - \delta, \varphi) = \exp \left[\lambda \frac{2\alpha - 1}{\alpha} (1 + o(1)) \right].$$

Отсюда из (1.3) приходим к выводу, что

$$u(2, \varphi) = \exp \left[\lambda \frac{2\alpha - 1}{\alpha} (1 + o(1)) \right].$$

Обозначим через $t_2(\varphi)$ второй положительный корень уравнения $u(t, \varphi) = 1$. При $t \in [2 + \delta, 3 - \delta]$ и пока $u(t, \varphi) = o(1)$ функция $u(t, \varphi)$ является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda u[1 - \alpha u + o(1)],$$

а значит

$$u(t, \varphi) = u(2, \varphi) \exp[\lambda(1 + o(1))(t - 2)]. \quad (4.9)$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что корень $t_2(\varphi)$ существует и выполнено асимптотическое равенство

$$t_2(\varphi) = 2 + (1 - 2\alpha)\alpha^{-1} + o(1) = \alpha^{-1} + o(1).$$

Введем в рассмотрение оператор Π :

$$\Pi(\varphi(s)) = u(s + t_2(\varphi), \varphi).$$

Из (4.7) и (4.8) тогда получаем, что $\Pi(\varphi(s)) \in S$, т.е. $\Pi S \subset S$. Из известных результатов (см., например, [16]) следует, что в S существует неподвижная точка $\varphi_0(s)$ оператора Π : $\Pi(\varphi_0(s)) = \varphi_0(s)$. Решение $u_0(t, \lambda)$ уравнения (1.3) с начальным условием $\varphi_0(s)$ является периодическим с периодом $T_\alpha(\lambda) = t_2(\varphi_0(s))$ и при $\lambda \rightarrow \infty$

$$T_\alpha(\lambda) = \alpha^{-1} + o(1). \quad (4.10)$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. При условии $0 < \alpha < 1/2$ существует такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ уравнение (1.3) имеет медленно осциллирующее периодическое с периодом $T_\alpha(\lambda)$ решение $u_\alpha(t, \lambda)$, для которого выполнены асимптотические равенства (4.10) и

$$\begin{aligned} u_\alpha(0, \lambda) &= 1, \\ u_\alpha(t, \lambda) &= \alpha + o(1) && \text{для каждого } t \in (0, 1), \\ u_\alpha(0, \lambda) &= o(1) && \text{для каждого } t \in (1, T_0(\lambda)). \end{aligned}$$

Применяя методы работы [3], [4], можно показать, что решение $u_0(t, \lambda)$ асимптотически орбитально устойчиво.

Сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество S может быть существенно расширено. Так, например, фигурирующий в определении S параметр δ может не зависеть от λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. После того, как найдено “нулевое” приближение $u_\lambda(t, \lambda)$ можно находить асимптотическое разложение с произвольной степенью точности по λ .

Интересно сравнить асимптотику при $\lambda \gg 1$ медленно осциллирующих решений $u_0(t, \lambda)$ (с периодом $T_0(\lambda)$) уравнения

$$\dot{u} = \lambda u[1 - u(t - 1)] \quad (4.11)$$

и $u_\alpha(t, \lambda)$ уравнения (1.3).

Так, для $u_0(t, \lambda)$ имеем [3], [4]:

$$T_0(\lambda) = \lambda^{-1}(1 + o(1)) \exp(\lambda)$$

и

$$\begin{aligned} \max_t u_0(t, \lambda) &= (1 + o(1)) \exp(\lambda - 1), \\ \min_t u_0(t, \lambda) &= \exp[-\exp(\lambda(1 + o(1)))]. \end{aligned}$$

Отметим, что при $\alpha \rightarrow 0$ выполнены соотношения $\max_t(u_{\alpha(t, \lambda)}) \rightarrow \infty$, $T_\alpha(\lambda) \rightarrow \infty$.

В плане обсуждения и распространения полученных здесь результатов рассмотрим логистическое уравнение с запаздыванием и с ограничениями (1.9)

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t - 1)]u(A - u), \quad A > 1.$$

Решения с начальным при некотором t_0 условием $0 \leq \varphi(s) \leq A$ при всех $t > t_0$ остаются в диапазоне между 0 и A . Применяя предложенный выше асимптотический метод, фиксируем в качестве начального множества то же самое множество $S \subset C_{[-1, 0]}$, как и при доказательстве теоремы 5. Сформулируем соответствующий результат для уравнения (1.9).

ТЕОРЕМА 6. При условии $A > 1$ существует такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ уравнение (1.9) имеет медленно осциллирующее периодическое с периодом $T_A(\lambda)$ решение $u_A(t, \lambda)$, для которого выполнены асимптотические равенства

$$T_A(\lambda) = A^2(A - 1)^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} u_A(0, \lambda) &= 1, \\ u_A(t, \lambda) &= A + o(1) \quad \text{для каждого } t \in (0, A(A - 1)^{-1}), \\ u_A(t, \lambda) &= o(1) \quad \text{для каждого } t \in (A(A - 1)^{-1}, T_A(\lambda)). \end{aligned}$$

Графики $u_0(t, \lambda)$, $u_\alpha(t, \lambda)$ и $u_A(t, \lambda)$ приведены на рис. 5. Основное отличие $u_\alpha(t, \lambda)$ и $u_A(t, \lambda)$ состоит лишь в том, что “ступени” – интервалы, где $u_{\alpha, A} > 1$

для $u_\alpha(t)$ имеют продолжительность $1 + o(1)$, а для $u_A(t, \lambda)$ эта продолжительность больше.

Структура медленно осциллирующего периодического решения для уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - \alpha u - (1 - \alpha)u(t-1)]u(A - u)$$

меняется (по сравнению с $u_{\alpha, A}(t, \lambda)$) несущественно. Конечно, для всех рассмотренных здесь уравнений имеет место утверждение о том, что количество периодических (быстро осциллирующих) решений неограниченно растет при $\lambda \rightarrow \infty$.

Рис. 5. Вид функций $u_0(t, \lambda)$, $u_\alpha(t, \lambda)$ и $u_A(t, \lambda)$

Выводы. Динамические свойства логистического уравнения, содержащего запаздывание (1.3), существенно отличается от динамических свойств логистического уравнения (1.1) и логистического уравнения с запаздыванием (1.2). При $\alpha > 1/2$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ устойчиво при всех положительных λ . При $0 < \alpha < 1/2$ могут возникать бифуркационные явления при достижении параметра λ некоторого порогового значения $\lambda(\alpha)$. При $\alpha \sim 1/2$ и $\lambda \gg 1$ локальные динамические свойства описываются нелокальным поведением решений специальных нелинейных краевых задач параболического типа. Естественно ожидать, что в этом случае характерны сложные и нерегулярные колебания. Если же $\alpha < 1/2$ и $\lambda \gg 1$, то колебания носят ярко выраженный релаксационный характер. Установлено существование релаксационного цикла и получена его асимптотика. Приведено сравнение с асимптотическими характеристиками цикла для уравнения Хатчинсона (1.2) и некоторых его обобщений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Kakutani, L. Markus, "On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (A - By(t - \tau))y(t)$ ", *Contributions to the Theory of Non-Linear Oscillations*, Vol. IV, Ann. Math. Stud., **41**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1958, 1–18.

- [2] G. S. Jones, “The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **5**:3 (1962), 435–450.
- [3] S. A. Kashchenko, “Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation”, *Automat. Control Comput. Sci.*, **47**:7 (2013), 470–494.
- [4] С. А. Кащенко, “О периодических решениях уравнения $x'(t) = -lx(t-1)[1+x(t)]$ ”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1978, 110–117.
- [5] С. А. Кащенко, “Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 22.
- [6] С. А. Кащенко, “Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной”, *Дифференц. уравнения*, **25**:8 (1989), 1448–1451.
- [7] S. A. Kaschenko, “Normalisation in the systems with small diffusion”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **6**:7 (1996), 1093–1109.
- [8] С. А. Кащенко, “Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:3 (1998), 457–465.
- [9] И. С. Кащенко, “Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием”, *Докл. РАН*, **421**:5 (2008), 586–589.
- [10] И. С. Кащенко, С. А. Кащенко, “Динамика уравнения с большим пространственно-распределенным управлением”, *Докл. РАН*, **438**:1 (2011), 30–34.
- [11] С. А. Кащенко, “Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник жертва”, *Докл. АН СССР*, **266** (1982), 792–795.
- [12] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.
- [13] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [14] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [15] Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Справочная математическая библиотека, **11**, Наука, М., 1990.
- [16] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969.

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова;

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва

E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступило

28.05.2014