Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Звягин, В. П. Орлов, Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 681–698

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:51:05

Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта

А. В. Звягин, В. П. Орлов

В статье исследуется проблема существования слабого решения для начально-краевой задачи термовязкоупругости одной математической модели, описывающей течение линейно упруго запаздывающей жидкости Фойгта.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10508

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu_0 \Delta v - 2 \operatorname{Div}(\nu(\theta) \mathcal{E}(v)) - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad} p = f \quad \text{в } Q_T, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad v|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega, \quad v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = 2\tilde{\nu}(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g \quad \text{в } Q_T, \quad (1.3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \theta|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $v = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$, $n = 2, 3$, $\theta(t, x)$ и $p(t, x)$ – вектор-функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, f – плотность внешних сил, g – источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ – коэффициент теплопроводности, $\nu_0 > 0$ – начальная вязкость жидкости, $0 \leq \nu(s) \leq M$, $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ – вязкость жидкости, где $M = \operatorname{const}$, положим $\tilde{\nu}(s) = \nu_0 + \nu(s)$. Далее,

$$\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}, \quad \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

– тензор скоростей деформаций. Всюду по тексту предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Далее, символ $A : B = a_{ij} b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$; $\operatorname{Div} C$ – дивергенция тензора $C = (c_{ij}(t, x))$, т.е. вектор

$$\operatorname{Div} C = \left(\frac{\partial c_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial c_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-00041, 14-01-31228), РНФ (грант № 14-21-00066) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (грант № 1.1539.2014/К).

Как известно, исследования начально-краевой задачи (1.1), (1.2) при $\theta = 0$, описывающей течение линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта (например, движение вязких жидкостей с полимерными добавками), было начато в [1], [2] (в частности, в этих работах установлена слабая разрешимость задачи (1.1), (1.2) при $\theta = 0$). В монографии [3] подробно описана изучаемая модель Осколкова, а также некоторые ее модификации (в частности, установлена слабая разрешимость задачи (1.1), (1.2) при $\theta = 0$ с полной производной в реологическом соотношении). В работе [4] доказывается слабая разрешимость исследуемой начально-краевой задачи при $\theta = 0$ с объективной производной в реологическом соотношении.

Добавление в модели Осколкова температуры θ в коэффициент вязкости приводит к появлению уравнения (1.3) (уравнение баланса энергии (см. [5; с. 12])). В [6] изучалась слабая разрешимость задачи термовязкоупругости для модели Джеффриса, а в [7] – слабая разрешимость задачи (1.1)–(1.4) в частном случае $\kappa = 0$ и дополнительным интегральным слагаемым типа памяти. Наша цель – установить слабую разрешимость задачи (1.1)–(1.4) в общем случае. При доказательстве мы будем опираться на результаты работ [6] и [7]. Часть результатов данной статьи анонсировались в краткой статье [8].

2. Формулировка основного результата. Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ будем обозначать пространство вектор-функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω . Пусть

$$\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$$

– подмножество соленоидальных вектор-функций; H – замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$; V – замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Пространство $C([0, T], X)$ в данной работе будет рассматриваться не только со стандартной нормой

$$\|v\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X,$$

но и с эквивалентной ей нормой

$$\|v\|_{C([0, T], X), k} = \max_{t \in [0, T]} (\exp(-kt) \|v(t)\|_X), \quad k \geq 0.$$

Эквивалентность норм следует из неравенства

$$\|v\|_{C([0, T], X), k} \leq \|v\|_{C([0, T], X)} \leq \exp(kT) \|v\|_{C([0, T], X), k}.$$

Введем пространства

$$\begin{aligned} E_1 &= \{v : v \in C([0, T], V), v' \in L_2(0, T; V)\}, \\ E_2 &= \{v : v \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)), 1 < p < +\infty\}, \end{aligned}$$

с нормами соответственно

$$\begin{aligned} \|v\|_{E_1} &= \|v\|_{C([0, T], V)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V)}, \\ \|v\|_{E_2} &= \|v\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|v'\|_{L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать действие функционала $f \in E^*$ на элемент $x \in E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым решением задачи (1.1)–(1.4) называется пара (v, θ) , где $v \in E_1$ и $\theta \in E_2$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi \, dx - \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu_0 \int_{\Omega} \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi) \, dx \\ + 2 \int_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi) \, dx + \kappa \int_{\Omega} \mathcal{E} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) : \mathcal{E}(\varphi) \, dx = \langle f(t), \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

при всех $\varphi \in V$, п.в. $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \phi \, dx - \int_{\Omega} v_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \, dx + \chi \int_{\Omega} \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) \, dx \\ = 2 \int_{\Omega} (\tilde{\nu}(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)) : \phi \, dx + 2\kappa \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) \right) : \phi \, dx + \langle g, \phi \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

при всех $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, п.в. $t \in [0, T]$,

где $\tilde{\nu}(\theta) = \nu_0 + \nu(\theta)$, и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задание начального условия для θ определено корректно в силу следующей теоремы (подробно описанной в [9; с. 60]), которая является частным случаем общей интерполяционной теоремы Лионса–Мадженеса:

ТЕОРЕМА 1. Пусть X_0, X, X_1 – банаховы пространства такие, что вложения $X_0 \subset X, X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ вполне непрерывно. Для $p_0 \geq 1, p_1 \geq 1$ имеет место вложение

$$W_{p_0, p_1} = \{v : v \in L_{p_0}(a, b; X_0), v' \in L_{p_1}(a, b; X_1)\} \subset C([a, b], X_1)$$

и это вложение непрерывно.

Мы установим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \leq \nu(s) \leq M$,

$$f \in L_2(0, T; V^*), \quad g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega)), \quad v_0 \in V, \quad \theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega).$$

Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и для $1 < p < 5/4$ при $n = 3$ существует слабое решение задачи (1.1)–(1.4).

Доказательство теоремы 2 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (1.1), (1.2) с известной $\theta \in E_2$ (раздел 3). Затем устанавливается разрешимость задачи (1.3), (1.4) с заданной $\nu \in E_1$ (раздел 4). Далее описывается итерационный процесс (раздел 5), состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (1.1)–(1.4) (раздел 6).

3. Доказательство разрешимости начально-краевой задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим начально-краевую задачу (1.1), (1.2) при фиксированной $\theta \in E_2$.

Слабое решение задачи (1.1), (1.2) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (2.1) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \leq \nu(s) \leq M$,

$$f \in L_2(0, T; V^*), \quad v_0 \in V, \quad \theta \in E_2.$$

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка

$$\|v\|_{E_1} \leq R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0, T; V^*)}, \|v_0\|_V). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы осуществляется на основе теории топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей и приводится по следующей схеме: вначале дается операторная интерпретация рассматриваемой начально-краевой задачи. Далее доказывается априорная оценка решений рассматриваемой задачи. В силу априорной оценки решений определена степень Лере–Шаудера для соответствующего вполне непрерывного векторного поля. На основе свойств топологической степени показывается, что операторное уравнение имеет, по крайней мере, одно решение. Следовательно, начально-краевая задача (1.1), (1.2) имеет, по крайней мере, одно слабое решение $v \in E_1$. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.

Для доказательства данной теоремы перейдем к операторной трактовке рассматриваемой задачи. Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned} A: V &\rightarrow V^*, & \langle Av, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx, & v \in V, \quad \varphi \in V; \\ B: L_4(\Omega) &\rightarrow V^*, & \langle B(v), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx, & v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V; \\ D: V &\rightarrow V^*, & \langle Dv, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi \, dx, & v \in V, \quad \varphi \in V; \\ J: V &\rightarrow V^*, & \langle Jv, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v \varphi \, dx, & v \in V, \quad \varphi \in V. \end{aligned}$$

Так как мы используем операторную трактовку задачи (1.1), (1.2), нам будет удобно рассматривать v и θ как функции переменной t со значениями в функциональных пространствах по переменной x и записывать $v(t)$ и $\theta(t)$ как v и θ , обозначая знаком “’” производную по t .

Тогда (2.1) можно записать в следующем виде:

$$\langle Jv'(t), \varphi \rangle + \kappa \langle Av'(t), \varphi \rangle + \nu_0 \langle Av(t), \varphi \rangle + 2 \langle Dv(t), \varphi \rangle - \langle B(v)(t), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle.$$

Поскольку в последнем равенстве функция $\varphi \in V$ произвольна, оно эквивалентно следующему операторному уравнению

$$(\kappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv - B(v) = f. \quad (3.2)$$

Итак, слабое решение задачи (1.1), (1.2) – это решение $v \in E_1$ операторного уравнения (3.2), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L: E_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, & L(v) &= ((\varkappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv, v|_{t=0}), \\ K: E_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, & K(v) &= (B(v), 0). \end{aligned}$$

Тогда рассматриваемая задача (1.1), (1.2) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L(v) - K(v) = (f, v_0). \quad (3.3)$$

Для того чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах и определяемых одной и той же формулой.

ЛЕММА 1. Для операторов A , $\varkappa A + J$, B имеют место следующие свойства.

1) Для любой функции $v \in L_2(0, T; V)$ функция $Av \in L_2(0, T; V^*)$ и оператор $A: L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ непрерывен, причем имеют место оценки

$$\|Av\|_{V^*} \leq \|v\|_V, \quad \|Av\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq \|v\|_{L_2(0, T; V)}. \quad (3.4)$$

2) Для любой функции $v \in L_2(0, T; V)$ функция $(\varkappa A + J)v \in L_2(0, T; V^*)$ и оператор $(\varkappa A + J): L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ непрерывен, обратим и для него имеют место оценки

$$\varkappa \|v\|_V \leq \|(\varkappa A + J)v\|_{V^*} \leq l_1 \|v\|_V, \quad (3.5)$$

$$\varkappa \|v\|_{L_2(0, T; V)} \leq \|(\varkappa A + J)v\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq l_1 \|v\|_{L_2(0, T; V)}, \quad (3.6)$$

l_1 – константа, зависящая от $\varkappa$. Обратный оператор $(\varkappa A + J)^{-1}: L_2(0, T; V^*) \rightarrow L_2(0, T; V)$ непрерывен и для него для любой $f \in L_2(0, T; V^*)$ имеют место оценки

$$\|(\varkappa A + J)^{-1}f\|_V \leq \frac{1}{\varkappa} \|f\|_{V^*}; \quad (3.7)$$

$$\|(\varkappa A + J)^{-1}f\|_{L_2(0, T; V)} \leq \frac{1}{\varkappa} \|f\|_{L_2(0, T; V^*)}. \quad (3.8)$$

3) Для любой функции $v \in E_1$ функция $B(v) \in L_2(0, T; V^*)$ и отображение $B: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ вполне непрерывно и для него имеет место оценка

$$\|B(v)\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq C_1 \|v\|_{C([0, T], V)}^2, \quad \text{где } C_1 = \text{const}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО последней леммы подробно приведено в [3].

ЛЕММА 2. Для оператора D имеют место следующие свойства.

1) Оператор $D: V \rightarrow V^*$ непрерывен и для него имеет место оценка

$$\|Dv\|_{V^*} \leq C_2 \|v\|_V. \quad (3.10)$$

2) Для любой функции $v \in L_2(0, T; V)$ функция $Dv \in L_2(0, T; V^*)$ и оператор $D: L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ непрерывен, причем имеет место оценка

$$\|Dv\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq C_2 \|v\|_{L_2(0, T; V)}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу линейности оператора D для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. Так как ν гладкая ограниченная функция, а $\theta \in E_2$, то, очевидно, $\nu(\theta) \in L_\infty(Q_T)$ и $\|\nu(\theta)\|_{L_\infty(Q_T)} \leq C_2$. По определению оператора D для $v, \varphi \in V$ имеем

$$|\langle Dv, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi \, dx \right| \leq C_2 \|v\|_V \|\varphi\|_V$$

и, следовательно, $\|Dv\|_{V^*} \leq C_2 \|v\|_V$. Таким образом, оператор $D: V \rightarrow V^*$ ограничен и непрерывен.

2) Пусть $v \in L_2(0, T; V)$. В силу первого пункта данной леммы при почти всех $t \in (0, T)$ имеем оценку $\|Dv(t)\|_{V^*} \leq C_2 \|v(t)\|_V$.

Возводя теперь последнюю оценку в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , получим

$$\int_0^T \|Dv(t)\|_{V^*}^2 \, dt \leq C_2^2 \int_0^T \|v(t)\|_V^2 \, dt.$$

Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0, T)$, то $\|Dv(t)\|_{V^*} \in L_2(0, T)$ и, следовательно, $Dv \in L_2(0, T; V^*)$. Из последней оценки следует требуемая оценка сверху:

$$\|Dv\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq C_2 \|v\|_{L_2(0, T; V)}.$$

Поскольку оператор D линеен и ограничен, он непрерывен как оператор из $L_2(0, T; V)$ в $L_2(0, T; V^*)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Для операторов L и K имеют место следующие свойства.

1) Оператор $L: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ обратим и обратный оператор $L^{-1}: L_2(0, T; V^*) \times V \rightarrow E_1$ непрерывен.

2) Оператор $K: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для того, чтобы доказать непрерывную обратимость оператора

$$L: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, \quad L(v) = ((\varkappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv, v|_{t=0}),$$

воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе.

В силу линейности для доказательства непрерывности оператора L достаточно доказать его ограниченность. Для любой функции $v \in E_1$ в силу определения нормы в прямом произведении пространств получим

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{L_2(0, T; V^*) \times V} &= \|(\varkappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|v|_{t=0}\|_V \\ &\leq \|(\varkappa A + J)v'\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|\nu_0 Av\|_{L_2(0, T; V^*)} + \|2Dv\|_{L_2(0, T; V^*)} + \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_V. \end{aligned}$$

В силу неравенств (3.4), (3.6), (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{L_2(0, T; V^*) \times V} &\leq l_1 \|v'\|_{L_2(0, T; V)} + \nu_0 \|v\|_{L_2(0, T; V)} + 2C_2 \|v\|_{L_2(0, T; V)} + \|v\|_{C([0, T], V)} \\ &\leq l_1 \|v'\|_{L_2(0, T; V)} + (\nu_0 + 2C_2) \sqrt{T} \|v\|_{C([0, T], V)} + \|v\|_{C([0, T], V)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (l_1 + (\nu_0 + 2C_2)\sqrt{T} + 1)(\|v'\|_{L_2(0,T;V)} + \|v\|_{C([0,T],V)}) \\ &= (l_1 + (\nu_0 + 2C_2)\sqrt{T} + 1)\|v\|_{E_1}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\|v\|_{L_2(0,T;V)} \leq \sqrt{T}\|v\|_{C([0,T],V)}$, которое следует из непрерывного вложения $C([0,T],V) \subset L_2(0,T;V)$.

Таким образом, мы получили неравенство

$$\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^*) \times V} \leq (l_1 + (\nu_0 + 2C_2)\sqrt{T} + 1)\|v\|_{E_1},$$

из которого и следует непрерывность оператора L .

Покажем теперь, что оператор L является взаимно однозначным. Для этого докажем, что для любых $f \in L_2(0,T;V^*)$, $v_0 \in V$ существует единственная функция $v \in E_1$ такая, что $L(v) = (f, v_0)$. Последнее означает, что задача

$$(\kappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv = f, \quad v|_{t=0} = v_0 \quad (3.12)$$

имеет единственное решение $v \in E_1$ для любых $f \in L_2(0,T;V^*)$, $v_0 \in V$. Покажем это.

Поскольку оператор $(\kappa A + J)$ непрерывно обратим как оператор из $L_2(0,T;V)$ в $L_2(0,T;V^*)$, то применяя $(\kappa A + J)^{-1}$ к уравнению (3.12), получим, что задача (3.12) эквивалентна следующей задаче:

$$v' + \nu_0(\kappa A + J)^{-1}Av + 2(\kappa A + J)^{-1}Dv = (\kappa A + J)^{-1}f, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (3.13)$$

Определим отображение $U: C([0,T],V) \rightarrow C([0,T],V)$ по следующей формуле

$$\begin{aligned} (Uv)(t) = v_0 - \int_0^t (\nu_0(\kappa A + J)^{-1}Av(s) \\ + 2(\kappa A + J)^{-1}Dv(s) - (\kappa A + J)^{-1}f(s)) ds, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Для любых $u, v \in C([0,T],V)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \\ &= \left\| \int_0^t (\nu_0(\kappa A + J)^{-1}Au(s) + 2(\kappa A + J)^{-1}Du(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (\nu_0(\kappa A + J)^{-1}Av(s) + 2(\kappa A + J)^{-1}Dv(s)) ds \right\|_V \\ &\leq \nu_0 \int_0^t \|(\kappa A + J)^{-1}A(u-v)(s)\|_V ds + 2 \int_0^t \|(\kappa A + J)^{-1}D(u-v)(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой (3.7), получим

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \leq \nu_0 \kappa^{-1} \int_0^t \|A(u-v)(s)\|_{V^*} ds + 2\kappa^{-1} \int_0^t \|D(u-v)(s)\|_{V^*} ds.$$

В силу оценок (3.4) и (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V &\leq \nu_0 \kappa^{-1} \int_0^t \|(u-v)(s)\|_V ds + 2C\kappa^{-1} \int_0^t \|(u-v)(s)\|_V ds \\ &\leq (\nu_0 + 2C_2)\kappa^{-1} \int_0^t \|(u-v)(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

Для $k > 0$ (точное значение k будет указано позднее) имеем

$$\begin{aligned}
 \|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V &\leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \int_0^t \|(u-v)(s)\|_V \exp(-ks) \exp(ks) ds \\
 &\leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \int_0^t \max_{s \in [0,t]} (\exp(-ks) \|(u-v)(s)\|_V) \exp(ks) ds \\
 &= (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \|u-v\|_{C([0,t],V),k} \int_0^t \exp(ks) ds \\
 &\leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \|u-v\|_{C([0,T],V),k} ((\exp(kt) - 1)k^{-1}).
 \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что при всех $t \in [0, T]$ имеет место следующее неравенство

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \|u-v\|_{C([0,T],V),k} ((\exp(kt) - 1)k^{-1}).$$

Умножая обе части неравенства на $\exp(-kt)$, получим

$$\begin{aligned}
 \exp(-kt) \|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V &\leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \|u-v\|_{C([0,T],V),k} ((1 - \exp(-kt))k^{-1}) \\
 &\leq (\nu_0 + 2C_2)\varkappa^{-1} \|u-v\|_{C([0,T],V),k} ((1 - \exp(-kT))k^{-1}).
 \end{aligned}$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от t , переходя к максимуму по t в левой части и выбирая k таким образом, чтобы $(\nu_0 + 2C_2)(k\varkappa)^{-1} \leq 1$, в силу того, что $(1 - \exp(-kT)) < 1$, получим, что

$$\|Uu - Uv\|_{C([0,T],V),k} \leq \lambda \|u-v\|_{C([0,T],V),k}, \quad \text{где } 0 < \lambda < 1.$$

Согласно принципу сжимающих отображений, существует точно один элемент $u \in C([0, T], V)$, для которого $u = Uu$, т.е. для любого $t \in [0, T]$

$$u(t) = v_0 - \int_0^t (\nu_0(\varkappa A + J)^{-1} Au(s) + 2(\varkappa A + J)^{-1} Du(s) - (\varkappa A + J)^{-1} f(s)) ds.$$

Таким образом, существует единственное решение задачи (3.13) и, следовательно, задачи (3.12). Получаем, что оператор $L: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ является взаимно однозначным.

В итоге, в силу теоремы Банаха об обратном операторе, получаем, что оператор $L: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ обратим и обратный оператор $L^{-1}: L_2(0, T; V^*) \times V \rightarrow E_1$ непрерывен.

2) Вполне непрерывность оператора

$$K: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, \quad K(v) = (B(v), 0),$$

следует из вполне непрерывности оператора $B: E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ (третий пункт леммы 1), что и требовалось доказать.

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений:

$$L(v) - \eta K(v) = \eta(f, a), \quad \text{где } \eta \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Установим априорную оценку для решений этого семейства. Важно отметить, что семейство операторных уравнений (3.14) содержит в себе как частный случай при $\eta = 1$ операторное уравнение (3.3).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. Если $v \in E_1$ – решение уравнения (3.14) для некоторого $\eta \in [0, 1]$, то для него имеет место следующая априорная оценка:

$$\|v\|_{E_1} \leq C_3, \quad C_3 = C_3(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \|v_0\|_V). \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in E_1$ – решение уравнения (3.14) для некоторого $\eta \in [0, 1]$. Следовательно, функция v удовлетворяет равенству

$$(\kappa A + J)v'(t) + \nu_0 Av(t) + 2Dv(t) - \eta B(v)(t) = f(t) \quad (3.16)$$

и начальному условию $v(0) = \eta v_0$.

Применим первую компоненту (3.16) при почти всех $t \in (0, T)$ к $v(t)$:

$$\langle (\kappa A + J)v'(t), v(t) \rangle + \langle \nu_0 Av(t), v(t) \rangle + 2\langle Dv(t), v(t) \rangle - \eta \langle B(v)(t), v(t) \rangle = \eta \langle f(t), v(t) \rangle.$$

В силу соленоидальности v имеем

$$\langle B(v)(t), v(t) \rangle = \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_i(t) \frac{\partial (v_j(t) v_j(t))}{\partial x_i} dx = 0.$$

Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned} \langle (\kappa A + J)v'(t), v(t) \rangle + \langle \nu_0 Av(t), v(t) \rangle + 2\langle Dv(t), v(t) \rangle \\ = \eta \langle f(t), v(t) \rangle \leq \eta \|f(t)\|_{V^*} \|v(t)\|_V \leq 2^{-1} \eta \|v(t)\|_V^2 + 2^{-1} \eta \|f(t)\|_{V^*}^2. \end{aligned}$$

Интегрирование этого неравенства по t от 0 до τ дает

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \langle (\kappa A + J)v'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^\tau \langle \nu_0 Av(t), v(t) \rangle dt + 2 \int_0^\tau \langle Dv(t), v(t) \rangle dt \\ \leq 2^{-1} \eta \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt + 2^{-1} \eta \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из определения оператора $\kappa A + J$ и интегрирования по частям следует

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \langle \kappa Av'(t), v(t) \rangle dt &= \int_0^\tau \int_{\Omega} \kappa \nabla v'(t) : \nabla v(t) dx dt \\ &= \kappa 2^{-1} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla v(t) dx \right) dt \\ &= \kappa 2^{-1} \int_0^\tau \frac{d}{dt} (\|v(t)\|_V^2) dt = \kappa 2^{-1} \|v(\tau)\|_V^2 - \eta^2 \kappa 2^{-1} \|v_0\|_V^2. \end{aligned}$$

Далее получим, что

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\tau \langle Jv'(t), v(t) \rangle dt &= 2 \int_0^\tau \int_{\Omega} v'(t) v(t) dx dt = \int_0^\tau d/dt \left(\int_{\Omega} v(t) v(t) dx \right) dt \\ &= \int_0^\tau d(\|v(t)\|_H^2)/dt dt = \|v(\tau)\|_H^2 - \eta^2 \|v_0\|_H^2. \end{aligned}$$

Тогда (3.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varkappa \|v(\tau)\|_V^2 + 1 \|v(\tau)\|_H^2 &= \eta^2 \varkappa \|v_0\|_V^2 + \eta^2 \|v_0\|_H^2 - 2 \int_0^\tau \langle \nu_0 A v(t), v(t) \rangle dt \\ &\quad - 4 \int_0^\tau \langle D v(t), v(t) \rangle dt + \eta \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt + \eta \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2 dt. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть сверху и пользуясь тем, что $\eta \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} \varkappa \|v(\tau)\|_V^2 + \|v(\tau)\|_H^2 &\leq 2 \left| \int_0^\tau \langle \nu_0 A v(t), v(t) \rangle dt \right| + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 \\ &\quad + 4 \left| \int_0^\tau \langle D v(t), v(t) \rangle dt \right| + \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt + \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\|v(\tau)\|_H^2 \geq 0$, то оценивая здесь левую часть снизу, имеем

$$\begin{aligned} \varkappa \|v(\tau)\|_V^2 &\leq 2 \left| \int_0^\tau \langle \nu_0 A v(t), v(t) \rangle dt \right| + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 \\ &\quad + 4 \left| \int_0^\tau \langle D v(t), v(t) \rangle dt \right| + \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt + \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Оценим первые три слагаемых в правой части неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \langle \nu_0 A v(t), v(t) \rangle dt \right| &= \left| \int_0^\tau \nu_0 \int_\Omega \nabla v(t) : \nabla v(t) dx dt \right| \leq \nu_0 \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt; \\ \left| \int_0^\tau \langle D v(t), v(t) \rangle dt \right| &= \left| \int_0^\tau \int_\Omega \nu(\theta) \mathcal{E}(v(t)) : \nabla v(t) dx dt \right| \leq C_2 \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt; \\ \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2 dt &\leq \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2. \end{aligned}$$

В итоге неравенство (3.18) можно переписать в виде

$$\varkappa \|v(\tau)\|_V^2 \leq \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 + (2\nu_0 + 2C_2 + 1) \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt,$$

что то же самое, что и в виде

$$\|v(\tau)\|_V^2 \leq \varkappa^{-1} (\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2) + (2\nu_0 + 2C_2 + 1) \varkappa^{-1} \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Воспользовавшись теперь неравенством Гронуолла–Беллмана, получим

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_V^2 &\leq \varkappa^{-1} \exp((2\nu_0 + 2C_2 + 1) \varkappa^{-1} \tau) (\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2) \\ &\leq \varkappa^{-1} \exp((2T\nu_0 + 2TC_2 + T) \varkappa^{-1}) (\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда легко следует, что

$$\|v\|_{C([0,T],V)}^2 \leq \varkappa^{-1} \exp((2\nu_0 + 2C_2 + T) \varkappa^{-1}) (\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 + \varkappa \|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2). \quad (3.20)$$

Для получения оценки на $\|v'\|_{L_2(0,T;V)}$ заметим, что если $v \in E_1$ удовлетворяет уравнению (3.14), то справедливо равенство

$$(\kappa A + J)v' + \nu_0 Av + 2Dv - \eta B(v) = \eta f.$$

С помощью оператора $(\kappa A + J)^{-1}$ получаем

$$v' = (\kappa A + J)^{-1}(-\nu_0 Av - 2Dv + \eta B(v) + \eta f).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (3.8),

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V)} &= \|(\kappa A + J)^{-1}(-\nu_0 Av - 2Dv + \eta B(v) + \eta f)\|_{L_2(0,T;V)} \\ &\leq \kappa^{-1}\|(-\nu_0 Av - 2Dv + \eta B(v) + \eta f)\|_{L_2(0,T;V^*)} \\ &\leq \kappa^{-1}(\nu_0\|Av\|_{L_2(0,T;V^*)} + 2\|Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} + \eta\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} + \eta\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}). \end{aligned}$$

В силу оценок (3.4), (3.11) и (3.9) и того, что $\eta \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V)} &\leq \kappa^{-1}(\nu_0\|u\|_{L_2(0,T;V)} + 2C_2\|u\|_{L_2(0,T;V)} + C_1\|v\|_{C([0,T],V)}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}). \end{aligned}$$

В силу непрерывного вложения $C([0, T], V) \subset L_2(0, T; V)$ имеем

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V)} &\leq \kappa^{-1}(\nu_0 T + 2C_2\sqrt{T})\|v\|_{C([0,T],V)} + C_1\kappa^{-1}\|v\|_{C([0,T],V)}^2 + \kappa^{-1}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь (3.20), получим оценку

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V)} \leq C_4, \quad C_4 = C_4(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \|v_0\|_V). \quad (3.21)$$

Из оценок (3.20) и (3.21) и получаем, что для решения уравнения (3.14) имеет место требуемая оценка (3.15), что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5. Для любых $f \in L_2(0, T; V^*)$, $v_0 \in V$ операторное уравнение (3.3) имеет по меньшей мере одно решение $v \in E_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $R = C_3 + 1$. Из оценки (3.15) следует, что все решения семейства уравнений (3.14) лежат в шаре $B_R \subset E_1$ с центром в нуле. Поэтому ни одно из уравнений этого семейства не имеет решений на границе этого шара B_R . В силу непрерывной обратимости оператора $L: E_1 \times V \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ все решения следующего семейства операторных уравнений:

$$v - \eta L^{-1}[K(v) + (f, v_0)] = 0, \quad \eta \in [0, 1], \quad (3.22)$$

лежат внутри того же шара B_R .

В силу п. 2) леммы 3 отображение $(K(\cdot) + (f, v_0)): E_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ вполне непрерывно.

В силу п. 1) той же леммы оператор $L^{-1}: L_2(0, T; V^*) \times V \rightarrow E_1$ непрерывен. Таким образом, отображение $L^{-1}[K(\cdot) + (f, v_0)]: E_1 \rightarrow E_1$ вполне непрерывно как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного отображений.

Введем отображение

$$G: [0, 1] \times E_1 \rightarrow E_1, \quad G(\eta, v) = \eta L^{-1}[K(v) + (f, v_0)].$$

Тогда в силу выпесказанного отображение G вполне непрерывно по совокупности переменных η и v . Следовательно, векторное поле $\Phi(\eta, v) = v - G(\eta, v)$ вполне непрерывно и невырождено на границе шара B_R . Таким образом, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$.

По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Поскольку в силу определения $\Phi(0, \cdot) = I$, а по свойству нормировки степени $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$, мы имеем, что $\deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом, существует хотя бы одно решение $v \in E_1$ уравнения

$$v - L^{-1}[K(v) + (f, v_0)] = 0$$

и, следовательно, уравнения (3.3).

Из теоремы 5 следует, что тогда имеет решение и операторное уравнение (3.2), причем это решение удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$. Отсюда вытекает существование хотя бы одного слабого решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), что и требовалось доказать.

4. Доказательство разрешимости начально-краевой задачи (1.3), (1.4).

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу при фиксированных $\hat{\theta} \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = (\tilde{\nu}(\hat{\theta})\mathcal{E}(v)) : \mathcal{E}(v) + 2\kappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g \quad \text{в } Q_T, \quad (4.1)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \theta|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4.2)$$

Слабое решение задачи (4.1), (4.2) определим как $\theta \in E_2$, удовлетворяющую (2.2) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально-краевой задачи (4.1), (4.2) справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $\nu(s) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \leq \nu(s) \leq M$,

$$g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega)), \quad \theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega), \quad \hat{\theta} \in E_2, \quad v \in E_1.$$

Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 5/4$ для $n = 3$ задача (4.1), (4.2) имеет, по крайней мере, одно слабое решение и справедлива оценка

$$\|\theta\|_{E_2} \leq R_2 \left(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;H)}^2 + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} \right). \quad (4.3)$$

Доказательство данной теоремы вытекает из результатов, приведенных в [6] и [7]. Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (4.1), (4.2) в правой части (4.1) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности (см., например, [10], [11]).

5. Построение последовательных приближений. Рассмотрим последовательность (v^n, θ^n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (1.2) и (1.4). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - \nu_0 \Delta v^{n+1} - 2 \operatorname{Div}(\nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^{n+1})) - \varkappa \frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = f \quad \text{в } Q_T, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} v^{n+1} = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad v^{n+1}|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega, \quad v^{n+1}|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0, \quad (5.2)$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta^{n+1} = 2(\nu_0 + \nu(\theta^n)) \mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g \quad \text{в } Q_T, \quad (5.3)$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \theta^{n+1}|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (5.4)$$

Отметим, что *слабым решением задачи (5.1), (5.2)* называется функция $v^{n+1} \in E_1$, удовлетворяющая соотношению (2.1) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а *слабым решением задачи (5.3), (5.4)* называется функция $\theta^{n+1} \in E_2$, удовлетворяющая соотношению (2.2) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (5.1), (5.2) следует из теоремы 3. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 6. Отсюда следует, что задача (5.3), (5.4) также разрешима.

6. Предельный переход. Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n) , $n = 1, 2, \dots$, где v^n – решение задачи (5.1), (5.2), а θ^n – решение задачи (5.3), (5.4). Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n) . Рассмотрим сначала θ^n .

ЛЕММА 4. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей теоремой Симона [12].

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $X \subset E \subset Y$ – банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, и для любого $f \in F$ его обобщенная производная в $D'(0, T; Y)$ принадлежит $L_r(0, T; Y)$, $1 \leq r \leq \infty$. Далее, пусть*

- 1) *множество F ограничено в $L_p(0, T; X)$;*
- 2) *множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0, T; Y)$.*

Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0, T; E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0, T], E)$.

Возьмем

$$X = \dot{W}_p^1(\Omega), \quad E = L_p(\Omega), \quad Y = W_p^{-1}(\Omega),$$

$1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и $1 < p < 5/4$ для $n = 3$. Тогда условия на X , E , Y выполняются. Из оценки (4.3) вытекает, что θ^n ограничена в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а $\partial \theta^n / \partial t$

ограничена в $L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$. Поэтому последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, что и требовалось доказать.

Без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ в п.в. в $L_p(Q_T)$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.

Рассмотрим теперь v^n . В силу оценки (3.1) получаем, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $\partial v^n / \partial t$ слабо сходится в $L_2(0, T; V^*)$.

Покажем сначала, что v^n сходится к v , где v – это решение задачи (5.1), (5.2) при $\theta = \lim \theta^n$.

Умножая (5.1) в $L_2(Q_T)$ на $\varphi \in L_2(0, T; V)$ и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (v^n)'(t) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt \\ & + \nu_0 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v^n(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ & + \varkappa \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (v^n)'(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) \varphi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega} v_i^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i} \varphi_j \, dx \, dt, \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla \varphi \, dx \, dt = \langle \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^n(t)), \nabla \varphi \rangle = \langle \mathcal{E}(v^n(t)), \nu(\theta^n) \nabla \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу того, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $\partial v^n / \partial t$ слабо сходится к $\partial v / \partial t$ в $L_2(0, T; V^*)$ имеем сходимости

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (v^n)'(t) \varphi \, dx \, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} v'(t) \varphi \, dx \, dt, \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v^n(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Установим теперь сходимость

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla (v^n)'(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v'(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

Из теоремы 7 вытекает вполне непрерывное вложение

$$F = \{v : v \in C([0, T], V); v' \in L_2(0, T; V)\} \subset C([0, T], L_4(\Omega)^n).$$

Отсюда, учитывая априорные оценки, получаем (при необходимости переходя к подпоследовательностям), что $v_n \rightarrow v$ сильно в $C([0, T], L_4(\Omega))$. Таким образом, v_n сходится к v сильно в $C([0, T], L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_n)$ сходится к ∇v слабо в $L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

Используя установленные выше сходимости, получаем

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{E}(v^n(t)), \nu_1(\theta^n) \nabla \varphi \rangle \rightharpoonup \langle \mathcal{E}(v(t)), \nu_1(\theta^n) \nabla \varphi \rangle, \\ & \int_0^T \int_{\Omega} v_i^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i} \varphi_j \, dx \, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} v_i(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \varphi_j \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (6.1), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} v'(t) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \, dt + \nu_0 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ & \quad + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v(t)) : \nabla \varphi \, dx \, dt + \kappa \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(v)'(t) : \nabla \varphi \, dx \, dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство по t , получим, что v удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v'(t) \varphi \, dx - \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi \, dx \\ & \quad + 2 \int_{\Omega} \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v(t)) : \nabla \varphi \, dx + \kappa \int_{\Omega} \nabla v'(t) : \nabla \varphi \, dx = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Следовательно v является решением (5.1), (5.2), что и требовало доказать.

Для того, чтобы обосновать предельный переход в уравнение (5.4), нам понадобятся более сильный результат о сходимости v^n . Именно, справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 8. *Подпоследовательность v^n сильно сходится в $L_2(0, T; V)$ к v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (5.1) на v^n в H имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (v^n)' v^n \, dx - \int_{\Omega} v_i^n v_j^n \frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} \, dx + \nu_0 \int_{\Omega} \nabla v^n : \nabla v^n \, dx \\ & \quad + 2 \int_{\Omega} \nu_1(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \nabla v^n \, dx + \kappa \int_{\Omega} \nabla(v^n)' : \nabla v^n \, dx = \langle f, v^n \rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Преобразуем слагаемые в левой части следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (v^n)'(t) v^n(t) \, dx = 2^{-1} \int_{\Omega} \frac{\partial(v^n(t) v^n(t))}{\partial t} \, dx \\ & \quad = 2^{-1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^n(t) v^n(t) \, dx = 2^{-1} \frac{d}{dt} \|v^n(t)\|_H^2, \\ & \quad \kappa \int_{\Omega} \nabla(v^n)'(t) : \nabla v^n(t) \, dx = \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla v^n(t) : \nabla v^n(t)) \, dx \\ & \quad = \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla v^n(t) : \nabla v^n(t) \, dx = \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \|v^n(t)\|_V^2, \\ & \quad \int_{\Omega} v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} v_i^n(t) \frac{\partial(v_j^n(t) v_j^n(t))}{\partial x_i} \, dx \\ & \quad = - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^n(t)}{\partial x_i} v_j^n(t) v_j^n(t) \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v^n(t) v_j^n(t) v_j^n(t) \, dx = 0, \\ & \quad 2 \int_{\Omega} \nu_1(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \nabla v^n \, dx = \int_{\Omega} \nu_1(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \nabla v^n \, dx + \int_{\Omega} \nu_1(\theta) \mathcal{E}(v^n) : (\nabla v^n)^T \, dx \\ & \quad = 2 \int_{\Omega} \nu_1(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n) \, dx = 2 \|\nu_1^{1/2}(\theta) \mathcal{E}(v^n)\|_H^2. \end{aligned}$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{d}{dt}\|v^n(t)\|_H^2 + \varkappa \frac{d}{dt}\|v^n(t)\|_V^2 + 2\nu_0\|v^n(t)\|_V^2 + 4\|\nu^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v^n)\|_H^2 = 2\langle f(t), v^n(t) \rangle.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$\begin{aligned} & \|v^n(T)\|_H^2 + \varkappa\|v^n(T)\|_V^2 + 2\nu_0\|v^n(t)\|_{L_2(0,T;V)}^2 + 4\|\nu^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v^n)\|_{L_2(0,T;H)}^2 dt \\ & = \|v^0\|_H^2 + \varkappa\|v^0\|_V^2 + 2\int_0^T \langle f(t), v^n(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Введем в $\aleph = H \times V \times L_2(0, T; V) \times L_2(0, T; H)$ норму

$$\|u\|_{\aleph} = (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_V^2 + \|u_3\|_{L_2(0,T;V)}^2 + \|u_4\|_{L_2(0,T;V)}^2)^{1/2}.$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – произвольный элемент из $\aleph$. Рассмотрим последовательность

$$u^n = \left(\frac{1}{2}v^n(T), \frac{\varkappa}{2}v^n(T), \nu_0 v^n(t), 2\nu_1^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v^n) \right).$$

В силу априорных оценок

$$v_n \rightharpoonup v \text{ слабо в } L_2(0, T; V), \quad v'_n \rightharpoonup v'_* \text{ слабо в } L_2(0, T; V^*) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, каждое u_i^n , $i = 1, 2, 3, 4$, слабо сходится к u_i . Из слабой сходимости u_i^n вытекает слабая сходимость u^n к предельному элементу

$$u = \left(\frac{1}{2}v(T), \frac{\varkappa}{2}v(T), \nu_0 v(t), 2\nu_1^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v) \right).$$

С другой стороны, из (6.3) в силу слабой сходимости v^n к v вытекает, что

$$\|u^n\|_{\aleph}^2 \rightarrow \frac{1}{2}\|v^0\|_H^2 + \frac{\varkappa}{2}\|v^0\|_V^2 + \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt,$$

а для v , так же как и для v^n , справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \|v(T)\|_H^2 + \varkappa\|v(T)\|_V^2 + 2\nu_0\|v(t)\|_{L_2(0,T;V)}^2 + 4\|\nu^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v)\|_{L_2(0,T;H)}^2 \\ & = \|v^0\|_H^2 + \varkappa\|v^0\|_V^2 + 2\int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|u^n\|_{\aleph} \rightarrow \|u\|_{\aleph}$.

Получаем, что u^n слабо сходится к u , а $\|u^n\|_{\aleph}$ сходится к $\|u\|_{\aleph}$. Следовательно, u^n сходится сильно к u в $\aleph$. Из сильной сходимости u^n в $\aleph$ вытекает сильная сходимость u_i^n в соответствующих пространствах. В частности, $v^n \rightarrow v$ в $L_2(0, T; V)$ сильно, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что полученное $\theta \in E_2$ является слабым решением задачи (1.1)–(1.4). Достаточно установить, что $\theta \in E_2$ и удовлетворяет соотношению (2.2).

Из (5.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \frac{d(\theta^n, \phi)}{dt} - \left(v_i^n \theta^n, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \chi \left(\frac{\partial \theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \\ &= \langle g, \phi \rangle + 2((\nu_0 + \nu(\theta^{n-1}))\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n), \phi) + 2\kappa \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n)(t, x), \mathcal{E}(\phi) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

в смысле распределений на $(0, T)$ для любых $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Умножим (6.4) на функцию $\psi(t)$, бесконечно дифференцируемую и такую, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$, и проинтегрируем на $[0, T]$:

$$\begin{aligned} & \chi \int_0^T \left(\frac{\partial \theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt - \int_0^T (\theta^n, \phi) \psi'(t) dt - \int_0^T \left(v_i^n \theta^n, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt \\ &= \int_0^T \langle g, \phi \rangle \psi(t) dt + 2\nu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n), \phi) \psi(t) dt \\ &+ 2 \int_0^T \nu(\theta^{n-1}) \mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n), \phi) \psi(t) dt \\ &+ 2\kappa \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n)(t, x), \mathcal{E}(\phi) \right) \psi(t) dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0, T; V)$ и θ^n в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$ вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых, кроме третьего в левой части (6.5).

Из оценки (4.3) вытекает ограниченность θ^n в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а следовательно, слабая компактность в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$. Считаем без ограничения общности, что θ^n слабо сходится к θ в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$. Тогда в третьем слагаемом также допустим предельный переход.

Делая в (6.5) предельный переход, получаем при $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ тождество

$$\begin{aligned} & \chi \int_0^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt - \int_0^T (\theta, \phi) \psi'(t) dt - \int_0^T \left(v_i \theta, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt \\ &= \int_0^T \langle g, \phi \rangle \psi(t) dt + 2\nu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) \psi(t) dt \\ &+ 2 \int_0^T \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi) \psi(t) dt + 2\kappa \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v)(t, x), \mathcal{E}(\phi) \right) \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (6.6) в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (2.2). Это и завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. П. Осолков, "О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров", *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 7, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **38**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1973, 98–136.

- [2] А. П. Осколков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **59**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1976, 133–177.
- [3] В. Г. Звягин, М. В. Турбин, *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред*, КРАСАНД УРСС, М., 2012.
- [4] A. V. Zvyagin, “Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative”, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, **90** (2013), 70–85.
- [5] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Изд-во «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1983.
- [6] В. Г. Звягин, В. П. Орлов, “Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 64–69.
- [7] В. П. Орлов, М. И. Паршин, “Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 5, 68–74.
- [8] А. В. Звягин, В. П. Орлов, “Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 9, 69–74.
- [9] В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко, *Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики*, Едиториал УРСС, М., 2004.
- [10] D. Blanchard, N. Bruyère, O. Guibé, “Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **12**:5 (2013), 2213–2227.
- [11] D. Blanchard, “A few result on coupled systems of thermomechanics”, *On the Notions of Solution to Nonlinear Elliptic Problems: Results and Developments*, Quad. Mat., **23**, Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2009, 145–182.
- [12] J. Simon, “Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146** (1987), 65–96.

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Поступило

19.05.2014

Исправленный вариант

10.09.2014

В. П. Орлов

Воронежский государственный университет

E-mail: orlov_vp@mail.ru