Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Тарарин, О-2-транзитивные группы автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 289–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:38:44

УДК 512.544.43

О-2-ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ С АБЕЛЕВЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ ТОЧКИ

В. М. Тарарин

Доказано, что о-2-транзитивная группа порядковых автоморфизмов линейно упорядоченного множества с абелевым стабилизатором точки является группой перестановок $F = \{\varphi(a, b) \mid a, b \in P, a > 0, (x)\varphi(a, b) = xa + b \text{ для } x \in P\}$ некоторого линейно упорядоченного поля P .

Библиография: 2 названия.

Группа $G \neq \{e\}$ порядковых автоморфизмов линейно упорядоченного множества X называется *о-2-транзитивной*, если для любых двух пар $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ элементов из X найдется элемент $g \in G$ такой, что $(x_1)g = y_1, (x_2)g = y_2$. В настоящей работе доказывается, что о-2-транзитивная группа автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки является группой перестановок $F = \{\varphi(a, b) \mid a, b \in P, a > 0, (x)\varphi(a, b) = xa + b \text{ для } x \in P\}$ некоторого линейно упорядоченного поля P .

Необходимые сведения по теории упорядоченных групп и групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств содержатся в [1], [2].

Если G – транзитивная группа автоморфизмов множества X и стабилизатор $G_a = \text{St}_G(a)$ некоторого элемента $a \in X$ в группе G является абелевой группой, то и для всякого элемента $b \in X$ $G_b = g^{-1}G_ag$ – абелева группа, где $b = (a)g, g \in G$. Стабилизатор $G_a, a \in X$, о-2-транзитивной группы G автоморфизмов действует транзитивно на множествах $X^+(a) = \{x \in X \mid x > a\}, X^-(a) = \{x \in X \mid x < a\}$.

ЛЕММА 1. Пусть G – о-2-транзитивная группа автоморфизмов линейно упорядоченного множества $X, a \in X, p \in G \setminus G_a$. Тогда всякий элемент $g \in G \setminus G_a$ представим в виде $g = s_1 p^\varepsilon s_2, \varepsilon = \pm 1, s_1, s_2 \in G_a$.

Доказательство леммы очевидно.

Будем говорить, что элемент g группы G автоморфизмов линейно упорядоченного множества X действует *строго положительно* (строго отрицательно) на подмножестве $Y \subseteq X$, если $(y)g > y$ (соответственно $(y)g < y$) для всех $y \in Y$.

ЛЕММА 2. Пусть G – о-2-транзитивная группа автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки линейно упорядоченного множества $X, a \in X, g \in G_a, g \neq e$. Тогда элемент g действует либо строго положительно на $X^+(a)$ и строго отрицательно на $X^-(a)$, либо строго отрицательно на $X^+(a)$ и строго положительно на $X^-(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что α -2-транзитивная группа G с абелевым стабилизатором точки множества X не имеет элементов $g \neq e$ с ограниченным сверху или снизу носителем $\text{supp}(g) = \{x \in X \mid (x)g \neq x\}$. Предположим противное; и пусть носитель элемента g ограничен, например, сверху. Положим $\alpha = \sup(\text{supp}(g))$. Выберем элементы $c_1, c_2, d \in X$ такие, что $c_1 < \alpha < c_2 < d$ и $(c_1)g \neq c_1$. Очевидно, что $(c_2)g = c_2$ и $g \in G_d$. Поскольку группа G_d действует транзитивно на $X^-(d)$, найдется элемент $s \in G_d$ такой, что $(c_1)s = c_2$. Имеем $(c_1)sg = (c_2)g = c_2$. С другой стороны, из неравенства $(c_1)g \neq c_1$ следует, что $(c_1)gs \neq (c_1)s = c_2$, откуда $(c_1)sg \neq (c_1)gs$, $g, s \in G_d$, что противоречит абелевости группы G_d . Таким образом, носители элементов $g \in G, g \neq e$, неограничены.

Теперь покажем, что для любых элементов $a, b \in X, a \neq b, g \in G_a, g \neq e$, имеет место неравенство $(b)g \neq b$. Предположим противное. Пусть $(b)g = b$ и для определенности $a < b$. Тогда в силу абелевости и транзитивности действия группы G_a на множестве $X^+(a)$ имеем $(c)g = (b)sg = (b)gs = (b)s = c$ для всех элементов $c \in X^+(a)$, где $(b)s = c, s \in G_a$. Откуда следует, что носитель $\text{supp}(g)$ элемента g ограничен сверху, что, как показано выше, невозможно. Таким образом, для любых элементов $a, b \in X, a \neq b, g \in G_a, g \neq e$, имеем $(b)g \neq b$.

Пусть $g \in G_a$ и $b \in X^+(a)$ ($b \in X^-(a)$). По доказанному выше $(b)g > b$ или $(b)g < b$, откуда в силу абелевости и транзитивности действия группы G_a на $X^+(a)$ ($X^-(a)$) имеем $(x)g > x$ или $(x)g < x$ соответственно для всех $x \in X^+(a)$ ($x \in X^-(a)$). Таким образом, g действует на множестве $X^+(a)$ ($X^-(a)$) либо строго положительно, либо строго отрицательно.

Предположим теперь, что элемент $g \in G_a, g \neq e$, действует, например, строго положительно на множествах $X^+(a), X^-(a)$. Возьмем элемент $s \in G$ такой, что $b = (a)s > a$, и положим $p = s^{-1}gs$. Легко заметить, что $(b)p = b$ и элемент p действует строго положительно на множествах $X^+(b), X^-(b)$. По лемме 1 $p^2 = s_1ps_2$, где $s_1, s_2 \in G_a$ причем, очевидно, что $s_1, s_2 \neq e$. По доказанному выше $b_1 = (b)s_1^{-1} \neq b, b_2 = (b)s_2^{-1} \neq b$ и, как легко заметить, $b_1, b_2 \in X^+(a)$. Получаем

$$(b_1)s_1s_2 = ((b)s_1^{-1})s_1s_2 = (b)s_2 = (b)ps_2 = ((b)s_1^{-1})s_1ps_2 = (b_1)p^2 > (b_1)p > b_1,$$

откуда по доказанному выше следует, что элемент $s_1s_2 \in G_a$ действует строго положительно на множестве $X^+(a)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} (b_2)s_1s_2 &= ((b)s_2^{-1})s_1s_2 = (b)s_1 = (b)s_1ps_2(s_2^{-1}p^{-1}) \\ &= (b)p^2s_2^{-1}p^{-1} = (b)s_2^{-1}p^{-1} = (b_2)p^{-1} < b_2, \end{aligned}$$

значит элемент $s_1s_2 \in G_a$ действует строго отрицательно на множестве $X^+(a)$. Получили противоречие. Если элемент $g \in G_a, g \neq e$, действует строго отрицательно на множествах $X^+(a), X^-(a)$, то g^{-1} действует строго положительно на $X^+(a), X^-(a)$, что в силу доказанного выше невозможно. Таким образом, всякий элемент $g \in G_a, g \neq e$, действует либо строго положительно на $X^+(a)$ и строго отрицательно на $X^-(a)$, либо строго отрицательно на $X^+(a)$ и строго положительно на $X^-(a)$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 2 вытекает, что никакой неединичный элемент α -2-транзитивной группы G с абелевым стабилизатором точки множества X не может стабилизировать более одной точки множества X ; другими словами, $g^{-1}G_ag \cap G_a = \{e\}$ для $g \in G \setminus G_a, a \in X$.

ЛЕММА 3. *О-2-транзитивная группа G автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки линейно упорядоченного множества X является линейно упорядоченной группой относительно порядка $g \leq s$, $g, s \in G$, тогда и только тогда, когда существует элемент $c \in X$ такой, что $(x)g \leq (x)s$ для всех $x \geq c$, $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что множество $P(G) = \{g \in G \mid \text{существует элемент } c \in X \text{ такой, что } (x)g \geq x \text{ для всех } x \geq c\}$ является чистой линейной инвариантной подполугруппой группы G (см. [1, с. 14]). Очевидно, что $P(G)$ – инвариантная подполугруппа группы G . Нетрудно заметить, что чистота $P(G)$ следует из леммы 2. Покажем, что $P(G)$ является линейной полугруппой. Пусть $a \in X$, $g \in G$, $g \neq e$. Если $g \in G_a$, то по лемме 2 элемент g действует на $X^+(a)$ либо строго положительно, либо строго отрицательно, откуда соответственно либо $g \in P(G)$, либо $g^{-1} \in P(G)$. Пусть теперь $g \notin G_a$ и для определенности $(a)g > a$. Если $g \notin P(G)$, то найдется элемент $b \in X$, $b > a$, такой, что $a < (b)g < b$. В силу транзитивности действия группы G_a на множестве $X^+(a)$ найдется элемент $s \in G_a$ такой, что $(b)gs = b$. Заметим, что по лемме 2 элемент s действует строго положительно на множестве $X^+(a)$. Имеем $gs \in G_b$ и $(a)gs > as = a$, значит в силу леммы 2 и включения $a \in X^-(b)$ элемент gs действует строго положительно на множестве $X^-(b)$ и строго отрицательно на множестве $X^+(b)$. Таким образом, для всех $x > b$ имеем $(x)gs < x$, откуда $(x)g < (x)s^{-1} < x$ для $x \in X^+(b)$ и, следовательно, $g^{-1} \in P(G)$. Линейность полугруппы $P(G)$ доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть $N \neq \{e\}$ является нормальной подгруппой о-2-транзитивной группы G автоморфизмов с абелевым стабилизатором G_a точки a множества X , $N \cap G_a = H$. Тогда $N \neq H$ и для любого элемента $p \in N \setminus H$ имеем $N = H \cup \{s_1 p^\varepsilon s_2 \mid \varepsilon = \pm 1, s_1, s_2 \in G_a, s_1 s_2 \in H\}$, факторгруппа G/N абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N \neq \{e\}$ – нормальная подгруппа о-2-транзитивной группы G , то очевидно $N \neq H = N \cap G_a$.

Пусть $p \in N \setminus H$ и $M = H \cup \{s_1 p^\varepsilon s_2 \mid \varepsilon = \pm 1, s_1, s_2 \in G_a, s_1 s_2 \in H\}$. Если $g \in N$ и $g \in N \cap G_a = H$, то $g \in M$. Если $g \in N \setminus H$, то $g \notin G_a$, и по лемме 1 $g = s_1 p^\varepsilon s_2$, $\varepsilon = \pm 1$, $s_1, s_2 \in G_a$. Так как $g = s_1 p^\varepsilon s_2 = s_1 p^\varepsilon s_1^{-1} (s_1 s_2)$ и $s_1 p^\varepsilon s_1^{-1} \in N$, то $s_1 s_2 \in N \cap G_a = H$, откуда $g \in M$. Следовательно, $N \subseteq M$. Если $g \in M$ и $g \in H$, то $g \in N$. Если $g \in M \setminus H$, то $g = s_1 p^\varepsilon s_2 = s_1 p^\varepsilon s_1^{-1} (s_1 s_2)$, $\varepsilon = \pm 1$, $s_1 s_2 \in H$, откуда из $s_1 p^\varepsilon s_1^{-1} \in N$ и $s_1 s_2 \in N$ следует, что $g \in N$. Таким образом, $M \subseteq N$. Ввиду изложенного получаем $N = M$.

Из нормальности подгруппы $N \neq \{e\}$ группы G и леммы 1 следует, что $G = NG_a$, значит $G/N = (NG_a)/N \simeq G_a/(G_a \cap N) = G_a/H$ и ввиду абелевости G_a факторгруппа G/N абелева. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *О-2-транзитивная группа автоморфизмов с абелевым стабилизатором точки является группой перестановок $F = \{\varphi(a, b) \mid a, b \in P, a > 0, (x)\varphi(a, b) = xa + b \text{ для } x \in P\}$ некоторого линейно упорядоченного поля P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – о-2-транзитивная группа автоморфизмов с абелевым стабилизатором G_a точки a линейно упорядоченного множества X . Группа G линейно упорядочена относительно порядка, определенного в лемме 3. Относительно индуцированного порядка G_a является абелевой линейно упорядоченной группой. Пусть $\Omega = \{H_\beta\}$, $\beta \in I$, – система всех выпуклых подгрупп $H_\beta \neq \{e\}$ группы G_a , $H_\gamma = G_a$. Положим $o(H_\beta) = \{g \in G \mid h_1 \leq g \leq h_2 \text{ для некоторых } h_1, h_2 \in H_\beta\}$. Очевидно,

что $o(H_\beta)$, $\beta \in I$, являются выпуклыми подгруппами линейно упорядоченной группы G и $o(H_\beta) \neq \{e\}$, $o(H_\beta) \cap G_a = H_\beta$. Заметим, что $o(H_\gamma) = o(G_a) = G$. Действительно, если $g \in G$ и $g \in G_a$, то очевидно $g \in o(G_a)$. Если $g \in G \setminus G_a$, то по лемме 1 $g^2 = s_1 g s_2$, $s_1, s_2 \in G_a$. Пусть для определенности $(a)g > a$. Тогда $a < (a)g < (a)g^2 = (a)s_1 g s_2 = (a)g s_2$; значит, по лемме 2 элемент s_2 действует строго положительно на множестве $X^+(a)$ и, следовательно, по определению линейного порядка в группе G имеем $s_2 > e$. Аналогично, $a > (a)g^{-1} > (a)g^{-2} = (a)s_2^{-1} g^{-1} s_1^{-1} = (a)g^{-1} s_1^{-1}$ и элемент s_1^{-1} действует строго отрицательно на $X^-(a)$, значит по лемме 2 элемент s_1 действует на $X^+(a)$ строго отрицательно и, следовательно, $s_1 < e$. Из равенства $g^2 = s_1 g s_2$ следует $s_1^{-1} g = g s_2 g^{-1} > e$ и $g s_2^{-1} = g^{-1} s_1 g < e$, откуда $s_1 < g < s_2$, $s_1, s_2 \in G_a$, и $g \in o(G_a)$. Таким образом, $o(H_\gamma) = G$.

Покажем, что $o(H_\beta) \neq H_\beta$, $\beta \in I$. Предположим противное: $o(H_\beta) = H_\beta$. В силу выпуклости подгруппы $o(H_\beta) = H_\beta \neq \{e\}$ группы G имеем $g^{-1}(H_\beta)g \cap H_\beta \neq \{e\}$ для $g \in G$ (см. [1, с. 29]), откуда $g^{-1}(G_a)g \cap G_a \neq \{e\}$ для $g \in G$, что противоречит лемме 2. Следовательно, $o(H_\beta) \neq H_\beta$.

Покажем, что $o(H_\beta)$, $\beta \in I$, является нормальной подгруппой группы G . Если $g \in o(H_\beta)$ и $s \in G_a$, то из $h_1 \leq g \leq h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in H_\beta$ в силу абелевости G_a следует, что $h_1 = s^{-1} h_1 s \leq s^{-1} g s \leq s^{-1} h_2 s = h_2$; откуда $s^{-1} g s \in o(H_\beta)$. Пусть $s \in G \setminus G_a$. Из $o(H_\beta) \neq H_\beta$ и $o(H_\beta) \cap G_a = H_\beta$ вытекает существование элемента $p \in o(H_\beta)$ и $p \notin G_a$, откуда по лемме 1 $s = s_1 p^\varepsilon s_2$, $\varepsilon = \pm 1$, $s_1, s_2 \in G_a$. По доказанному выше получаем, что $s^{-1} g s = s_2^{-1} p^{-\varepsilon} s_1^{-1} g s_1 p^\varepsilon s_2 \in o(H_\beta)$.

Теперь докажем существование нормальной подгруппы $N \neq \{e\}$ группы G такой, что $N \cap G_a = \{e\}$. Пусть $H^* = \bigcap_{\beta \in I} H_\beta$, H^* – выпуклая подгруппа группы G_a . Если $H^* = \{e\}$, то пересечение N нормальных подгрупп $o(H_\beta)$, $\beta \in I$, группы G является нормальной подгруппой группы G , причем, очевидно, $N \cap G_a = \{e\}$. По лемме 4 факторгруппы $G/o(H_\beta)$, $\beta \in I$, являются абелевыми группами, откуда факторгруппа G/N абелева и в силу некоммутативности группы G $N \neq \{e\}$. Пусть теперь $H^* \neq \{e\}$. Тогда H^* не содержит собственных выпуклых подгрупп и является архимедовой группой [1, с. 27]. Группа $o(H^*)$ не является абелевой группой. Действительно, по доказанному выше найдется элемент $g \in o(H^*)$, $g \notin G_a$, откуда по лемме 2 $(a)gs \neq (a)sg = (a)g$ для $s \in H^* \subset o(H^*)$, $s \neq e$, и, следовательно, $gs \neq sg$. Поэтому линейно упорядоченная группа $o(H^*)$ содержит выпуклые подгруппы $K \neq \{e\}$ и $o(H^*)$ (см. [1, с. 27]), которые, очевидно, являются выпуклыми подгруппами группы G . Если $K \cap H^* \neq \{e\}$, то в силу архимедовой упорядоченности группы H^* имеем $H^* \subseteq K$, откуда по определению группы $o(H^*)$ получаем $K = o(H^*)$, противоречие. Следовательно, $K \cap H^* = \{e\}$. Из изложенного вытекает существование наибольшей выпуклой подгруппы $N \neq \{e\}$, $N \neq o(H^*)$ группы $o(H^*)$, откуда в силу нормальности выпуклой подгруппы $o(H^*)$ в группе G получаем, что N – нормальная подгруппа группы G , причем, очевидно, $N \cap G_a = \{e\}$. В силу о-2-транзитивности группы G нормальная подгруппа $N \neq \{e\}$ является транзитивной группой множества X и $G = G_a N$.

Покажем, что группа N абелева. По лемме 4 в силу равенства $N \cap G_a = \{e\}$ имеем $N = \{e\} \cup \{s^{-1} p^\varepsilon s \mid \varepsilon = \pm 1, s \in G_a\}$, где $p \in N \setminus \{e\}$, откуда $p^2 = s_0^{-1} p s_0$ для некоторого элемента $s_0 \in G_a$. Если $g \in N$, $g \neq e$, то $g = s^{-1} p^\varepsilon s$, $\varepsilon = \pm 1$, $s \in G_a$, и

$$g^2 = (s^{-1} p^\varepsilon s)^2 = s^{-1} (p^2)^\varepsilon s = s^{-1} (s_0^{-1} p s_0)^\varepsilon s = s_0^{-1} (s^{-1} p^\varepsilon s) s_0 = s_0^{-1} g s_0.$$

Из изложенного следует, что если $g, f \in N$, $g \neq e$, $f \neq e$ и $gf \neq e$, то $g^2 = s_0^{-1} g s_0$,

$f^2 = s_0^{-1}fs_0$ и $(gf)^2 = s_0^{-1}gfs_0$, откуда $g^2f^2 = s_0^{-1}gfs_0 = (gf)^2$ и $gf = fg$. Следовательно, группа N абелева.

Таким образом, доказано существование в группе G транзитивной нормальной абелевой подгруппы N такой, что $N \cap G_a = \{e\}$, $G = G_aN$. Положим $P = X$, $a = 0$. По доказанному выше отображение $\lambda: P \rightarrow N$, $b \in P$, $\lambda(b) \in N$, $(0)\lambda(b) = b$, взаимно однозначно. Легко проверяется, что множество P относительно операции $b+c = (0)\lambda(b)\lambda(c)$ для $b, c \in P$ является линейно упорядоченной абелевой группой с полугруппой $P^+ = \{b \in P \mid b > 0\}$ положительных элементов. Зададим произвольный элемент множества P^+ и обозначим его через 1. По лемме 2 отображение $\theta: P^+ \rightarrow G_0$, $b \in P^+$, $\theta(b) \in G_0$, $(1)\theta(b) = b$, взаимно однозначно. Положим

$$(x)\theta(b) = \begin{cases} -((x)\theta(-b)) & \text{для } b \in P^- = \{a \in P \mid a < 0\}, \\ 0 & \text{для } b = 0, \end{cases} \quad x \in P.$$

Определим на множестве P операцию “ $\cdot$ ”, положив $b \cdot c = (b)\theta(c)$. Тривиальная проверка показывает, что P тем самым становится линейно упорядоченным полем с мультипликативной группой P^+ положительных элементов. Для любого элемента $g \in G$ имеем $g = sp$, $s \in G_0$, $p \in N$, откуда для $x \in P$ получаем $(x)g = (x)sp = (x)\theta(a)\lambda(b) = xa + b$ для некоторых элементов $a \in P^+$, $b \in P$. Следовательно, $G \subseteq F = \{\varphi(a, b) \mid a, b \in P, a > 0, (x)\varphi(a, b) = xa + b \text{ для } x \in P\}$. Для $\varphi(a, b) \in F$ имеем $(x)\varphi(a, b) = xa + b = (x)\theta(a)\lambda(b)$, откуда в силу включения $a \in P^+$ имеем $\theta(a) \in G_0$ и, следовательно, $\varphi(a, b) = \theta(a)\lambda(b) \in G$. Таким образом, $G = F$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
- [2] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.

Карельский научный центр РАН, г. Петрозаводск

Поступило
29.04.97