Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, О 4-законе нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 203–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:25:59

О 4-законе нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи

М. Е. Жуковский

В данной работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1]$. Ранее для произвольного натурального числа $k \geq 3$ нами были установлены k -законы нуля или единицы, которые описывают поведение вероятностей свойств первого порядка, выраженных формулами с ограниченной числом k кванторной глубиной при α , принадлежащих интервалу $(0, 1/(k-2)]$, и при $k \geq 4$ – интервалу $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$. В настоящей работе мы улучшили этот результат при $k = 4$. Кроме того, при произвольном $k \geq 4$ мы доказали, что на нижней границе интервала $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$ не выполнен k -закон нуля или единицы.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10511

1. Введение. В данной работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1]$. Ранее для произвольного натурального числа $k \geq 3$ нами были установлены k -законы нуля или единицы, которые описывают поведение вероятностей свойств первого порядка, выраженных формулами с ограниченной числом k кванторной глубиной при α , принадлежащих интервалу $(0, 1/(k-2)]$ (см. [1]–[3]), и при $k \geq 4$ – интервалу $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$ (см. [4]). В настоящей работе мы улучшили этот результат при $k = 4$. Кроме того, при произвольном $k \geq 4$ мы доказали, что на нижней границе интервала $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$ не выполнен k -закон нуля или единицы.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$. Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи (см. [5]–[11]) – это случайный элемент $G(n, p)$ со значениями в множестве Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}, \quad G \in \Omega_n.$$

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы* для класса свойств $\mathcal{C}$, если вероятность выполнения каждого свойства из этого класса стремится либо к 0, либо к 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-00612, 12-01-00683-а), а также грантов Президента №№ МД-6277.2013.1 и МК-2184.2014.1.

Пожалуй, самым изученным в этом направлении является класс свойств, выражаемых формулами первого порядка (см. [12], [13]). Эти формулы строятся с помощью символов отношения $\sim$, $=$; логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$; переменных $x, y, x_1, \dots$; кванторов $\forall, \exists$. Символы переменных в языке первого порядка обозначают вершины графа. Символ отношения $\sim$ выражает свойство двух вершин быть соединенными ребром, символ отношения $=$ выражает свойство двух вершин совпадать. Обозначим $\mathcal{P}$ множество функций $p = p(n)$, для которых выполнен закон нуля или единицы для класса свойств первого порядка. Класс свойств первого порядка обозначим $\mathcal{L}$. В 1988 г. Спенсер и Шела (см. [14], [15]) установили, что все функции $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha \in (0, 1)$, принадлежат $\mathcal{P}$.

Заметим, что если α – рациональное, $0 < \alpha \leq 1$ и $p = n^{-\alpha}$, то несложно показать, что случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы (см. [10]).

Помимо класса $\mathcal{L}$ рассматривается класс свойств $\mathcal{L}^\infty \supset \mathcal{L}$, выражаемых формулами, которые могут содержать бесконечное количество конъюнкций или дизъюнкций (предложения в таком языке, вообще говоря, бесконечны, в отличие от предложений, выражающих свойства из класса $\mathcal{L}$). В 1997 г. МакАртур (см. [16]) были установлены некоторые законы нуля или единицы для класса свойств $\mathcal{L}_k^\infty \subset \mathcal{L}^\infty$, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k . А именно, были получены законы для случайного графа $G(n, p)$ при $p = n^{-\alpha}$ и некоторых рациональных α из $(0, 1]$. Рассмотрим теперь класс $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ свойств, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k (предложения конечны, в отличие от предложений, задающих свойства из класса $\mathcal{L}_k^\infty$). В 2012 г. мы доказали закон нуля или единицы для свойств из этого класса (если случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_k$, то мы говорим, что он подчиняется k -закону нуля или единицы).

ТЕОРЕМА 1 [1], [2]. Пусть $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k-2))$. Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Если же $\alpha = 1/(k-2)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Тем самым, $1/(k-2)$ – наименьшее положительное значение α , при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Далее, в 2013 г. мы рассмотрели другой диапазон значений α . Пусть $k > 3$ (из теоремы 1 следует, что при $k = 3$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы для всех $\alpha \in (0, 1)$).

ТЕОРЕМА 2 [4], [17]. Пусть β – произвольное положительное рациональное число, $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ – множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1} , $\mathcal{Q}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in \mathcal{Q}$. Если же $\alpha \in \{1 - 1/(2^k - 1), 1 - 1/2^k\}$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Итак, $1 - 1/(2^k - 2)$ – наибольшее значение α , меньшее 1, при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Рассмотрим маленькие значения k и выясним, при каких $\alpha = \alpha(k) \in (0, 1)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Как мы уже заметили

выше, при $k = 3$ закон верен для всего интервала $(0, 1)$. Из теорем 1, 2 следует что 4-закон выполнен при $\alpha \in (0, 1/2) \cup (13/14, 1)$. При $\alpha \in \{1/2, 13/14\}$ закон не выполнен. Легко показать, что если $\alpha = 2/3$, то 4-закон также нарушается. Введем для этого некоторые обозначения.

Для произвольного графа G обозначим $v(G)$ число его вершин, $e(G)$ – число его ребер, $a(G)$ – число его автоморфизмов. Плотность графа $e(G)/v(G)$ обозначим $\rho(G)$. Далее мы эти обозначения будем использовать и в других пунктах статьи. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G *строго сбалансированный*, если для любого $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теорему (см. [6]–[8], [10]) о количестве копий строго сбалансированного графа. Пусть N_G – количество копий G в случайном графе $G(n, p)$. Положим $\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}$.

ТЕОРЕМА 3 [6]. Пусть G – произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho^{\max}(G)})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G – строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{n,p}(|N_G - E_{n,p}N_G| \leq \varepsilon E_{n,p}N_G) = 1,$$

где $E_{n,p}$ – это математическое ожидание по мере $P_{n,p}$. Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G = 0) = e^{-1/a(G)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем, если для последовательности произвольных $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин X_n и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(|X_n - E_{n,p}X_n| \leq \varepsilon E_{n,p}X_n) = 1,$$

то мы будем говорить, что с асимптотической вероятностью 1 справедливо $X_n \sim E_{n,p}X_n$. Если, кроме того, $X_n = X_n(x_1, \dots, x_k)$, где $x_1, \dots, x_k \in V_n$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(\forall x_1, \dots, x_k | X_n(x_1, \dots, x_k) - E_{n,p}X_n(x_1, \dots, x_k)| \leq \varepsilon E_{n,p}X_n(x_1, \dots, x_k)) = 1,$$

то будем говорить, что с асимптотической вероятностью 1 для любых $x_1, \dots, x_k \in V_n$ справедливо

$$X_n(x_1, \dots, x_k) \sim E_{n,p}X_n(x_1, \dots, x_k).$$

Плотность строго сбалансированного графа K_4 равна $3/2$, а свойство содержать K_4 является свойством первого порядка, принадлежащим $\mathcal{L}_4$. В силу теоремы 3 вероятность выполнения такого свойства при $p = n^{-2/3}$ стремится к $1 - e^{-1/24}$. Поэтому случайный граф $G(n, n^{-2/3})$ не подчиняется 4-закону нуля или единицы. В данной работе мы нашли интервал значений α , меньших $2/3$, при которых выполнен 4-закон.

ТЕОРЕМА 4. Если $\alpha \in (184/277, 2/3)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 4-закону нуля или единицы.

Кроме того, мы уточнили результат, сформулированный в теореме 2, добавив к множеству $\tilde{Q}$ нуля.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k > 3$ – натуральное число. Если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1})$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Доказательство теорем будет построено по следующей схеме: в п. 3 мы формулируем теорему Эренфойхта, связывающую законы нуля или единицы и существование выигрышной стратегии второго игрока в игре Эренфойхта. В п. 4 мы докажем теорему 4, а в п. 5 – теорему 5. Пункт 2 посвящен построению конструкций, свойства которых позволяют нам доказать, что игроки с необходимой вероятностью (стремящейся к 1 при доказательстве теоремы 4 и стремящейся к некоторому положительному числу при доказательстве теоремы 5) смогут играть в соответствии с определенными нами в пп. 4, 5 стратегиями.

2. Расширения. Для простоты изложения мы приводим в этом пункте все утверждения, касающиеся распределения малых подграфов в случайном графе Эрдеша–Реньи, которые будут использованы для доказательства основных результатов работы.

Обратимся к задаче, поставленной Спенсером в 1990 г. (см. [10], [18]). Рассмотрим такие графы $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$, что

$$\begin{aligned} V(H) &= \{x_1, \dots, x_k\}, & V(G) &= \{x_1, \dots, x_l\}, \\ V(\tilde{H}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, & V(\tilde{G}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}, \end{aligned}$$

причем $H \subset G, \tilde{H} \subset \tilde{G}$ (тем самым, $k < l$). Граф $\tilde{G}$ называется (G, H) -расширением графа $\tilde{H}$, когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \quad \implies \quad \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \quad \iff \quad \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то $\tilde{G}$ назовем *точным* (G, H) -расширением. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$\begin{aligned} v(G, H) &= |V(G) \setminus V(H)|, & e(G, H) &= |E(G) \setminus E(H)|, \\ f_\alpha(G, H) &= v(G, H) - \alpha e(G, H). \end{aligned}$$

Если для любого графа $S, H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -надежной (см. [7], [10], [18]). Если же для любого такого S , что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $f_\alpha(G, S) < 0$, то пара (G, H) называется α -жесткой (см. [7], [10]). Если любая вершина графа H соединена с некоторой вершиной из $V(G) \setminus V(H)$ и для любого такого графа S , что $H \subset S \subset G$, справедливо неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, но $f_\alpha(G, H) = 0$, то пару (G, H) назовем α -нейтральной. Введем, наконец, понятие максимальной пары. Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$

и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пару $(\tilde{G}, \tilde{H})$ назовем (K, T) -максимальной в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$. Граф $\tilde{G}$ назовем (K, T) -максимальным в Γ , если у любого такого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

Обратимся теперь к случайному графу $G(n, p)$. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $p = n^{-\alpha}$. Пусть, кроме того, пара (G, H) является α -надежной и

$$V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}, \quad V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}.$$

Рассмотрим произвольные вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in V_N$ и случайную величину

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$$

на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n, p})$, которая каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n ставит в соответствие количество (G, H) -расширений в $\mathcal{G}$ подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$. Напомним, что граф X является *подграфом графа Y , индуцированным на множество $S \subset V(Y)$* , если $V(X) = S$ и для любых вершин $x, y \in S$ справедливо

$$\{x, y\} \in E(X) \iff \{x, y\} \in E(Y).$$

Иными словами, пусть $W \subset V_n \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ – множество, мощность $|W|$ которого равна $l - k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k + 1, k + 2, \dots, l$, что граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}$ является (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, то положим $I_W(\mathcal{G}) = 1$. В противном случае $I_W(\mathcal{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется следующим равенством:

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{W \subset V_n \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} | W| = l - k} I_W.$$

ТЕОРЕМА 6 [18]. Для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ с асимптотической вероятностью 1 справедливо соотношение

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim E_{n, p} N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

При этом

$$E_{n, p} N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(n^{f_\alpha(G, H)}).$$

Помимо этой теоремы Спенсер и Шела (см. [10], [14]) для исследования законов нуля или единицы доказали теорему о количестве максимальных расширений подграфов в случайном графе (для случая “запрещенных” жестких пар).

Более формально, пусть случайная величина $N_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n количество таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. Сформулируем теорему, доказанную в работе Спенсера и Шела (см. [14]), об асимптотическом поведении этой случайной величины.

ТЕОРЕМА 7 [14]. Пусть пара (K, T) является α -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено

$$N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim E_{n,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(n^{f_\alpha(G,H)}).$$

Если пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$, где $\tilde{H} = (\emptyset, \emptyset)$, является (K, T) -максимальной в Γ , то граф $\tilde{G}$ является (K, T) -максимальным в Γ . Поэтому частным случаем теоремы 7 является аналогичный результат для количества (K, T) -максимальных графов. Пусть случайная величина $N_G^{(K,T)}$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n количество копий графа G в нем, которые являются (K, T) -максимальными в $\mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – строго сбалансированный граф с $\rho(G) < 1/\alpha$, а пара (K, T) является α -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено

$$N_G^{(K,T)} \sim N_G \sim E_{n,p} N_G^{(K,T)} = \Theta(n^{v(G) - \alpha e(G)}).$$

3. Игра Эренфойхта. Основным средством в доказательстве законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных графов, как мы заметили выше, служит теорема Эренфойхта, доказанная в 1960 г. (см. [19]). В данном пункте мы сформулируем ее частный случай для графов. Прежде всего определим *игру Эренфойхта* $\text{EHR}(G, H, i)$ на двух графах G, H с количеством раундов, равным i (см., например, [7], [10]). Пусть

$$V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

В ν -м раунде, $1 \leq \nu \leq i$, Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает в μ -м раунде, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$, $\nu < \mu$, то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\nu} \in V(H)$. Если же в этом раунде Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \dots, x_{j_i} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \dots, y_{j'_i} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1}, \dots, x_{h_l}; y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}$, $l \leq i$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны с точностью до порядка вершин:

$$G|_{\{x_{h_1}, \dots, x_{h_l}\}} \cong H|_{\{y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}\}}.$$

ТЕОРЕМА 8 [19]. Для любых двух графов G, H и любого $i \in \mathbb{N}$ Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\text{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда, когда для любого свойства L первого порядка, выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превышает i , либо оба графа обладают этим свойством, либо оба не обладают.

Несложно показать, что из этой теоремы вытекает такое следствие о законах нуля или единицы (см., например, [7], [10]). Пусть $P_{N,p(N)} \times P_{M,p(M)}$ – прямое произведение мер $P_{N,p(N)}, P_{M,p(M)}$.

ТЕОРЕМА 9. *Случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} P_{N, p(N)} \times P_{M, p(M)} (\text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k)) = 1.$$

4. Доказательство теоремы 4. Пусть $\alpha \in (184/277, 2/3)$, $p = n^{-\alpha}$. Определим множество графов $\mathcal{S}$. Граф G принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами.

СВОЙСТВО 1. В графе G нет подграфов, количество вершин которых не превосходит 79, а плотность больше, чем $1/\alpha$. Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -жестких пар (K_1, K_2) , что $v(K_2) \leq 79$, $v(K_1, K_2) \leq 13$. Для любого графа H , количество вершин которого не превосходит 79, а максимальная плотность меньше, чем $1/\alpha$, в G найдется индуцированный подграф, изоморфный H , являющийся (K, T) -максимальным для любой пары $(K, T) \in \mathcal{H}$.

СВОЙСТВО 2. Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 92$. Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -жестких пар (K_1, K_2) , что $v(K_1) \leq 92$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется такое точное (H_1, H_2) -расширение G_1 подграфа G_2 , что (G_1, G_2) является (K_1, K_2) -максимальной парой в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{H}$.

В силу теоремы 3, теоремы 7 и следствия 1 справедливо $P_{n, p}(\mathcal{S}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу теоремы 9 для доказательства теоремы 4 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, 4)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Для каждого $h \in \{1, \dots, 4\}$ обозначим X_h, Y_h графы, выбранные в h -м раунде Новатором и Консерватором соответственно. Таким образом, множества $\{X_h, Y_h\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $h \in \{1, \dots, 4\}$. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h , мы будем обозначать $x_h^1, \dots, x_h^h$, а в графе Y_h – $y_h^1, \dots, y_h^h$.

Определим дополнительную конструкцию, которая нам потребуется в дальнейшем. Пусть $\mathcal{K} = \{(K, T), T \subset K\}$ – некоторое конечное множество пар графов. Пару $(\tilde{K}, \tilde{T})$ будем называть $\mathcal{K}$ -цепью, если существует такое $r \in \mathbb{N}$ и такой набор графов

$$\tilde{T} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = \tilde{K},$$

что для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.

Новатор в первом раунде выбирает некоторую вершину x_1^1 . Рассмотрим множество $\mathcal{K}_1$ всех таких α -жестких пар (K, T) , что $v(T) \leq 79$, $v(K, T) \leq 13$. Пусть пара $(\tilde{X}_1, (\{x_1^1\}, \emptyset))$, где $\tilde{X}_1 \subset X_1$, является такой $\mathcal{K}_1$ -цепью, что граф X_1 не содержит (K, T) -расширений графа $\tilde{X}_1$ ни при каком $(K, T) \in \mathcal{K}_1$. Докажем, что $\rho^{\max}(\tilde{X}_1) < 1/\alpha$. Пусть

$$(\{x_1^1\}, \emptyset) = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = \tilde{X}_1,$$

где для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_1$. Для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ положим

$$v_j = v(K^j) - v(K^{j-1}), \quad e_j = e(K^j) - e(K^{j-1}).$$

Так как пары $(K, T) \in \mathcal{K}_1$ являются α -жесткими, то для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ выполнено неравенство $f_\alpha(K^j, K^{j-1}) < 0$. Следовательно,

$$e_j > \frac{1}{\alpha} v_j > \frac{3}{2} v_j \geq \frac{3v_j + 1}{2}.$$

Поэтому

$$\rho(\tilde{X}_1) \geq \frac{e_1 + \dots + e_r}{1 + v_1 + \dots + v_r} \geq \frac{3(v_1 + \dots + v_r) + r}{2(1 + v_1 + \dots + v_r)} = \frac{3}{2} + \frac{r - 6}{2(1 + v_1 + \dots + v_r)}.$$

По свойству 1 выполнено неравенство $\rho(\tilde{X}_1) \leq 1/\alpha < 277/184$. Следовательно,

$$\frac{r - 6}{2(1 + v_1 + \dots + v_r)} < \frac{277}{184} - \frac{3}{2} = \frac{1}{184}.$$

Приходим к оценке $92r - 553 < v_1 + \dots + v_r$. В свою очередь, по определению множества $\mathcal{K}_1$ имеем $v_1 + \dots + v_r \leq 13r$. Окончательно получаем $r \leq 6$. Так как

$$v(\tilde{X}_1) = 1 + v_1 + \dots + v_r,$$

то для любого подграфа $H \subseteq \tilde{X}_1$ число $\rho(H)$ представимо в виде дроби a/b , где $a \in \mathbb{N}$, а знаменатель $b \in \mathbb{N}$ не превосходит числа 79. Наконец, $1/\alpha \in (3/2, 277/184)$. Если бы число a/b попадало в тот же интервал, то числитель этой дроби находился бы в интервале $(1.5b, (1.5 + 1/184)b)$. Но при $b \leq 79$ этот интервал не содержит натуральных чисел. Таким образом, либо $\rho^{\max}(\tilde{X}_1) \leq 3/2$, либо $\rho^{\max}(\tilde{X}_1) \geq 277/184$. Второй случай невозможен в силу свойства 1: $\rho^{\max}(\tilde{X}_1) \leq 1/\alpha < 277/184$. Поэтому

$$\rho^{\max}(\tilde{X}_1) \leq \frac{3}{2} < \frac{1}{\alpha}.$$

Так как

$$v(\tilde{X}_1) = v_1 + \dots + v_r + 1 \leq 79,$$

то по свойству 1 в графе Y_1 существует такая вершина y_1^1 (которую и выберет Консерватор) и подграф $\tilde{Y}_1$, являющийся точным $(\tilde{X}_1, (\{x_1^1\}, \emptyset))$ -расширением графа $(\{y_1^1\}, \emptyset)$, что граф $\tilde{Y}_1$ является (K, T) -максимальным в Y_2 для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_1$.

Во втором раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_2^2 . Если $x_2^2 \in V(\tilde{X}_1)$ (в этом случае положим $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1$, $\tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_1$) или $x_2^2 \in V(\tilde{Y}_1)$ (в этом случае положим $\tilde{X}_2 = \tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2 = \tilde{X}_1$), то Консерватор выберет вершину y_2^2 , являющуюся образом x_2^2 при изоморфизме графов $\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1$, переводящем вершину x_2^1 в вершину y_2^1 .

Пусть $x_2^2 \in V(X_1) \setminus V(\tilde{X}_1)$ (в этом случае положим $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1$, $\tilde{Y}_2 = \tilde{Y}_1$) или $x_2^2 \in V(Y_1) \setminus V(\tilde{Y}_1)$ (в этом случае положим $\tilde{X}_2 = \tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2 = \tilde{X}_1$). Рассмотрим множество $\mathcal{K}_2$ всех таких α -жестких пар (K, T) , что $v(T) \leq 89$, $v(K, T) \leq 3$. Пусть пара $(Z, X_2|_{V(\tilde{X}_2) \cup \{x_2^2\}})$, где $Z \subset X_2$, является такой $\mathcal{K}_2$ -цепью, что граф X_2 не содержит (K, T) -расширений графа Z ни при каком $(K, T) \in \mathcal{K}_2$. Докажем, что пара $(Z, \tilde{X}_2)$ является α -надежной. Пусть

$$X_2|_{V(\tilde{X}_2) \cup \{x_2^2\}} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = Z,$$

где для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_2$. Для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ положим

$$v_j = v(K^j) - v(K^{j-1}), \quad e_j = e(K^j) - e(K^{j-1}).$$

Так как пары $(K, T) \in \mathcal{K}_2$ являются α -жесткими, то для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ выполнено неравенство $f_\alpha(K^j, K^{j-1}) < 0$. Следовательно, для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ либо $v_j \in \{1, 2\}$ и $e_j \geq 2v_j$, либо $v_j = 3$ и $e_j \geq 5$. Поэтому если $r \geq 4$, то

$$f(K^4, \tilde{X}_2) \leq 1 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - \alpha(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \leq 1 + a(1 - 2\alpha) + 3b\left(1 - \frac{5}{3}\alpha\right),$$

где $a + b = 4$. Следовательно,

$$f(K^4, \tilde{X}_2) \leq 1 + a\left(1 - \frac{2 \cdot 184}{277}\right) + 3(4 - a)\left(1 - \frac{5 \cdot 184}{3 \cdot 277}\right) = 1 - \frac{91a + 89(4 - a)}{277} < 0.$$

Легко показать, что в таком случае в графе K^4 найдется такой подграф $\tilde{K}_4$, что пара $(\tilde{K}_4, \tilde{X}_2)$ является α -жесткой. Так как $v(\tilde{K}_4, \tilde{X}_2) \leq 13$, то получаем противоречие с определением графа $\tilde{X}_2$. Следовательно, $r \leq 3$ и в силу определения графа $\tilde{X}_2$ для любого подграфа $\tilde{K}_r$ в K^r , содержащего $\tilde{X}_2$, выполнено неравенство $f(\tilde{K}_r, \tilde{X}_2) > 0$. Таким образом, пара $(K^r, \tilde{X}_2)$ является α -надежной. Так как

$$v(K^r) = v(\tilde{X}_2) + 1 + v_1 + \dots + v_r \leq 79 + 1 + 3 \cdot 3 = 89,$$

то по свойству 2 в графе Y_2 существует такая вершина y_2^2 (которую и выберет Консерватор) и подграф W , являющийся точным $(K_r, \tilde{X}_2)$ -расширением графа $\tilde{Y}_2$, что пара $(W, \tilde{Y}_2)$ является (K, T) -максимальной в Y_2 для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_2$ и вершина y_2^2 является образом вершины x_2^2 при изоморфизме $K^r \rightarrow W$, переводящем вершину x_2^1 в вершину y_2^1 . Переобозначим $\tilde{X}_2 := K^r$, $\tilde{Y}_2 := W$.

Если в третьем раунде Новатор выбирает вершину x_3^3 в графе $\tilde{X}_2$ (в этом случае положим $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_3 = \tilde{Y}_2$) или в графе $\tilde{Y}_2$ (в этом случае положим $\tilde{X}_3 = \tilde{Y}_2$, $\tilde{Y}_3 = \tilde{X}_2$), то Консерватор выберет вершину y_3^3 , являющуюся образом при изоморфизме графов $\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2$, переводящем вершины x_3^1, x_3^2 в вершины y_3^1, y_3^2 соответственно. Если и в четвертом раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_3$, либо в графе $\tilde{Y}_3$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав вершину либо в графе $\tilde{Y}_3$, либо в графе $\tilde{X}_3$. Если же в четвертом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_3$, ни графу $\tilde{Y}_3$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_3 . Тогда в силу определения графа $\tilde{X}_3$ вершина x_4^4 соединена ребром с не более чем одной вершиной графа $\tilde{X}_3$. Следовательно, в силу свойства 2 в графе Y_3 существует такая вершина y_4^4 , что граф $Y_3|_{V(\tilde{Y}_3) \cup \{y_4^4\}}$ является точным $(X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup \{x_4^4\}}, \tilde{X}_3)$ -расширением графа $\tilde{Y}_3$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_4^4 .

Если в третьем раунде Новатор выберет вершину, принадлежащую либо графу $X_2 \setminus \tilde{X}_2$ (положим $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_3 = \tilde{Y}_2$), либо графу $Y_2 \setminus \tilde{Y}_2$ (положим $\tilde{Y}_3 = \tilde{X}_2$, $\tilde{X}_3 = \tilde{Y}_2$), то в силу определения графа $\tilde{X}_3$ вершина x_3^3 соединена ребром с не более чем одной вершиной графа $\tilde{X}_3$. Если найдется вершина x в графе $\tilde{X}_3$, соединенная

ребром с x_3^3 , то в графе $X_3 \setminus \tilde{X}_3$ существует не более одной вершины, соединенной ребром в X_3 и с x_3^3 , и с некоторой вершиной графа $\tilde{X}_3$. Если такая вершина найдется, то объединим ее вместе с вершиной x_3^3 в множество V . Если нет, то $V := \{x_3^3\}$. В силу свойства 2 в графе Y_3 существует такая вершина y_3^3 и граф W , являющийся точным $(X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup V}, \tilde{X}_3)$ -расширением графа $\tilde{Y}_3$, что при изоморфизме графов W и $X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup V}$ вершины x_3^1, x_3^2, x_3^3 переходят в вершины y_3^1, y_3^2, y_3^3 соответственно. Если вершина x_3^3 не соединена ребром ни с одной из вершин графа $\tilde{X}_3$, то обозначим $I \subseteq \{1, 2\}$ множество индексов вершин x_3^i , для которых существует такая вершина z^i (для каждого x_3^i мы рассматриваем ровно одну такую вершину z^i), что $z^i \sim x_3^i, z^i \sim x_3^3$. Положим $V = \{x_3^3, z^i, i \in I\}$. Так как $|V| \leq 3$, то в силу определения графа $\tilde{X}_3$ пара $(X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup V}, \tilde{X}_3)$ является α -надежной. Следовательно, в силу свойства 2 в графе Y_3 существует такая вершина y_3^3 и граф W , являющийся точным $(X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup V}, \tilde{X}_3)$ -расширением графа $\tilde{Y}_3$, что при изоморфизме графов W и $X_3|_{V(\tilde{X}_3) \cup V}$ вершины x_3^1, x_3^2, x_3^3 переходят в вершины y_3^1, y_3^2, y_3^3 соответственно.

Если в четвертом раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_3$, либо в графе $\tilde{Y}_3$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав вершину либо в графе $\tilde{Y}_3$, либо в графе $\tilde{X}_3$. Если же в четвертом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_3$, ни графу $\tilde{Y}_3$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_3 . Тогда в силу определения графа $\tilde{X}_3$ вершина x_4^4 либо не соединена ребром ни с одной вершиной из x_4^1, x_4^2, x_4^3 , либо ровно с одной, либо с x_4^1 и с x_4^1 , либо с x_4^2 и x_4^3 . В последних двух случаях Консерватор сможет выбрать нужную вершину y_4^4 и выиграть по построению. В первых же двух случаях в силу свойства 2 в графе Y_3 существует такая вершина y_4^4 , что граф $Y_3|_{\{y_4^1, y_4^2, y_4^3, y_4^4\}}$ является точным $(X_3|_{\{x_4^1, x_4^2, x_4^3, x_4^4\}}, X_3|_{\{x_4^1, x_4^2, x_4^3\}})$ -расширением графа $Y_3|_{\{y_4^1, y_4^2, y_4^3\}}$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_4^4 .

5. Доказательство теоремы 5. Пусть $k > 3$ – произвольное натуральное число, $\alpha = 1 - 1/2^{k-1}$.

Введем ряд обозначений, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть X – произвольный граф, x, y – две его вершины, A, B – два его подграфа. Тогда обозначим $d_X(x, y)$ наименьшую длину цепи в X , соединяющей вершины x и y . *Длиной* цепи мы называем количество ребер в ней. В случае $x = y$ положим $d_X(x, y) = 0$. Пусть

$$d_X(x, A) = d_X(A, x) = \min_{v \in V(A)} d_X(x, v), \quad d_X(A, B) = \min_{v \in V(A)} d_X(v, B).$$

Пусть m – произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G, H) , что $G \supset H$. Будем говорить, что граф G является *циклическим m -расширением графа H* (или просто *циклическим расширением графа H*), если выполнено одно из следующих условий:

- справедливо неравенство $m \geq 3$, а также существует такая вершина x_1 графа G , что

$$\begin{aligned} V(G) \setminus V(H) &= \{y_1^1, \dots, y_{t_1}^1, y_1^2, \dots, y_{t_2}^2\}, \\ E(G) \setminus E(H) &= \{\{x_1, y_1^1\}, \{y_1^1, y_2^1\}, \dots, \{y_{t_1-1}^1, y_{t_1}^1\}, \\ &\quad \{y_{t_1}^1, y_1^2\}, \{y_1^2, y_2^2\}, \dots, \{y_{t_2-1}^2, y_{t_2}^2\}, \{y_{t_2}^2, y_1^1\}\}, \end{aligned}$$

где $t_1 + t_2 \leq m - 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 2$ (при $t_1 = 0$ вершина x_1 является смежной с вершинами $y_1^2, y_{t_2}^2$);

- справедливо неравенство $m \geq 2$, а также существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G , что для некоторого $t \leq m - 1$ выполнено

$$G = (V(H) \sqcup \{y_1, \dots, y_t\}, E(H) \sqcup \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \dots, \{y_{t-1}, y_t\}, \{y_t, x_2\}\}).$$

Рассмотрим строго сбалансированный граф $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 – простой цикл с $2^{k-2} - 1$ вершинами, G_2 – простой цикл с $2^{k-2} + 1$ вершинами,

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}, \quad E(G) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

Заметим, что G – строго сбалансированный граф с плотностью

$$\rho(G) = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1} = \frac{1}{\alpha}.$$

В силу теоремы 3 справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1 - e^{-1/\alpha(G)}$. Более того, случайный граф $G(n, p)$ не содержит подграфов с максимальной плотностью не меньшей $1/\alpha$ и количеством вершин, не превосходящим числа 2^k , с вероятностью, стремящейся к некоторому положительному числу. А вероятность того, что случайный граф $G(n, p)$ не содержит подграфов с максимальной плотностью большей $1/\alpha$ и количеством вершин, не превосходящим числа 2^k , стремится к 1.

Пусть граф H_1 содержит G и не содержит подграфов с плотностью большей $1/\alpha$ и количеством вершин, не превосходящим числа 2^k , а граф H_2 не содержит подграфов с плотностью, не меньшей $1/\alpha$, и количеством вершин, не превосходящим числа 2^k . Для доказательства теоремы 5 нам достаточно предъявить выигрышную стратегию Новатора в игре $\text{EHR}(H_1, H_2, k)$.

Пусть в первом раунде Новатор выбирает вершину $x_1 = x$, а Консерватор выбирает некоторую вершину $y_1 \in V(H_2)$. По определению графа H_2 в нем не найдется двух таких различных циклических v_1 - и v_2 -расширений графа $(\{y_1\}, \emptyset)$, что

$$v_1 \leq 2^{k-2} - 1, \quad v_2 \leq 2^{k-2} + 1.$$

Предположим, что C – наименьшее по количеству вершин циклическое расширение графа $(\{y_1\}, \emptyset)$ (в силу теоремы 6 мы будем считать, что в графе H_2 всегда найдется простой цикл, содержащий вершину y_1). Рассмотрим две ситуации.

Случай 1. Пусть $v(C)$ – четное число или $v(C) > 2^{k-2} - 1$. В графе G_1 найдется такая вершина x_2 , что цикл G_1 есть объединение двух цепей L_1 и L_2 , соединяющих вершины x_1 и x_2 . При этом

$$e(L_1) = 2^{k-3} - 1, \quad e(L_2) = 2^{k-3}.$$

Новатор выбирает во втором раунде вершину x_2 . Консерватор выбирает некоторую вершину $y_2 \in V(H_2)$. Очевидно, либо в H_2 не существует цепи с $2^{k-3} - 1$ ребрами, соединяющей вершины y_1 и y_2 , либо в H_2 не существует цепи с 2^{k-3} ребрами, соединяющей вершины y_1 и y_2 . Если $k = 4$, то в первом случае Консерватор проигрывает уже во втором раунде, так как $x_1 \sim x_2$. Во втором случае Консерватор проигрывает

в третьем раунде, если Новатор выбирает третью вершину графа G_1 , соединенную с каждой из x_1 и x_2 .

Пусть $k > 4$. Если $d_{H_2}(y_1, y_2) > 2^{k-3} - 1$, то Новатор в третьем раунде выберет такую вершину $x_3 \in V(L_1)$, что

$$d_{L_1}(x_1, x_3) = 2^{k-4} - 1, \quad d_{L_1}(x_2, x_3) = 2^{k-4}.$$

Если $d_{H_2}(y_1, y_2) \leq 2^{k-3} - 1$, то Новатор выберет такую вершину $x_3 \in V(L_2)$, что $d_{L_2}(x_1, x_3) = d_{L_2}(x_2, x_3) = 2^{k-4}$. Очевидно, в обоих случаях, какую бы вершину y_3 не выбрал Консерватор,

$$\text{либо } d_{H_2}(y_1, y_3) \neq d_{H_1}(x_1, x_3), \quad \text{либо } d_{H_2}(y_2, y_3) \neq d_{H_1}(x_2, x_3).$$

Пусть по окончании r -го раунда, $r \in \{3, \dots, k-2\}$, Новатором выбраны вершины $x_1, \dots, x_r$ в графе H_1 , а Консерватором – вершины $y_1, \dots, y_r$ в графе H_2 . При этом вершины $x_1, \dots, x_r$ принадлежат некоторой цепи L_j , $j \in \{1, 2\}$, в которой вершина x_r находится между некоторыми вершинами $x_{i_1(r)}$ и $x_{i_2(r)}$, $i_1(r), i_2(r) \in \{1, \dots, r-1\}$,

$$d_{L_j}(x_{i_1(r)}, x_r) = d_{H_1}(x_{i_1(r)}, x_r) \in \{2^{k-r-1}, 2^{k-r-1} - 1\},$$

$$d_{L_j}(x_{i_2(r)}, x_r) = d_{H_1}(x_{i_2(r)}, x_r) \in \{2^{k-r-1}, 2^{k-r-1} - 1\}.$$

Кроме того,

$$\text{либо } d_{H_1}(x_{i_1(r)}, x_r) \neq d_{H_2}(y_{i_1(r)}, y_r), \quad \text{либо } d_{H_1}(x_{i_2(r)}, x_r) \neq d_{H_2}(y_{i_2(r)}, y_r).$$

В первом случае Новатор выбирает вершину x_{r+1} цепи L_j , лежащую между $x_{i_1(r)}$ и x_r , таким образом, что величина

$$|d_{L_j}(x_{i_1(r)}, x_{r+1}) - d_{L_j}(x_r, x_{r+1})|$$

минимальна. Во втором случае Новатор выбирает вершину x_{r+1} цепи L_j , лежащую между $x_{i_2(r)}$ и x_r , таким образом, что величина

$$|d_{L_j}(x_{i_2(r)}, x_{r+1}) - d_{L_j}(x_r, x_{r+1})|$$

минимальна. Очевидно, какую бы вершину y_{r+1} не выбрал Новатор, либо

$$d_{H_1}(x_r, x_{r+1}) \neq d_{H_2}(y_r, y_{r+1}), \quad d_{H_1}(x_r, x_{r+1}) \in \{2^{k-r-2}, 2^{k-r-2} - 1\},$$

либо для некоторого $s \in \{1, 2\}$ выполнено

$$d_{H_1}(x_{i_s(r)}, x_{r+1}) \neq d_{H_2}(y_{i_s(r)}, y_{r+1}), \quad d_{H_1}(x_{i_s(r)}, x_{r+1}) \in \{2^{k-r-2}, 2^{k-r-2} - 1\}.$$

Таким образом, Новатор выигрывает либо к концу раунда с номером $k-2$, либо к концу раунда с номером $k-1$. Действительно, возможны две ситуации. Либо $r = k-2$ и для некоторого $i(r) \in \{1, \dots, k-3\}$

$$d_{H_2}(y_{i(r)}, y_r) > d_{H_1}(x_{i(r)}, x_r) = 1$$

(следовательно, Новатор выигрывает), либо $r = k-1$ и для некоторых $i_1(r), i_2(r) \in \{1, \dots, k-2\}$

$$d_{H_1}(x_{i_1(r)}, x_r) = d_{H_1}(x_{i_2(r)}, x_r) = 1,$$

при этом одно из чисел $d_{H_2}(y_{i_1(r)}, y_r)$, $d_{H_2}(y_{i_2(r)}, y_r)$ больше 1. Следовательно, Новатор выигрывает.

Случай 2. Пусть $v(C) \leq 2^{k-2} - 1$ и $v(C)$ – нечетное число. В графе G_2 найдется такая вершина x_2 , что цикл G_2 есть объединение двух цепей L_1 и L_2 , соединяющих вершины x_1 и x_2 . При этом

$$e(L_1) = 2^{k-3}, \quad e(L_2) = 2^{k-3} + 1.$$

Новатор выбирает во втором раунде вершину x_2 . Консерватор выбирает некоторую вершину $y_2 \in V(H_2)$. Если в H_2 не существует цепи с 2^{k-3} ребрами, соединяющей вершины y_1 и y_2 , или не существует цепи с $2^{k-3} + 1$ ребрами, соединяющей вершины y_1 и y_2 , то Новатор выигрывает либо в $(k-1)$ -м, либо в k -м раунде, придерживаясь той же стратегии, что и в случае 1.

Пусть в H_2 существует цепь $\tilde{L}_1$ с 2^{k-3} ребрами, соединяющая вершины y_1 и y_2 и цепь $\tilde{L}_2$ с $2^{k-3} + 1$ ребрами, соединяющая вершины y_1 и y_2 . Обозначим y_3 вершину степени 1 графа $C \cap (\tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2)$, отличную и от y_1 , и от y_2 . Новатор в третьем раунде выбирает y_3 , а Консерватор выбирает некоторую вершину x_3 . Если две самые короткие цепи, соединяющие вершины x_1 и x_3 в H_1 , изоморфны двум самым коротким цепям, соединяющим вершины y_1 и y_3 в H_2 , то $x_3 \in V(G_1)$. Следовательно, $d_{H_1}(x_2, x_3) > 2^{k-2}$ (иначе граф H_1 содержал бы подграф, количество вершин которого меньше 2^k , а плотность превосходит $1/\alpha$). Так как связная компонента графа $\tilde{L}_1|_{V(\tilde{L}_1) \cap V(\tilde{L}_2) \setminus \{y_1\}}$, содержащая y_3 , – цепь длины не более $2^{k-3} - 1$, то Новатор победит, выбирая в дальнейшем вершины только из этой цепи и придерживаясь стратегии, описанной в случае 1.

Если же в графе G_1 не найдется двух цепей, соединяющих вершины x_1 и x_3 в H_1 и изоморфных $\tilde{L}_1 \cap C$ и $\tilde{L}_2 \cap C$ (пусть, например, не найдется цепи, изоморфной $\tilde{L}_1 \cap C$), то Новатор победит, выбирая в дальнейшем вершины только из цепи $\tilde{L}_1 \cap C$ и придерживаясь стратегии, описанной в случае 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Zhukovskii, “Zero-one k -law”, *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.
- [2] М. Е. Жуковский, “Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной”, *Докл. РАН*, **436**:1 (2011), 14–18.
- [3] М. Е. Zhukovskii, “On the convergence of probabilities of the random graph properties expressed by first-order formulae with a bounded quantifier depth”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **4**:2 (2014).
- [4] M. E. Zhukovskii, “On the zero-one k -law extensions”, *Proc. of the 16th International Conference “Random Structures and Algorithms”* (Poznań, August 5–9, 2013) (to appear).
- [5] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [6] B. Bollobás, “Threshold functions for small subgraphs”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.
- [7] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [8] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [9] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е издание, Физматлит, М., 2004.

- [10] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [11] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011.
- [12] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000.
- [13] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 1997.
- [14] S. Shelah, J. H. Spencer, “Zero-one laws for sparse random graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.
- [15] J. Spencer, *The Strange Logic of Random Graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [16] M. McArthur, “The asymptotic behavior of $L_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs”, *Logic and Random Structures*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 53–63.
- [17] М. Е. Жуковский, “О наибольшей критической точке в k -законе нуля или единицы”, *Матем. сб.* (в печати).
- [18] J. H. Spencer, “Counting extensions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **55**:2 (1990), 247–255.
- [19] A. Ehrenfeucht, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Fund. Math.*, **49** (1960), 129–141.

М. Е. Жуковский

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступило

20.05.2014

Исправленный вариант

18.09.2014