Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Белоглазов, А. В. Дмитрук, О равномерной сходимости решений управляемой системы интегральных уравнений типа Вольтерра, линейной по управлению, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 333–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:11:05

О равномерной сходимости решений управляемой системы интегральных уравнений типа Вольтерры, линейной по управлению

Ю. И. Белоглазов, А. В. Дмитрук

Для указанной в заглавии системы интегральных уравнений предложено требование на сходимость управлений, гарантирующее равномерную сходимость решений этой системы. Это требование слабее слабой сходимости. Рассмотрены примеры.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10515

1. Постановка задачи и основной результат. Рассматривается управляемая система интегральных уравнений типа Вольтерры, линейная по управлению:

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^t F(t, s, x(s))u(s) ds. \quad (1)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x \in C^m[0, T]$ (m -мерная непрерывная функция), $u \in L_1^r[0, T]$ (r -мерная интегрируемая функция), $\xi \in AC^m[0, T]$ (m -мерная абсолютно непрерывная функция). Отрезок времени $[0, T]$ фиксирован. Функция $x(t)$ называется *фазовой переменной*, $u(t)$ — *управлением*. Будем считать, что функция $F(t, s, x)$ определена и непрерывна вместе со своими первыми производными по t, s, x на некотором открытом множестве $Q \subset \mathbb{R}^{2+m}$.

Положим

$$\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

При заданных $\xi \in AC^m[0, T]$ и $u \in L_1^r[0, T]$ *решением системы (1)* будем называть функцию $x \in C^m[0, T]$, для которой ее “расширенный график” $\{(t, s, x(s)) : (t, s) \in \Delta\}$ содержится в Q , и при каждом t выполнено (1). При этом ясно, что $x(0) = \xi(0)$. Аналогично вводится понятие решения системы (1) на меньшем отрезке. Отметим, что при сделанных предположениях $x(t)$ будет, конечно, абсолютно непрерывна, однако нам будет удобно считать, что решения являются элементами пространства $C^m[0, T]$.

Нас будет интересовать вопрос равномерной сходимости решений уравнения (1) при некоторой возможно более слабой сходимости управлений. Подобные вопросы рассматривались в работах [1]–[5]. В работах [1], [4] исследованы вопросы о сходимости решений дифференциальных уравнений. В работе [3] исследована сходимость

решений интегральных уравнений типа Вольтерры в зависимости от сходимости подынтегральных функций. Однако результаты этих работ в общем случае не сравнимы с результатом данной работы.

Перейдем к формулировке основного результата работы. Вместе с фазовой переменной $x(t)$ введем также дополнительную фазовую переменную $y(t) = \int_0^t u(s) ds$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторых функций $\hat{\xi}, \hat{u}$ система (1) имеет решение $\hat{x}$. Пусть последовательность (ξ_n, u_n) такова, что $\|\xi_n - \hat{\xi}\|_C \rightarrow 0$, $\|\dot{\xi}_n\|_1 \leq \text{const}$ и

$$\|u_n - \hat{u}\|_1 \cdot \|y_n - \hat{y}\|_C \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $y_n, \hat{y}$ соответствуют $u_n, \hat{u}$. Тогда для достаточно больших n система (1) при соответствующих ξ_n, u_n имеет единственное решение x_n , и последовательность этих решений равномерно сходится к $\hat{x}$.

Поясним условие (2). Если $u_n \xrightarrow{\text{слабо}} \hat{u}$ в пространстве L_1 (относительно функционалов из L_∞), то, как хорошо известно, $\|y_n - \hat{y}\|_C \rightarrow 0$, и условие (2) заведомо выполнено (ибо слабо сходящаяся последовательность ограничена по норме).

Более того, пусть

$$\|u_n - \hat{u}\|_1 \leq \text{const}, \quad \|y_n - \hat{y}\|_C \rightarrow 0 \quad (3)$$

(эта сходимость слабее слабой сходимости u_n ; она рассмотрена в работе [1]); тогда по-прежнему условие (2) выполнено.

Однако из сходимости в смысле (2), вообще говоря, не следует сходимость (3) и тем более слабая сходимость u_n (примером может служить последовательность $u_n(t) = n \sin(n^3 t)$), поэтому сходимость $u_n \rightarrow \hat{u}$ в смысле (2) можно условно назвать “очень слабой”. Стоит отметить, что поскольку условие (2) задано в мультипликативной форме, почленная сумма последовательностей, сходящихся в смысле (2), может уже не быть таковой (например, для последовательностей $v_n = 1/n$, $u_n = n \sin(n^3 t)$). Таким образом, эта сходимость не согласована с линейной структурой пространства L_1 . Тем не менее, она представляет интерес, так как, по-видимому, является наиболее слабым требованием, гарантирующим равномерную сходимость решений.

В работе [3] с одной стороны рассматривается более общая ситуация, когда последовательность подынтегральных функций не параметризуется управлением, а сама является сходящейся. В то же время последовательность управлений, удовлетворяющая условию (2), может не удовлетворять условиям работы [3]. Близкое к условию (2) требование сходимости рассматривается в работе [4] для ОДУ. Это требование не вытекает из условия (2). С другой стороны, для последовательности функций $u_n(t)$, равных $e^{(n^2-n)} \sin(e^{n^2} \pi t)$ на отрезках $[0, e^{-n^2}]$ и нулю вне них, условия работы [4] не выполнены, тогда как она сходится в смысле (2) к нулю.

Отметим, что интегральная система уравнений вида

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^t (F_0(t, s, x(s)) + F(t, s, x(s))u(s)) ds, \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

сводится к (1) путем введения дополнительного управления $u_0(t) \equiv 1$. Тем самым теорема 1 справедлива и для такого, формально более общего уравнения.

Доказательство теоремы 1 будет разбито на ряд этапов (утверждений).

2. Некоторые предварительные утверждения. Итак, пусть $\hat{x}$ – решение системы (1). Для любого $\sigma > 0$ будем называть σ -окрестностью следующую окрестность графика функции $\hat{x}$:

$$\Omega_\sigma = \{(s, x) : 0 \leq s \leq T, |x - \hat{x}(s)| < \sigma\}.$$

Зафиксируем любое $\sigma > 0$ такое, что для всех $(t, s) \in \Delta$ и для всех $(s, x) \in \bar{\Omega}_\sigma$ тройка $(t, s, x) \in Q$ (черта сверху обозначает замыкание множества). Положим

$$M = \sup\{|F(t, s, x)|, |F_t(t, s, x)|, |F_s(t, s, x)|, |F_x(t, s, x)| : (t, s) \in \Delta, (s, x) \in \bar{\Omega}_\sigma\}.$$

Под $|F_x(t, s, x)|$ условимся понимать $\sum_k |F_{x^k}(t, s, x)|$, где x^k есть k -я компонента вектора x . Из непрерывности функции F и ее производных на Q и компактности указанного множества (t, s, x) следует, что $M < \infty$. Отметим, что при этом F липшицева по x с константой M на этом множестве.

Вместе с глобальным решением нам будет удобно рассматривать также и локальные решения. Для этого введем следующее уравнение:

$$x(t) = \beta(t) + \int_\tau^t F(t, s, x(s))u(s) ds, \quad t \in [\tau, \tau + h]. \quad (5)$$

При данных

$$\tau \in [0, T), \quad h \in (0, T - \tau], \quad u \in L_1^r[\tau, \tau + h], \quad \beta \in C^m[\tau, \tau + h]$$

его решением на отрезке $[\tau, \tau + h]$ будем называть непрерывную функцию $x(t)$, для которой при всех (t, s) таких, что $\tau \leq s \leq t \leq \tau + h$, тройка $(t, s, x(s)) \in Q$ и при этом выполнено равенство (5).

Следующая теорема устанавливает существование решения уравнения (5) для некоторого $h > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tau \in [0, T)$, $u \in L_1^r[\tau, T]$, и пусть $\beta \in C^m[\tau, T]$ такое, что

$$|\beta(\tau) - \hat{x}(\tau)| < \sigma.$$

Тогда существует $h > 0$ такое, что уравнение (5) имеет решение на отрезке $[\tau, \tau + h]$, которое лежит в Ω_σ .

С помощью теоремы 2 мы будем устанавливать локальное существование уравнения (1). Для ее доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные конструкции и леммы.

Для начала фиксируем произвольные $\tau \in [0, T)$, $u \in L_1^r[\tau, T]$ и $\beta \in C^m[\tau, T]$, удовлетворяющие условию теоремы.

Для любого $h \in (0, T - \tau]$ введем множество

$$G_h = \{x \in C^m[\tau, \tau + h] : \|x - \hat{x}\| \leq \sigma\},$$

где σ было введено в начале раздела. При заданном h (и фиксированных выше τ , u , β) определим оператор

$$S_h : G_h \rightarrow C^m[\tau, \tau + h],$$

действующий следующим образом:

$$x(t) \mapsto \beta(t) + \int_{\tau}^t F(t, s, x(s))u(s) ds.$$

Таким образом, уравнение (5) эквивалентно равенству $x = S_h(x)$. Покажем, что при достаточно малом h оператор S_h является сжимающим со сколь угодно малой константой.

Пусть $\mu(\alpha)$ есть модуль интегрируемости функции $u(t)$, т.е.

$$\mu(\alpha) = \sup_B \int_B |u(s)| ds,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым множествам B меры $\leq \alpha$. Как известно, $\mu(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +0$.

ЛЕММА 1. *Для любого $h \in (0, T - \tau]$ оператор $S_h(x)$ липшицев на G_h с константой*

$$b(h) = M\mu(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in G_h$. Тогда, поскольку функция F липшицева по x с константой M ,

$$\begin{aligned} \|S_h(x_1) - S_h(x_2)\| &= \max_{t \in [\tau, \tau+h]} \left| \int_{\tau}^t (F(t, s, x_1(s)) - F(t, s, x_2(s))) \cdot u(s) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [\tau, \tau+h]} \int_{\tau}^t M \cdot |x_1(s) - x_2(s)| \cdot |u(s)| ds \\ &\leq M \cdot \|x_1 - x_2\|_C \cdot \int_{\tau}^{\tau+h} |u(s)| ds \leq M \cdot \mu(h) \cdot \|x_1 - x_2\|_C, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Положим $P_h = I - S_h$, где I – тождественный оператор. Уравнение (5) эквивалентно равенству $P_h(x) = 0$. Из леммы 1 и теоремы Люстерника–Милютина о сумме накрывающего и сжимающего операторов (см. например [6]) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого $h \in (0, T - \tau]$ такого, что $M\mu(h) < 1$, оператор P_h накрывает на G_h с константой $a(h) = 1 - M\mu(h)$, т.е. для любого замкнутого шара $B_r(x)$ радиуса r с центром в некоторой точке x и содержащегося в G_h выполнено включение*

$$P_h(B_r(x)) \supset B_{a(h)r}(P_h(x)).$$

Оценим значение оператора P_h в точке $\hat{x}$. Пусть $\gamma(h)$ есть модуль непрерывности функции $\hat{x} - \beta$. По определению $\gamma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

ЛЕММА 2. *Для любого $h \in (0, T - \tau]$ справедлива оценка*

$$\|P_h(\hat{x})\|_C \leq |\hat{x}(\tau) - \beta(\tau)| + \gamma(h) + M\mu(h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$\begin{aligned} \|P_h(\hat{x})\|_C &= \max_{t \in [\tau, \tau+h]} \left| (\hat{x}(t) - \beta(t)) - \int_{\tau}^t F(t, s, \hat{x}(s))u(s) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [\tau, \tau+h]} \left| \hat{x}(\tau) - \beta(\tau) \right| + \gamma(t - \tau) + M\mu(t - \tau). \end{aligned}$$

Из полученного неравенства очевидно следует утверждение леммы.

(Отметим, что поскольку τ фиксировано, необязательно использовать в доказательстве модуль интегрируемости функции u . Здесь достаточно свойства непрерывности интеграла по верхнему пределу.)

Теперь мы можем привести

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $h \in (0, T - \tau]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|\hat{x}(\tau) - \beta(\tau)| + \gamma(h) + M\mu(h) < (\sigma - \varepsilon)(1 - M\mu(h)). \quad (6)$$

Поскольку $|\hat{x}(\tau) - \beta(\tau)| < \sigma$, а $\gamma(h) \rightarrow 0$ и $\mu(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то такие h, ε найдутся.

Мы хотим показать, что для указанного h в множестве G_h есть элемент x , обнуляющий оператор P_h и такой, что $\|x - \hat{x}\|_C < \sigma$. По следствию 1 леммы 1,

$$P_h(B_{\sigma-\varepsilon}(\hat{x})) \supset B_{(\sigma-\varepsilon)a(h)}(P_h(\hat{x})). \quad (7)$$

Из леммы 2 и неравенства (6) следует, что

$$\|P_h(\hat{x})\| < (\sigma - \varepsilon)a(h). \quad (8)$$

Поэтому, согласно (7), в шаре $B_{(\sigma-\varepsilon)a(h)}(\hat{x})$ существует x такое, что $P_h(x) = 0$, т.е. $x(t)$ есть решение (5) и при этом оно лежит в σ -окрестности. Теорема 2 доказана.

Установим также единственность решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть при данных u, τ, β , уравнение (5) имеет на некотором отрезке $[\tau, \tau + h]$ два решения $x_1(t), x_2(t)$, оба лежащие в σ -окрестности. Тогда они совпадают:

$$x_1(t) = x_2(t), \quad t \in [\tau, \tau + h].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим модуль разности этих решений на $[\tau, \tau + h]$:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &= \left| \int_{\tau}^t (F(t, s, x_1(s)) - F(t, s, x_2(s))) \cdot u(s) ds \right| \\ &\leq \int_{\tau}^t M \cdot |x_1(s) - x_2(s)| \cdot |u(s)| ds. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла получаем, что $x_1(t) - x_2(t) = 0$ для любых $t \in [\tau, \tau + h]$, что и требовалось доказать.

Вернемся к уравнению (1). Из теоремы 3 в частности следует, что если уравнение (1) при данных ξ, u имеет решения x, x' на отрезках $[0, \tau], [0, \tau']$ соответственно, где $\tau' > \tau$, то на $[0, \tau]$ они совпадают: $x(t) = x'(t)$.

Установим лемму о продолжении решения.

ЛЕММА 3. Пусть $x(t)$ есть решение уравнения (1), лежащее в σ -окрестности на отрезке $[0, \tau]$, $\tau \in (0, T)$. Тогда его можно продолжить на некоторый больший отрезок $[0, \tau']$, $\tau' > \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо показать, что найдется такое $h > 0$, что данное решение можно продолжить на отрезок $[0, \tau + h]$. Таким образом, для $t \in [\tau, \tau + h]$ получаем уравнение

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^\tau F(t, s, x(s))u(s) ds + \int_\tau^t F(t, s, x(s))u(s) ds. \quad (9)$$

Положив

$$\beta(t) = \xi(t) + \int_0^\tau F(t, s, x(s))u(s) ds,$$

получаем, что x должно удовлетворять уравнению

$$x(t) = \beta(t) + \int_\tau^t F(t, s, x(s))u(s) ds, \quad t \in [\tau, \tau + h]. \quad (10)$$

Ясно, что $\beta \in C^m[0, T]$ и $\beta(\tau) = x(\tau)$. Поэтому $|\beta(\tau) - \hat{x}(\tau)| < \sigma$. Тогда по теореме 2 при некотором $h > 0$ уравнение (10), а следовательно, и (9) имеет решение на отрезке $[\tau, \tau + h]$, лежащее в σ -окрестности. Тем самым мы получаем искомое решение уравнения (1) на отрезке $[0, \tau + h]$. Лемма 3 доказана.

Следующая лемма устанавливает существование максимального продолжения решения системы (1) в σ -окрестности.

ЛЕММА 4. Для любой функции $\xi \in AC^m[0, T]$ такой, что $|\xi(0) - \hat{x}(0)| < \sigma$, и любой $u \in L_1^r[0, T]$ найдется $\rho = \rho(\xi, u) > 0$ такое, что решение x системы (1) существует на отрезке $[0, \rho]$, и выполняется хотя бы одно из условий:

- а) $\rho = T$, и для всех $t \in [0, T]$ справедливо $|x(t) - \hat{x}(t)| < \sigma$;
- б) $\rho \leq T$, $|x(\rho) - \hat{x}(\rho)| = \sigma$, и для всех $t \in [0, \rho]$ справедливо $|x(t) - \hat{x}(t)| < \sigma$.

Ясно, что такое ρ определено однозначно. Будем называть его первым моментом выхода решения x на границу σ -окрестности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 уравнение (1) имеет решение на отрезке $[0, \tau_0]$ при некотором $\tau_0 > 0$, лежащее в σ -окрестности. Пусть ρ есть точная верхняя грань всех $\tau \leq T$, для которых решение имеется на $[0, \tau]$ и лежит в σ -окрестности.

Возьмем любую возрастающую последовательность $\tau_n \rightarrow \rho$. Как было установлено выше, решение на большем отрезке всегда является продолжением решения на меньшем отрезке, поэтому можно говорить о продолжении одного и того же решения. Тогда для всех n имеем решение $x(t)$ уравнения (1) на отрезке $[0, \tau_n]$ и, следовательно, на полуинтервале $[0, \rho)$. Так как в силу уравнения (1) функция x абсолютно непрерывна, существует предел $x(\tau_n)$, и можно положить $x(\rho)$ равным этому пределу.

При этом возможны следующие случаи. Если $\rho = T$, то лемма 4 доказана. Пусть $\rho < T$. Допустим, что $|x(\rho) - \hat{x}(\rho)| < \sigma$. Тогда по лемме 3 решение можно продолжить на некоторый отрезок $[0, \rho']$, где $\rho' > \rho$, что противоречит определению ρ . Поэтому $|x(\rho) - \hat{x}(\rho)| = \sigma$, и лемма также доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\Delta u_n = u_n - \hat{u}, \quad \Delta y_n = y_n - \hat{y}.$$

Отметим, что условие (2) равносильно условию $\|u_n\|_1 \cdot \|\Delta y_n\|_C \rightarrow 0$. Без ограничения общности считаем, что все ξ_n подчинены условию леммы 4, поэтому для каждого решения x_n , соответствующего (ξ_n, u_n) , имеется первый момент $\rho_n > 0$ выхода его на границу σ -окрестности. Таким образом, если $|\Delta x_n(\rho_n)| < \sigma$, то $\rho_n = T$.

Рассмотрим уравнение (1) на отрезке $[0, \rho_n]$ и оценим разность решений $\Delta x_n = x_n - \hat{x}$ на этом отрезке:

$$\begin{aligned} |\Delta x_n(t)| &= |x_n(t) - \hat{x}(t)| \\ &= \left| \Delta \xi_n(t) + \int_0^t F(t, s, x_n(s)) u_n(s) ds - \int_0^t F(t, s, \hat{x}(s)) \hat{u}(s) ds \right| \\ &= \left| \Delta \xi_n(t) + \int_0^t (F(t, s, x_n(s)) u_n(s) - F(t, s, x_n(s)) \hat{u}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (F(t, s, x_n(s)) \hat{u}(s) - F(t, s, \hat{x}(s)) \hat{u}(s)) ds \right| \\ &\leq \|\Delta \xi_n\|_C + \left| \int_0^t F(t, s, x_n(s)) \Delta u_n(s) ds \right| + \int_0^t M |\Delta x_n(s)| |\hat{u}(s)| ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Первый член в правой части последнего неравенства стремится к 0 по условию. Мы утверждаем, что и второй член стремится к 0. Покажем это. Беря соответствующий интеграл по частям, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t F(t, s, x_n(s)) \Delta u_n(s) ds \right| \\ &= \left| F(t, t, x_n(t)) \Delta y_n(t) + \int_0^t (F_s(t, s, x_n(s)) + F_x(t, s, x_n(s)) \dot{x}_n(s)) \Delta y_n(s) ds \right| \\ &\leq |F(t, t, x_n(t))| |\Delta y_n(t)| + \int_0^t |F_s(t, s, x_n(s))| |\Delta y_n(s)| ds \\ &\quad + \int_0^t |F_x(t, s, x_n(s))| |\dot{x}_n(s)| |\Delta y_n(s)| ds. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в правой части неравенства оцениваются через

$$M \|\Delta y_n\|_C + MT \|\Delta y_n\|_C \rightarrow 0.$$

Таким образом осталось оценить последнее слагаемое. Учитывая, что

$$\dot{x}_n(s) = \dot{\xi}_n(s) + F(s, s, x_n(s)) u_n(s) + \int_0^s F_t(s, \tau, x_n(\tau)) u_n(\tau) d\tau,$$

получаем

$$|\dot{x}_n(s)| \leq |\dot{\xi}_n(s)| + |F(s, s, x_n(s))| |u_n(s)| + \int_0^s |F_t(s, \tau, x_n(\tau))| |u_n(\tau)| d\tau,$$

и тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t |F_x(t, s, x_n(s))| |\dot{x}_n(s)| |\Delta y_n(s)| ds \\
 & + \int_0^t |F_x(t, s, x_n(s))| |\dot{\xi}_n(s)| |\Delta y_n(s)| ds \\
 & + \int_0^t |F_x(t, s, x_n(s))| |F(s, s, x_n(s))| |u_n(s)| |\Delta y_n(s)| ds \\
 & + \int_0^t |F_x(t, s, x_n(s))| \left(\int_0^s |F_t(s, \tau, x_n(\tau))| |u_n(\tau)| d\tau \right) |\Delta y_n(s)| ds \\
 & \leq M \|\dot{\xi}_n\|_1 \|\Delta y_n\|_C + M^2 \|u_n\|_1 \|\Delta y_n\|_C + M^2 T \|u_n\|_1 \|\Delta y_n\|_C.
 \end{aligned}$$

Это неравенство выполнено для любого $t \in [0, \rho_n]$. В условиях теоремы его правая часть стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, из (11) следует, что

$$|\Delta x_n(t)| \leq \varepsilon_n + \int_0^t M |\Delta x_n(s)| |\hat{u}(s)| ds, \quad (12)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По лемме Гронуолла

$$\max_{t \in [0, \rho_n]} \|\Delta x_n(t)\| \leq M_1 \varepsilon_n, \quad (13)$$

где константа M_1 зависит только от M и $\|\hat{u}\|_1$. При достаточно больших n правая часть этого неравенства меньше σ , поэтому согласно лемме 4 соответствующие решения $x_n(t)$ существуют на всем отрезке $[0, T]$ и, поскольку $\varepsilon_n \rightarrow 0$, равномерно сходятся к $\hat{x}(t)$. Теорема 1 доказана.

4. Примеры.

ПРИМЕР 1. Покажем, что условие (2) нельзя заменить на более слабое условие $\|y_n - \hat{y}\|_C \rightarrow 0$. (Фактически это модификация примера из [2]).

На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим следующую систему (т.н. неголономный интегратор):

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = u^1, & y^1(0) = 0, \\ \dot{y}^2 = u^2, & y^2(0) = 0, \\ \dot{z} = y^1 u^2 - y^2 u^1, & z(0) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $x = (y^1, y^2, z) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$.

Положим $\hat{u} = (0, 0)$; тогда $\hat{x} = (0, 0, 0)$. Пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, есть произвольная липшицева с константой 1 кривая на плоскости, удовлетворяющая условиям $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$, и охватывающая площадь

$$\frac{1}{2} \oint \gamma^1 d\gamma^2 - \gamma^2 d\gamma^1 = S > 0.$$

Ясно, что при этом $A = \|\dot{\gamma}\|_1 > 0$.

Пусть $\tilde{y}(t)$ есть периодическое продолжение $\gamma(t)$ на всю прямую. Построим последовательность $y_n(t) = \varepsilon_n \tilde{y}(nt)$, $u_n(t) = \dot{y}_n(t)$, $t \in [0, 1]$. При этом $\|u_n(t)\|_1 = \varepsilon_n n A$.

Пусть теперь $\varepsilon_n \rightarrow 0$, но $(\varepsilon_n)^2 n \geq 1$. (Для этого достаточно положить $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n}$.) Тогда (2) не выполнено, но y_n равномерно сходятся к $\hat{y} = 0$, и при этом

$$z_n(1) = \int_0^1 (y_n^1 \dot{y}_n^2 - y_n^2 \dot{y}_n^1) dt$$

есть $2n$ -кратная площадь, описываемая кривой $\varepsilon_n \gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, т.е.

$$z_n(1) = 2(\varepsilon_n)^2 n S \geq 2S$$

и, следовательно, z_n не стремится к 0.

ПРИМЕР 2. Покажем, что в теореме 1 условие равномерной ограниченности $\|\dot{\xi}_n\|_1$ существенно. Рассмотрим систему

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^t x(s)u(s) ds, \quad t \in [0, \pi]. \quad (15)$$

Пусть

$$\xi_n(t) = -\frac{1}{2}t + n^{-1/3} \cos nt - \frac{1}{4}n^{-1} \sin 2nt, \quad u_n(t) = n^{1/3} \cos nt.$$

Ясно, что u_n сходится в смысле (2) к $\hat{u}(t) \equiv 0$, а ξ_n равномерно сходится к $\hat{\xi}(t) = -t/2$, но $\|\dot{\xi}_n\|_1 \rightarrow \infty$. При этом $\hat{x}(t) = -t/2$. Для каждого n уравнение (15) имеет решение $x_n(t) = n^{-1/3} \cos nt$, последовательность которых сходится к 0, а не к $\hat{x}$.

ПРИМЕР 3. Покажем существенность условия дифференцируемости функции F по t в теореме 1. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \xi(t) + a(t) \int_0^t x(s)u(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

Пусть $\xi \in AC[0, T]$, $a \in C[0, T]$, $u \in L_1[0, T]$. Нетрудно проверить, что решение данного уравнения имеет явный вид:

$$x(t) = \xi(t) + a(t) \int_0^t \xi(s)u(s)e^{\int_s^t a(\tau)u(\tau) d\tau} ds, \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Теперь положим

$$\xi(t) \equiv 1, \quad a(t) = t \sin t^{-4},$$

и рассмотрим последовательность

$$u_n(t) = \begin{cases} n^{-5/8} t^{-5} \sin t^{-4}, & \text{при } t \in [\delta_n, T], \\ 0, & \text{при } t \in [0, \delta_n], \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\delta_n^{-4} = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad T^{-4} = \frac{\pi}{2}.$$

При этом

$$y_n(t) = \frac{1}{4} n^{-5/8} (\cos t^{-4} - 1),$$

и для функций $\hat{u}(t) \equiv 0$, $\hat{y}(t) \equiv 0$ выполнено условие (2). Функции $\hat{u}$ отвечает решение $\hat{x}(t) \equiv 1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 за исключением дифференцируемости функции $F(t, s, x) = a(t)x$ по переменной t . Пользуясь формулой (17), можно показать, что для решений, определяемых последовательностью (18), справедливо $|x_n(T)| \rightarrow \infty$. (Соответствующие вычисления довольно громоздкие, мы их опускаем. Отметим лишь, что основную роль здесь играет монотонность функции $b_n(t, s) = \int_s^t a(\tau)u_n(\tau) d\tau$ по s при любом t и тот факт, что $b_n(T, 0) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.)

ЗАМЕЧАНИЕ. В частном случае линейной системы вида

$$x(t) = \xi(t) + \int_0^t (A(t, s)x(s) + B(t, s)u(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

условия сходимости управлений u и гладкости функций A и B , накладываемые теоремой 1, можно существенно ослабить. Однако этот вопрос связан с использованием существенно иной техники и требует отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Liu, H. J. Sussmann, “Continuous dependence with respect to the input of trajectories of control-affine systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **37**:3 (1999), 777–803.
- [2] W. Liu, H. J. Sussmann, “Limits of highly oscillatory controls and the approximation of general paths by admissible trajectories”, *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1 (11–13 Dec 1991, Brighton), 1991, 437–442.
- [3] Z. Artstein, “Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations”, *SIAM J. Math. Anal.*, **6**:3 (1975), 446–456.
- [4] J. Kurzweil, J. Jarník, “Limit processes in ordinary differential equations”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **38**:2 (1987), 241–256.
- [5] G. Buttazzo, G. Dal Maso, “Г-convergence and optimal control problems”, *J. Optim. Theory Appl.*, **38**:3 (1982), 385–407.
- [6] А. В. Дмитрик, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6 (1980), 11–46.

Ю. И. Белоглазов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yubeloglazov@gmail.com

Поступило

21.09.2013

А. В. Дмитрик

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dmitruk@member.ams.org