Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Вложение пространства Соболева и свойства области, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 343–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:30:58

Вложение пространства Соболева и свойства области

О. В. Бесов

Устанавливается вложение пространства Соболева $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ для нерегулярной области G в случае предельного показателя при новых соотношениях параметров, зависящих от геометрических свойств области G .

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10516

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$; $s \in \mathbb{N}$; $1 \leq p < q < \infty$; $L_p(G)$ — лебегово пространство определенных на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций с нормой

$$\|f|L_p(G)\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Все рассматриваемые функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ и их производные $D^\alpha f$, $|\alpha| = s$, локально суммируемы на области своего определения.

Символом $W_p^s(G)$ будем обозначать пространство Соболева с нормой

$$\|f|W_p^s(G)\| = \|f|L_p(G)\| + \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_p(G)\|.$$

Известная теорема вложения Соболева $W_p^m(G) \subset L_q(G)$, характеризующая неравенством

$$\|f|L_q(G)\| \leq C \|f|W_p^s(G)\| = C \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_p(G)\| + \|f|L_p(G)\| \right), \quad (1)$$

$$s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty,$$

установлена им в 1938 г. (см. [1]) для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0.$$

Это соотношение (определяющее максимально возможное значение q в теореме (1)) является и необходимым условием вложения. Результат С. Л. Соболева был перенесен на области более общего вида: области классов $J_{(n-1)/n}$, $I_{p,1/p-1/n}$ (Мазья, 1960,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00684) и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

1975, см. [2]), области с условием Джона (John domains; Решетняк [4], [3]), области с условием гибкого конуса (Бесов, 1983, см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [5]. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с условием гибкого σ -конуса*, если при некоторых $T > 0$, $0 < \kappa_0 \leq 1$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x: [0, T] \rightarrow G, \quad \gamma(0) = x, \quad |\gamma'| \leq 1 \quad \text{п.в.},$$

такой, что

$$\text{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \kappa_0 t^\sigma \quad \text{при } 0 < t \leq T.$$

В случае $\sigma = 1$ такую область называют также областью с *условием гибкого конуса*. Области, не удовлетворяющие условию гибкого конуса, будем называть *нерегулярными*.

Для нерегулярной области (которая в окрестности некоторой точки границы может, в частности, иметь вид внешнего пика) вложение (1) может оказаться неверным ни при каких соотношениях параметров или быть верным при некоторых более сильных ограничениях, связывающих n , s , p , q и зависящих от геометрических свойств области G . Мазья выделил классы областей I_α (1960), $J_{p,\alpha}$ (1975), для которых установил соответственно при $p = 1$ и при $p > 1$ теорему вложения (1) для $s = 1$ с максимально возможным q . Классы I_α , $J_{p,\alpha}$ определяются в терминах изопериметрических или емкостных неравенств.

В [5] показано, в частности, что для области с условием гибкого σ -конуса вложение (1) справедливо при соотношении параметров

$$1 < p < q < \infty, \quad s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{\theta(n-1)+1}{q} \geq 0, \quad \sigma \geq 1, \quad 1 \leq \theta \leq \sigma \quad (2)$$

с $\theta = 1$. Этот результат при $s = 1$ принадлежит Килпелайнену и Малы [6]. Лабутиным установлено [7], что условие (2) с $\theta = 1$ является также и необходимым для данного вложения.

Для области с условием гибкого σ -конуса с границей, удовлетворяющей при этом условию Гёльдера с показателем $1/\sigma$, теорема вложения (1) справедлива и при соотношениях параметров (2) с $\theta = \sigma$, как показано в работах Лабутина [8] (при $s = 1$) и Мазьи–Поборчегго [9] (для изолированного вырожденного конуса при $s \in \mathbb{N}$). В настоящей работе мы, в частности, из класса областей с условием гибкого σ -конуса выделяем подкласс областей, для которых справедлива теорема вложения (1) при условиях (2) с произвольно заданным $\theta \in [1, \sigma]$.

Отметим еще, что Трушным [10], [11] выделены специальные подклассы класса областей с условием гибкого σ -конуса и установлена теорема вложения Соболева при неухудшаемых соотношениях параметров, различных для разных подклассов. Эти результаты для безвесовых случаев обобщены в работе [12] в том отношении, что по сравнению с [10], [11] допускаются некоторые повороты для гибких конусов представления функций. В данной работе обобщаются невесовые результаты из [10], [11].

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ символом $|E|$ обозначается его мера. При $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{p,E} := \|f\|_{L_p(E)}, \quad \|f\|_p := \|f\|_{p,\mathbb{R}^n}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [1, \infty)^n, \\ |\lambda| = \sum_1^n \lambda_i, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 1, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x|_\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^{1/\lambda_i},$$

$Q = [-1, 1]^n$, χ – индикатор Q или $[-1, 1]$, $Q_\lambda(x, d) = x + \prod_{i=1}^n [-d^{\lambda_i}, d^{\lambda_i}]$ при $d > 0$,

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in [1, \infty)^n, \quad \mu_i \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $G_0 \subset G$ – открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $0 < T_0 < T < \infty$, и пусть выполнено условие (3). Множество G_0 будем называть *множеством класса* $\mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$, если для каждого $x \in G_0$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x: [0, t_x] \rightarrow G, \quad T_0 \leq t_x \leq T, \quad \gamma(0) = x,$$

со следующими свойствами:

1°) $|\gamma'(t)| \leq 1$ для п.в. $t \in (0, 1]$;

2°) гибкий конус

$$\bigcup_{0 \leq u \leq t} Q_{\sigma\lambda}(\gamma(u), \varepsilon u) \subset G \cap Q_\mu\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \forall t \in [0, t_x], \quad \sup_{x \in G_0} t_x > 0;$$

3°) выполнено

$$\exists c_0: \int_0^{t_x} t^{-\sigma} \chi\left(\frac{|y - \gamma_x(t)|_{\sigma\lambda}}{\varepsilon t}\right) dt \leq c_0 \quad \forall x \in G_0, \quad \forall y \in G.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении условий 1°), 2°) можно наложить еще определенные ограничения на γ_x , при которых условие 3°) также будет выполнено после возможной замены исходных путей на “правильные” пути. Способ исправления путей предложен в [6] и применен в рассматриваемой ситуации в [5], [10].

Приведем пример области $G_0 \subset \mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$ для $n = 2$ при $\lambda = (1, 1)$, $1 < \mu_1 = \theta \leq \sigma$, $1 = \mu_2$. Рассмотрим путь

$$\Gamma_\theta = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = x_2^\theta \sin(x_2^{1-\theta}) x_2 = \frac{1}{2\theta} t, 0 \leq t \leq 1 + 2\theta \right\}.$$

Заметим, что $|dx_1/dx_2| \leq 2\theta - 1$, $1 + (dx_1/dx_2)^2 \leq (2\theta)^2$, $|d\Gamma_\theta/dt| \leq 1$. Положим

$$G_0 = \text{int} \bigcup_{0 < t \leq 1/2} Q_{\sigma\lambda}((\Gamma_\theta(t), \varepsilon t), \quad G = \text{int} \bigcup_{0 < t \leq 1} Q_{\sigma\lambda}((\Gamma_\theta(t), \varepsilon t), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Область $G_0 \in \mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$ не принадлежит, очевидно, классу $\mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu + (\delta, 0), G)$ ни при каком $\delta > 0$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Kf(x) = \int k(x, y)f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\mu \in [1, \infty)^n$, $\mu_n = 1$. Введем

$$k(x, y, d) = \left(1 - \chi\left(\frac{|y - x|_\mu}{d}\right)\right) k(x, y),$$

$$\|k\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, d > 0} \|k(x, \cdot, d)|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}\| \|Q_\mu(x, d)\|^{1/q}, \quad |Q_\mu(x, d)| = d^{|\mu|}. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА А [13], [14]. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $\|k\|_{p,q} < \infty$. Тогда оператор K имеет слабый (p, q) -тип, причем

$$\sup_{h>0} h^q |\{x \in \mathbb{R}^n : |Kf(x)| > h\}| \leq c_n^q \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-p} \|k\|_{p,q}^q \|f\|_p^q, \quad (5)$$

где c_n – некоторая постоянная, зависящая лишь от размерности n .

Воспользуемся оценкой (3.4) из [13] для $|f(x)|$, полученной с помощью интегрального представления функции по гибкому конусу через ее производные (вывод для разных случаев см. в [5], [11], [12]):

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C \int_0^{t_x} t^{s-1} t^{-\sigma|\lambda|} \int_{|y|_{\sigma\lambda} < \varepsilon t} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(\gamma_x(t) + y)| dy \\ &+ C \int_{|y|_{\sigma} < \varepsilon t_x} |f(\gamma_x(t_x) + y)| dy = CA \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + CBf(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а постоянная C не зависит от x, f .

При выводе интегрального представления, а значит, и (6), считаем, что функция f и все ее частные производные $D_\alpha f$, $|\alpha| = s$, локально суммируемы на G . Само равенство в представлении понимается в $L(G_0, \text{loc})$.

Из (6) следует, что для доказательства вложения (1) достаточно доказать ограниченность операторов $A, B: L_p(G) \rightarrow L_q(G_0)$, $G_0 \in \mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$.

ЛЕММА 1 (основная). Пусть выполнены условия (3), $\sigma \geq 1$, $G_0 \in \mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$,

$$s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty, \quad s - \frac{\sigma(|\lambda| - 1) + 1}{p} + \frac{|\mu|}{q} \geq 0. \quad (7)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой

$$\|Ag|_{L_q(G_0)}\| \leq C \|g|_{L_p(G)}\| \quad \forall g \in L_p(G), \quad (8)$$

$$\|Bf|_{L_q(G_0)}\| \leq C \|f|_{L_p(G)}\| \quad \forall f \in L_p(G). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представив $Ag(x)$ в виде $Ag(x) = \int_G k(x, y) dy$ ($k(x, y) = 0$, если $x \notin G_0$ или $y \notin G$), оценим $\|k\|_{p,q}$, применяя неравенство Гёльдера и используя свойство 3°). Имеем

$$\begin{aligned} \|k(x, \cdot, d)|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}\|^{p'} &= \left\| k(x, \cdot) \left(1 - \chi\left(\frac{|x - \cdot|_\mu}{d}\right)\right) \right\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^{p'} \\ &= \int_{|y-x|_\mu > d} \left[\int_0^{t_x} t^{s-1-\sigma|\lambda|} \chi\left(\frac{|y - \gamma(t)|_{\sigma\lambda}}{t}\right) dt \right]^{p'} dy \\ &\leq C_1 \int \chi\left(\frac{d}{|y-x|_\mu}\right) \int_0^{t_x} t^{[s-1-\sigma(|\lambda|-1/p)]p'} \chi\left(\frac{|y - \gamma(t)|_{\sigma\lambda}}{t}\right) dt dy. \end{aligned}$$

Заметим, что для x, y, γ , стоящих под знаком интеграла, справедливы следующие соотношения:

$$d < |x - y|_\mu \leq |y - \gamma(t)|_\mu + |\gamma(t) - \gamma(0)|_\mu \leq |y - \gamma(t)|_\lambda + |\gamma(t) - \gamma(0)|_\mu \leq t + \frac{1}{\varepsilon} t \leq \frac{2}{\varepsilon} t.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|k(x, \cdot, d)\|_{p'}^{p'} &\leq C_2^{p'} \int_0^{t_x} \chi\left(\frac{\varepsilon d}{2t}\right) t^{[s - \sigma(|\lambda| - 1/p) - 1]p'} \chi\left(\frac{|y - \gamma(t)|_{\sigma\lambda}}{t}\right) dt dy \\ &= C_3^{p'} \int_0^{t_x} \chi\left(\frac{\varepsilon d}{2t}\right) t^{[s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p]p' - 1} dt \\ &= C_3^{p'} \int_{\varepsilon d/2 < t < t_x} t^{[s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p]p' - 1} dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|k(x, \cdot, d)\|_{p'} |Q_\mu(x, d)|^{1/q} &\leq C_3 \left(\int_{\varepsilon d/2 < t < t_x} t^{[s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p]p' - 1} dt \right)^{1/p'} d^{|\mu|/q} \\ &= C_3 I(d, t_x)^{1/p'} d^{|\mu|/q}. \end{aligned}$$

В случае $s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p > 0$ имеем

$$I(d, t_x) \leq C_4 t_x^{s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p}.$$

В случае $s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p = 0$ имеем

$$I(d, t_x) \leq \ln\left(\frac{t_x}{d}\right).$$

В случае $s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p < 0$ имеем

$$I(d, t_x)^{1/p'} \leq C_5 d^{s - (\sigma(|\lambda| - 1) + 1)/p}.$$

Следовательно, $\|k\|_{p,q} < \infty$, так что справедлива оценка (5). С помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича из оценки (5) для оператора A в условиях леммы получаем оценку (8). Оценка (9) устанавливается проще. Ее доказательство содержится в [5], [11]).

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 1 справедлива оценка

$$\|f\|_{L_q(G_0)} \leq C \|f\|_{W_p^s(G)} \quad \forall f \in W_p^s(G). \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (3), открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, каждое из открытых множеств $G_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, J$, $J \in \mathbb{N}$, после некоторого поворота ортогональной системы координат в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством $G_j \in \mathcal{G}(\sigma\lambda, \mu, G)$, $|G \setminus \bigcup_{j=1}^J G_j| = 0$. Тогда при выполнении условия (7) справедлива оценка (1).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях теоремы $\lambda = (1, \dots, 1)$, $\sigma > 1$, $\mu = (\theta, \dots, \theta, 1)$,

$$1 \leq \theta \leq \sigma, \quad s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{\theta(n-1)+1}{q} \geq 0. \quad (11)$$

Тогда справедлива оценка (1).

Покажем, что в условиях леммы 1 последнее из условий (7) является необходимым для справедливости неравенства (10). Ограничимся построением соответствующего примера в случае $n = 2$, $s = 1$. Положим $\mu = (\theta, 1)$, $1 \leq \theta \leq \sigma$, $b = a^\sigma$. Тогда последнее из условий (7) совпадает с последним из условий (11). Пусть $\mathbb{R}_-^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 < 0\}$. Построим сначала зависящую от параметра $a \in (0, 1)$ область $G(a)$, имеющую вид гриба на поляне:

$$G(a) = \mathbb{R}_-^2 \cup \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \times [0, a] \cup \left(-a^\theta - \frac{b}{2}, a^\theta + \frac{b}{2}\right) \times (a, 2a).$$

Пусть $\varphi_a(x_2) = 0$ при $x_2 \leq 0$, $\varphi_a(x_2) = 1$ при $x_2 \in [a, 2a]$, φ_a линейна на $[0, a]$. Рассматривая функцию $\varphi_a(x_2)$ как функцию двух переменных x_1, x_2 , получаем следующие оценки:

$$(2a^\theta + b)a < \|\varphi_a|L_q(G(a))\|^q < (2a^\theta + b)a + ba, \quad \left\|\frac{d}{dx_2}\varphi_a|L_p(G)\right\|^p < ba^{1-p} = a^{\sigma+1-p}.$$

Для справедливости при некотором $C > 0$ неравенства

$$\|\varphi_a|L_q(G(a))\| \leq C\|\varphi_a|W_p^1(G_0(a))\| \quad \forall a \in (0, 1)$$

необходимо, чтобы $a^{(\theta+1)/q} = O(a^{(\sigma+1)/p-1})$ при $a \rightarrow 0$, а, следовательно, необходимым условием справедливости последнего неравенства является условие

$$\frac{\theta+1}{q} \geq \frac{\sigma+1}{p} - 1,$$

совпадающее с последним из условий (7).

Рассмотрим теперь область $G_0 = G$, известную под названием “грибная поляна” (“mushrooms”): $G = \bigcup_{j=1}^\infty G_j$, где $G_j = G(a_j) + (h_j, 0)$, $a_j \rightarrow 0$, а последовательность чисел h_j выбрана так, чтобы “грибы” попарно не пересекались. Рассмотрим последовательность функций f_j , определенных следующим образом: $f_j = \varphi_{a_j}$ на G_j , $f_j = 0$ на $G \setminus G_j$. Тогда приведенные для функции φ_a выкладки показывают, что для справедливости неравенства (10) (с $n = 2$, $s = 1$) для функций f_j при всех j необходимо выполнение последнего из условий (7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1985.
- [3] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [4] Ю. Г. Решетняк, “Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журн.*, **21**:6 (1980), 108–116.
- [5] О. В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 3–26.
- [6] T. Kilpeläinen, J. Malý, “Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries”, *Z. Anal. Anwend.*, **19**:2 (2000), 369–380.

- [7] Д. А. Лабутин, “Неулучшаемость неравенств Соболева для класса нерегулярных областей”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 218–222.
- [8] Д. А. Лабутин, “Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 18*, Тр. МИАН, **227**, Наука, М., 1999, 170–179.
- [9] В. Г. Мазья, С. В. Поборчий, “Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гёльдеровой области”, *Алгебра и анализ*, **18:4** (2006), 95–126.
- [10] Б. В. Трушин, “Непрерывность вложений весовых пространств Соболева в пространства Лебега на анизотропно нерегулярных областях”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 271–289.
- [11] Б. В. Трушин, “Теоремы вложения Соболева для некоторого класса анизотропных нерегулярных областей”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 297–319.
- [12] O. V. Besov, “Sobolev’s embedding theorem for anisotropically irregular domains”, *Eurasian Math. J.*, **2:1** (2011), 32–51; рус. пер.: О. В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для анизотропно нерегулярных областей”, *Тр. МФТИ*, **3:1** (9) (2011), 3–13.
- [13] М. А. Габидзашвили, “Весовые неравенства для анизотропных потенциалов”, *Тр. Тбилисского матем. ин-та*, **82** (1986), 25–36.
- [14] В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили, “О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций”, *Докл. АН СССР*, **282:6** (1985), 1304–1306.
- [15] О. В. Бесов, “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Матем. сб.*, **201:12** (2010), 69–82.

О. В. Бесов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Москва
E-mail: besov@mi.ras.ru

Поступило

07.04.2014