Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Об асимметрии кратных асимптотических свойств эргодических действий, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 432–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:08:49

Об асимметрии кратных асимптотических свойств эргодических действий

В. В. Рыжиков

В статье предъявлено перемешивающее $\mathbb{Z}^2$ -действие, которое не изоморфно своему обратному; рассмотрены $\mathbb{Z}$ -действия с асимметрией свойств частичного кратного перемешивания на последовательностях и частичной кратной жесткости; приведены новые примеры преобразований пространства с бесконечной мерой, не изоморфных своим обратным.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10517

1. Асимметрия кратного перемешивания для $\mathbb{Z}^2$ -действий. В работе [1] Рохлин ввел понятие кратного перемешивания, предполагая, что новый метрический инвариант сможет различать динамические системы с одинаковым спектром. До сих пор не доказано существование перемешивающих преобразований, не обладающих кратным перемешиванием. Однако для $\mathbb{Z}^2$ -действий Ледрапье [2] дал изящное решение $\mathbb{Z}^2$ -аналога этой знаменитой проблемы. Оказалось, что коммутирующие автоморфизмы некоторых компактных коммутативных групп относительно меры Хаара дают примеры перемешивающих действий, не обладающих кратным перемешиванием. Действия типа Ледрапье, как мы покажем, могут обладать асимметрией свойства кратного перемешивания.

Под $\mathbb{Z}^2$ -действием подразумевается вложение Φ группы $\mathbb{Z}^2$ в группу всех обратимых сохраняющих меру преобразований стандартного вероятностного пространства (X, μ) . Также *действием* принято называть образ этого вложения. В примере, который будет рассмотрен ниже, X – компактная коммутативная группа, μ – мера Хаара на X . Коммутирующие преобразования S, T порождают $\mathbb{Z}^2$ -действие Φ , определенное равенством $\Phi(z) = S^{z_1} T^{z_2}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. Действие Φ обладает *перемешиванием*, если для любых измеримых множеств A, B выполнено условие

$$\mu(A \cap \Phi(z)B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

и обладает *перемешиванием кратности 2*, если сходимость

$$\mu(A \cap \Phi(z)B \cap \Phi(w)C) \rightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C), \quad |z|, |w|, |z - w| \rightarrow \infty,$$

имеет место для любых измеримых множеств A, B, C .

ТЕОРЕМА 1. *Существует перемешивающее действие, порожденное коммутирующими преобразованиями S, T , такое, что для некоторой последовательности $n_m \rightarrow +\infty$ для всех измеримых множеств A*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A \cap S^{-n_m} A \cap T^{-n_m} A) = \mu(A)^3,$$

но для некоторого множества A_0 меры $1/2$ для всех n_m выполнено равенство

$$\mu(A_0 \cap S^{n_m} A_0 \cap T^{n_m} A_0) = 0.$$

Иначе говоря, найдется $\mathbb{Z}^2$ -действие, которое кратно перемешивает относительно пары последовательностей $(-n_m, 0)$, $(0, -n_m)$ при $m \rightarrow \infty$, а обратное действие этим свойством не обладает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве фазового пространства действия выбирается коммутативная компактная группа X всех последовательностей $a: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, удовлетворяющих тождеству

$$a(z_1, z_2) + a(z_1 + 1, z_2) + a(z_1, z_2 + 1) = 0.$$

Групповая операция – почленное сложение (mod 2) последовательностей. В качестве вероятностной меры рассматривается мера Хаара μ . Важную роль для дальнейшего играет наблюдение Ледраппе о том, что исходное тождество влечет за собой серию других тождеств:

$$a(z_1, z_2) + a(z_1 + 2^m, z_2) + a(z_1, z_2 + 2^m) = 0. \quad (1)$$

Действительно, из равенства

$$\begin{aligned} & a(z_1, z_2) + a(z_1 + 1, z_2) + a(z_1, z_2 + 1) + a(z_1 + 1, z_2) + a(z_1 + 2, z_2) + a(z_1 + 1, z_2 + 1) \\ & \quad + a(z_1, z_2 + 1) + a(z_1 + 1, z_2 + 1) + a(z_1, z_2 + 2) \\ & = a(z_1, z_2) + a(z_1 + 2, z_2) + a(z_1, z_2 + 2) \end{aligned}$$

имеем

$$0 + 0 + 0 = a(z_1, z_2) + a(z_1 + 2, z_2) + a(z_1, z_2 + 2).$$

Теперь аналогично получаем $a(z_1, z_2) + a(z_1 + 4, z_2) + a(z_1, z_2 + 4) = 0$ и т.д.

Рассмотрим автоморфизмы

$$Ta(z_1, z_2) = a(z_1 + 1, z_2), \quad Sa(z_1, z_2) = a(z_1, z_2 + 1).$$

Мера Хаара μ инвариантна относительно S и T . Хорошо известно, что действие, порожденное этими автоморфизмами, обладает свойством перемешивания.

Докажем, что для любых нетривиальных характеров χ_1, χ_2, χ_3 для всех достаточно больших m выполнено равенство

$$\int_X \chi_1(S^{-2^m} \chi_2)(T^{-2^m} \chi_3) d\mu = 0. \quad (2)$$

Пусть (2) не выполняется; тогда для бесконечного множества чисел m

$$\chi_1(S^{-2^m} \chi_2)(T^{-2^m} \chi_3) = 1.$$

В силу (1) выполняется равенство

$$a + S^{2^m} a + T^{2^m} a = 0,$$

и

$$\chi(S^{2^m} \chi)(T^{2^m} \chi) = 1 \quad (3)$$

для любого характера χ . Подставляя $\chi = S^{-2^m} T^{-2^m} \chi_3$ в (3), получим

$$S^{-2^m} T^{-2^m} \chi_3 (T^{-2^m} \chi_3) (S^{-2^m} \chi_3) = 1.$$

Умножение левой части этого выражения на $\chi_1 (S^{-2^m} \chi_2) (T^{-2^m} \chi_3) = 1$ дает

$$\chi_1 S^{-2^m} (\chi_2 \chi_3) S^{-2^m} T^{-2^m} \chi_3 = 1.$$

Теперь, умножая левую часть последнего равенства на

$$\chi_1 S^{-2^m} \chi_1 S^{-2^m} T^{2^m} \chi_1 = 1,$$

получим

$$S^{-2^m} (\chi_1 \chi_2 \chi_3) S^{-2^m} T^{2^m} \chi_1 S^{-2^m} T^{-2^m} \chi_3 = 1,$$

что равносильно

$$\chi_1 \chi_2 \chi_3 T^{2^m} \chi_1 T^{-2^m} \chi_3 = 1.$$

Как доказал Рохлин [1], эргодический автоморфизм T компактной коммутативной группы перемешивает кратно. Следовательно, последнее тождество возможно для больших значений m только в случае

$$\chi_1 \chi_2 \chi_3 = \chi_1 = \chi_3 = 1, \quad \chi_2 = 1.$$

Итак, если среди характеров χ_1, χ_2, χ_3 имеется нетривиальный характер, то для всех больших значений m мы установили (2). Это непосредственно влечет за собой

$$\mu(A \cap S^{-2^m} B \cap T^{-2^m} C) \rightarrow \mu(A) \mu(B) \mu(C), \quad m \rightarrow +\infty,$$

так как характеры образуют базис в $L_2(\mu)$.

Теперь предъявим множество A_0 , $\mu(A_0) = 1/2$, такое, что

$$\mu(A_0 \cap S^{2^m} A_0 \cap T^{2^m} A_0) = 0 \quad \text{для всех } m > 0.$$

Для этого зафиксируем нетривиальный характер χ и обозначим через A_0 прообраз $\{-1\}$ относительно функции χ .

Заметим, что характеры вида $\chi S^{2^m} \chi$, $S^{2^m} \chi T^{2^m} \chi$ нетривиальны (это вытекает из эргодичности автоморфизмов S^{2^m} и $S^{-2^m} T^{2^m}$). Пользуясь (3), получим для всех $m > 0$

$$\begin{aligned} & \int_X (1 - \chi)(1 - S^{2^m} \chi)(1 - T^{2^m} \chi) d\mu \\ &= 1 - \int_X \chi d\mu + \dots + \int_X S^{2^m} \chi T^{2^m} \chi d\mu - \int_X \chi S^{2^m} \chi T^{2^m} \chi d\mu \\ &= 1 - 0 + \dots + 0 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция

$$(1 - \chi)(1 - S^{2^m} \chi)(1 - T^{2^m} \chi)$$

неотрицательна, получим, что она равна 0 тождественно. Поэтому

$$\mu(A_0 \cap S^{2^m} A_0 \cap T^{2^m} A_0) = 0.$$

Отметим, что рассмотренное действие и его обратное обладают счетнократным лебеговским спектром, см. [3].

2. Асимметрия частичного кратного перемешивания и частичной кратной жесткости преобразований. В [4], [5] для обнаружения эффекта асимметрии $\mathbb{Z}$ -действий использовались такие свойства, как частичная кратная жесткость и частичное кратное перемешивание на последовательностях. Эти инварианты (свойства, инвариантные относительно сопряжения) позволяли различать действие и его обратное. Недавно Ярославцев упростил метод работы [2]. Пр процитируем основное утверждение заметки [6].

Существует эргодическое преобразование T , обладающее свойством: для некоторой последовательности $n_j \rightarrow \infty$ и для любых измеримых множеств A, B и C выполнено равенство

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n_j+1} B \cap T^{2n_j} C) \\ = \frac{1}{3} (\mu(A \cap T B \cap T^{-1} C) + \mu(A \cap T^2 B \cap T C) + \mu(A \cap B \cap C)). \end{aligned}$$

При наличии такого предела преобразования T и T^{-1} не изоморфны друг другу. Это вытекает из того, что предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_j-1} B \cap T^{-2n_j} C)$$

не содержит компоненты $\mu(A \cap B \cap C)$. Более подробные пояснения см. ниже.

Повторяя рассуждения из [6], получаем следующее формально более общее утверждение (в заметке Ярославцева был рассмотрен случай $N = 1$).

ТЕОРЕМА 2. *Существует эргодическое преобразование T , обладающее следующим свойством: для любого $N > 0$ найдется последовательность $n_j \rightarrow \infty$ такая, что для любых измеримых множеств A, B и C выполнено равенство*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n_j+N} B \cap T^{2n_j} C) \\ = \frac{1}{3} (\mu(A \cap T^N B \cap T^{-N} C) + \mu(A \cap T^{2N} B \cap T^N C) + \mu(A \cap B \cap C)). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенного свойства преобразования T вытекает, что оно обладает слабым перемешиванием. Действительно, оператор $(1/3)(T^{-1} + T + I)$ является слабым пределом некоторой последовательности степеней преобразования, поэтому T не имеет собственных функций, кроме констант. Действительно, если $|\lambda| = 1$ и $\lambda^{n_i} \rightarrow (1/3)(\lambda^{-1} + \lambda + 1)$, то $\lambda = 1$. Для эргодического T только постоянные функции удовлетворяют условию $Tf = f$. Отсутствие нетривиальных собственных функций означает слабое перемешивание (непрерывность спектра).

Конструкция преобразования. Примеры преобразований, удовлетворяющих условиям теоремы 2, строятся в классе преобразований ранга 1 (их определение см., например, в [7]). Достаточно потребовать, чтобы для каждого $N > 0$ нашлась бесконечная последовательность этапов построения преобразования ранга 1, в каждом из которых массив надстроек (spacers) имел бы вид $(0, 2N, N, 0, 2N, N, \dots, 0, 2N, N)$, причем длины этих массивов не ограничены. Тогда по аналогии с работой [6] для такой конструкции T при любом фиксированном N найдутся последовательность $h_j \rightarrow \infty$ и последовательность разбиений фазового пространства

$$X = Y_i \sqcup Y_i^1 \sqcup Y_i^2 \sqcup Y_i^3$$

такие, что $\mu(Y_i) \rightarrow 0$, а множества Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_j^1 &= B_j^1 \cup T B_j^1 \cup \dots \cup T^{h_j-2} B_j^1 \cup T^{h_j-1} B_j^1, \\ Y_j^2 &= B_j^2 \cup T B_j^2 \cup \dots \cup T^{h_j} B_j^2 \cup T^{h_j+2N-1} B_j^2, \\ Y_j^3 &= B_j^3 \cup T B_j^3 \cup \dots \cup T^{h_j-1} B_j^3 \cup T^{h_j+N-1} B_j^3. \end{aligned}$$

Также потребуем выполнения условий: последовательность разбиений

$$\{C_j, T C_j^1, T^2 C_j, \dots, T^{h_j-1} C_j\}, \quad C_j = B_j^1 \cup B_j^2 \cup B_j^3,$$

стремится к разбиению на точки,

$$T^{h_j} B_j^1 = B_j^2, \quad T^{h_j+2N} B_j^2 = B_j^3, \quad \frac{\mu(T^{h_j+N} B_j^3 \Delta B_j^1)}{\mu(B_j^1)} \rightarrow 0.$$

Эти условия обеспечивают наличие пределов, фигурирующих в теореме 2.

3. Доказательство асимметрии. Предварительно установим равенство

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_j-N} B \cap T^{-2n_j} C) \\ = \frac{1}{3} (\mu(A \cap B \cap T^N C) + \mu(A \cap T^{-N} B \cap T^{-N} C) + \mu(A \cap T^{-2N} B \cap C)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_j-N} B \cap T^{-2n_j} C) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{2n_j} A \cap T^{2n_j} T^{-n_j-N} B \cap T^{-2n_j} T^{-2n_j} C) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C \cap T^{n_j-N} B \cap T^{2n_j} A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C \cap T^{n_j+N} T^{-2N} B \cap T^{2n_j} A) \end{aligned}$$

и применим к последнему пределу теорему 2, подставив $T^{-2N} B$ вместо B . Получаем, что предел

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_j-N} B \cap T^{-2n_j} C) \\ = \frac{1}{3} (\mu(C \cap T^N T^{-2N} B \cap T^{-N} A) + \mu(C \cap B \cap T^N A) + \mu(C \cap T^{-2N} B \cap A)), \end{aligned}$$

что нам и нужно.

Так как T – слабо перемешивающее преобразование, найдется последовательность $N_j \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_j \mu(A \cap T^{N_j} B \cap T^{-N_j} C) = \lim_j \mu(A \cap T^{2N_j} B \cap T^{N_j} C) = \mu(A)\mu(B)\mu(C).$$

Это вытекает из известной теоремы Фюрстенберга [8], утверждающей для большинства n близость величин $\mu(A \cap T^n B \cap T^{2n} C)$ и $\mu(A)\mu(B)\mu(C)$. (Отметим, что можно не использовать упомянутую теорему, а построить явную конструкцию с подходящей перемешивающей последовательностью N_j .) Пользуясь теоремой 2, в выражении $\mu(A \cap T^N B \cap T^{-N} C) + \dots + \mu(A \cap B \cap C)$ переходим к (повторному) пределу по N вдоль упомянутой последовательности N_j . Получим

$$\begin{aligned} \lim_j \mu(A \cap T^{N_j} B \cap T^{-N_j} C) + \mu(A \cap T^{2N_j} B \cap T^{N_j} C) + \mu(A \cap B \cap C) \\ = 2\mu(A)\mu(B)\mu(C) + \mu(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование T обладает частичным кратным перемешиванием относительно пары некоторых последовательностей (соответствующий предел имеет компоненту $\mu(A)\mu(B)\mu(C)$). Но преобразование T^{-1} этим свойством не обладает. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \lim_j \mu(A \cap B \cap T^{N_j} C) + \mu(A \cap T^{-N_j} B \cap T^{-N_j} C) + \mu(A \cap T^{-2N_j} B \cap C) \\ = \mu(A \cap B)\mu(C) + \mu(B \cap C)\mu(A) + \mu(A \cap C)\mu(B). \end{aligned}$$

Положив $k_j = n_j + N_j$, $m_j = 2n_j$ (рост перемешивающей последовательности N_j выбирается достаточно медленным), получим следующую асимметрию:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{k_j} B \cap T^{m_j} C) &= \frac{2}{3} \mu(A)\mu(B)\mu(C) + \frac{1}{3} \mu(A \cap B \cap C), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-k_j} B \cap T^{-m_j} C) &= \frac{1}{3} (\mu(A \cap B)\mu(C) + \mu(B \cap C)\mu(A) + \mu(A \cap C)\mu(B)). \end{aligned}$$

Подведем итог в случае $A = B = C$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует слабо перемешивающее преобразование T такое, что для некоторых последовательностей $k_j, m_j \rightarrow \infty$ и любого измеримого множества A выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{k_j} A \cap T^{m_j} A) &= \frac{2}{3} \mu(A)^3 + \frac{1}{3} \mu(A), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-k_j} A \cap T^{-m_j} A) &= \mu(A)^2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Преобразования T и T^{-1} не изоморфны.*

Действительно, асимптотические свойства в теореме 2 являются инвариантами, т.е. сохраняются при сопряжении. Если $S = R^{-1}TR$ и R сохраняет меру, то

$$\mu(A \cap S^{-k_j} A \cap S^{-m_j} A) = \mu(RA \cap T^{-k_j} RA \cap T^{-m_j} RA).$$

Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap S^{-k_j} A \cap S^{-m_j} A) = \mu(RA)^2 = \mu(A)^2.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap S^{k_j} A \cap S^{m_j} A) = \frac{2}{3} \mu(A)^3 + \frac{1}{3} \mu(A).$$

Таким образом, показано, что пара последовательностей k_j, m_j обеспечивает для некоторого преобразования одновременно и частичное кратное перемешивание (слагаемое $(2/3)\mu(A)^3$) и частичную кратную жесткость (слагаемое $(1/3)\mu(A)$), в то время как обратное преобразование этими свойствами не обладает.

4. Случай бесконечной меры. Замечания. Асимметрия сохраняющих меру преобразований особенно наглядна в случае, когда фазовое пространство имеет бесконечную (сигма-конечную) меру. Отметим, что свойство перемешивания, т.е. условие $\mu(A \cap T^{N_j} B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$, теперь превращается в $\mu(A \cap T^{N_j} B) \rightarrow 0$ для любых множеств A, B конечной меры. Приведем “бесконечный” аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. *Существует эргодическое обратимое преобразование T , сохраняющее бесконечную меру, такое, что для некоторых последовательностей $k_j, m_j \rightarrow \infty$ и любого измеримого множества A конечной меры выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{k_j} A \cap T^{m_j} A) &= \frac{1}{3} \mu(A), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-k_j} A \cap T^{-m_j} A) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы осуществляется по тому же плану, что и доказательства теоремы 3. Но теперь ситуация упрощается за счет того, что перемешивание в пространстве с бесконечной мерой тривиальным образом влечет за собой кратное перемешивание. Конструкции преобразований отличаются от упомянутых ранее конструкций на пространстве с конечной мерой лишь тем, что вместо последовательности массивов надстроек вида

$$(0, 2N, N, 0, 2N, N, \dots, 0, 2N, N)$$

используются массивы вида

$$(H_j, H_j + 2N, H_j + N, H_j, H_j + 2N, H_j + N, \dots, H_j, H_j + 2N, H_j + N).$$

Последовательность H_j выбирается так, чтобы мера фазового пространства конструкции оказалась бесконечной. Здесь подойдет любая достаточно быстро растущая последовательность.

Отметим, что приведенные выше результаты о $\mathbb{Z}$ -действиях можно переносить на потоки. Поток, не изоморфный обратному, действующий на пространстве бесконечной меры, был предъявлен в [9]. Изучению асимметрии асимптотических свойств потоков посвящена статья [10]. Наша работа, как и заметка [6], была стимулирована поиском наиболее простых и наглядных инвариантов, которые показывают отличие действия и его обратного. Для эргодической теории представляет интерес

отсутствие сплетений между различными положительными степенями преобразования. Из результатов работ по этой тематике (см., например, [9], [11], [12]) видно, что неизоморфизм положительных степеней может быть следствием некоторых двукратных асимптотических свойств. Так как преобразования T и T^{-1} обладают одинаковыми асимптотическими свойствами кратности 2, необходимо использовать свойства большей кратности, чтобы установить их неизоморфизм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Рохлин, “Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:4 (1949), 329–340.
- [2] F. Ledrappier, “Un champ markovien peut être d’entropie null et mélangeant”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, **287**:7 (1978), 561–563.
- [3] О. Н. Агеев, “Действия автоморфизмами коммутативных компактных групп со счетнократной лебеговской компонентой в спектре”, *Матем. заметки*, **49**:2 (1991), 14–22.
- [4] В. В. Рыжиков, “Об асимметрии каскадов”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 154–157.
- [5] В. В. Рыжиков, “Частичное кратное перемешивание на подпоследовательностях может различать автоморфизмы T и T^{-1} ”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 889–895.
- [6] И. С. Ярославцев, “Об асимметрии прошлого и будущего эргодического $\mathbb{Z}$ -действия”, *Матем. заметки*, **95**:3 (2014), 479–480.
- [7] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159.
- [8] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [9] A. I. Danilenko, V. V. Ryzhikov, “On self-similarities of ergodic flows”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **104**:3 (2012), 431–454.
- [10] K. Frączek, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, “Non-reversibility and self-joinings of higher orders for ergodic flows”, *J. Anal. Math.*, **122** (2014), 163–227.
- [11] В. В. Рыжиков, “Ограниченные эргодические конструкции, дизъюнктность и слабые пределы степеней”, Тр. ММО, **74**, МЦНМО, М., 2013, 201–208.
- [12] С. В. Тихонов, “Аппроксимация перемешивающих преобразований”, *Матем. заметки*, **95**:2 (2014), 282–299.

В. В. Рыжиков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vryzh@mail.ru

Поступило

07.02.2014

Исправленный вариант

02.04.2014