Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. В. Ванг, Ю. Ю. Чень, Л. Ю. Жанг, Расширение алгебры эндоморфизмов для слабых комодульных алгебр, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 361–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:33:05

Расширение алгебры эндоморфизмов для слабых комодульных алгебр

Ж. В. Ванг, Ю. Ю. Чень, Л. Ю. Жанг

Пусть H – слабая алгебра Хопфа, а A/B – слабое правое H -Галуа расширение. В данной работе мы в основном рассматриваем расширение алгебры эндоморфизмов модуля над A . Авторы получили необходимое и достаточное условие для того, чтобы это расширение алгебры эндоморфизмов было слабым H -Галуа, используя теорию Хопфа–Галуа и теорию Морита.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10518

1. Введение и предварительные сведения. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа, а A – правая H -комодульная алгебра. Предположим, что A/B является правым H -расширением Галуа, где B – H -ковариантная подалгебра алгебры A . В работе [1] рассматривается расширение кольца эндоморфизмов модуля над A . Необходимое и достаточное условие для того, чтобы такое расширение кольца эндоморфизмов являлось расширением Хопфа и Галуа, было получено с помощью теории Хопфа–Галуа и теории Морита.

Бем, Нилл и Шлачаный ввели понятие слабой алгебры Хопфа, являющееся обобщением понятия обычной алгебры Хопфа. Она возникает при ослаблении коумножения единицы и умножения коединицы (см. [2]). Примерами слабых алгебр Хопфа являются алгебры группоидов, алгебры граней, квантовые группоиды и обобщенные алгебры Каца (см. [3]–[6]).

В качестве основного результата этой статьи для рассматриваемого нами случая слабых алгебр Хопфа мы приводим некоторые выделенные условия того, что расширение кольца эндоморфизмов является расширением Хопфа–Галуа, используя алгебры-образы и алгебры-прообразы в слабых алгебрах Хопфа, и получаем несколько приложений. Ниже мы перечисляем эти основные результаты.

Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа, A – слабая правая H -комодульная алгебра и $B = A^{\text{co } H}$. Предположим, что $M \in \mathcal{M}_A^H$. В работе [7] приводится левая H -модульная алгебраическая структура $\text{End}_B(M)$ с H -инвариантной подалгеброй $\text{End}_A(M)$. Далее, в статье [8] описана правая H -комодульная алгебраическая структура $\text{End}_A(M)$, и доказано, что $\text{End}_A^H(M)$ является H -коинвариантной подалгеброй.

Работа выполнена при поддержке Исследовательского фонда докторантской программы высшего образования Китая (грант № 20100097110040), Фондов фундаментальных исследований для Центральных университетов (грант № KYZ201125) и Фонда естественных наук провинции Джинансу (грант № BK20141358).

В частности, для индуцированного слабого модуля Доя–Хопфа $M \otimes_B A$ в замечании 2.4 показано, что $\text{End}_A(M \otimes_B A)/\text{End}_B(M)$ является всего лишь слабым H -расщепленным расширением, а $\text{End}_A(M \otimes_B A)$ – слабым smash-произведением $\text{End}_B(M) \# H$. Применив теорию Морита к исследованию слабых алгебр Хопфа из работы [9], мы смогли сформировать контекст Морита

$$\{\text{End}_A(M \otimes_B A), \text{End}_A(M), \text{End}_B(M), \text{End}_B(M), [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)\}.$$

Далее мы приводим основной результат данной статьи, теорему 2.5. В ней утверждается, что $\text{End}_B(M)/\text{End}_A(M)$ является слабым правым H^* -Галуа, если и только если M слабо делит $M \otimes_B A$, M , и $\text{End}_B(M)$ содержит элемент со следом один, если и только если $M \otimes_B A$ слабо делит M . В качестве приложения мы покажем, что если в слабой алгебре Хопфа H существует интеграл Хаара t , то согласно предложению 2.6 следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $M \otimes_B A < M$;
- (2) $\text{End}_A(M)$ Морита эквивалентно $\text{End}_B(M) \# H$;
- (3) $\text{End}_A(M)$ Морита эквивалентно $\text{End}_A(M \otimes_B A)$.

В данной статье мы будем работать над фиксированным полем k и использовать обозначения Свидлера для терминов, связанных с коалгебрами и комодулями. Для коалгебры C будем записывать ее коумножение как $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ для произвольного $c \in C$; для правого (левого) C -комодуля M будем обозначать его кодействие как $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ ($\rho(m) = m_{[-1]} \otimes m_{[0]}$) для любого $m \in M$. Не объясненные определения и обозначения можно найти в работах [10] или [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [2]. Пусть H является одновременно алгеброй и коалгеброй. Тогда H называется *слабой биалгеброй*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) \quad (1)$$

для всех $x, y \in H$, и

$$\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z) = \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z), \quad (2)$$

$$\Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)) = (1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) \quad (3)$$

для любых $x, y, z \in H$, где $\Delta^2 = (\Delta \otimes \text{id}_H) \circ \Delta$.

Далее, если существует k -линейное отображение $S: H \rightarrow H$, называемое антиподальным и удовлетворяющее следующим аксиомам для всех $h \in H$:

$$h_1 S(h_2) = \varepsilon(1_1 h) 1_2, \quad S(h_1) h_2 = \varepsilon(h 1_2) 1_1, \quad S(h_1) h_2 S(h_3) = S(h), \quad (4)$$

где $\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2$, то слабая биалгебра H называется *слабой алгеброй Хопфа*.

Антипод S слабой алгебры Хопфа H является анти-мультипликативным и анти-комумультипликативным, а единица и коединица являются S -инвариантами, т.е. для любых $h, g \in H$

$$S(hg) = S(g)S(h), \quad \Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1), \quad S(1_H) = 1_H, \quad \varepsilon \circ S = S. \quad (5)$$

Хорошо известно, что для любой слабой биалгебры H отображения Π^L , Π^R , $\overline{\Pi}^L$ и $\overline{\Pi}^R: H \rightarrow H$, определенные в статье [12], являются проекциями. Они задаются

формулами

$$\begin{aligned}\Pi^L(h) &= \varepsilon(1_1 h) 1_2, & \overline{\Pi}^L(h) &= \varepsilon(1_2 h) 1_1, \\ \Pi^R(h) &= \varepsilon(h 1_2) 1_1, & \overline{\Pi}^R(h) &= \varepsilon(h 1_1) 1_2\end{aligned}$$

для любого $h \in H$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа. Левый (правый) интеграл в H – это элемент $l \in H$ ($r \in H$), удовлетворяющий соотношению $hl = \Pi^L(h)l$ ($rh = r\Pi^R(h)$). Левый (правый) интеграл $l \in H$ ($r \in H$) называется *нормализованным*, если $\Pi^L(l) = 1_H$ ($\Pi^R(r) = 1_H$). Левый интеграл l будем называть *S -фиксированным*, если $S(l) = l$. H называется *унимодулярной*, если в H существует ненулевой двусторонний (одно- временно левый и правый) интеграл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [13]. Пусть H – слабая биалгебра, а A – левый H -модуль, который также является алгеброй. Будем называть A *слабой левой H -модульной алгеброй*, если выполняются следующие условия:

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b), \quad (6)$$

$$h \cdot 1_A = \Pi^L(h) \cdot 1_A \quad (7)$$

для всех $a, b \in A$ и $h \in H$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа с биективным антиподом S , а A – слабая левая H -модульная алгебра. *Smash-произведение* $A \# H$ алгебр A и H – это алгебра, определенная на $A \otimes_{H^L} H$, с умножением, заданным формулой

$$(a \# h)(b \# g) = a(h_1 \cdot b) \# h_2 g,$$

где H – левый H^L -модуль относительно умножения, а A – правый H^L -модуль относительно операции

$$a \leftarrow x = S^{-1}(x) \cdot a, \quad a \in H, \quad x \in H^L.$$

Обратите внимание, что A и H являются подалгебрами smash-произведения $A \# H$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа, а A – слабая левая H -модульная алгебра. Определим подалгебру инвариантов как

$$A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \Pi^L(h) \cdot a \text{ для всех } h \in H\}.$$

Если H конечномерна, на A можно определить следующие бимодульные структуры (см. [9]):

$$\begin{array}{ll} A \# H A_{A^H} & \text{с операциями } (a \# h) \cdot x = a(h \cdot x), \quad x \cdot b = xb, \\ A_{A^H} A \# H & \text{с операциями } b \cdot x = bx, \quad x \cdot (a \# h) = S^{-1}(h) \cdot (xa)\end{array}$$

для всех $a, x \in A$, $b \in A^H$, $h \in H$.

Если H имеет S -фиксированный левый интеграл t , то эти бимодули формируют контекст Морита

$$\{A \# H, A^H, A \# H A_{A^H}, A_{A^H} A \# H, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)\}$$

вместе с бимодульными отображениями

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: A \otimes_{A^H} A &\rightarrow A \# H, & a \otimes_{A^H} b &\mapsto atb, \\ (\cdot, \cdot): A \otimes_{A \# H} A &\rightarrow A^H, & a \otimes_{A \# H} b &\mapsto t \cdot (ab) \end{aligned}$$

для всех $a, b \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть H – слабая биагебра, а A – правый H -комодуль, который также является алгеброй. Будем называть A *слабой правой H -комодульной алгеброй*, если выполняются следующие условия:

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b), \quad (8)$$

$$a_{(0)} \otimes \Pi^L(a_{(1)}) = 1_{(0)}a \otimes 1_{(1)} \quad (9)$$

для всех $a, b \in A$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа, а A – слабая правая H -комодульная алгебра. Определим подалгебру коинвариантов, как в работе [14]:

$$B := A^{\text{co}H} = \{x \in A | x_{(0)} \otimes x_{(1)} = x1_{(0)} \otimes 1_{(1)}\} = \{x \in A | x_{(0)} \otimes x_{(1)} = 1_{(0)}x \otimes 1_{(1)}\}.$$

Тогда A/B называется *слабым H -расширением*.

Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа, а A – слабая правая H -комодульная алгебра. Тогда согласно [8] имеем

$$a_{(0)} \otimes \Pi^R(a_{(1)}) = a1_{(0)} \otimes \Pi^R(1_{(1)}) \quad (10)$$

для всех $a \in A$.

Если каноническое отображение

$$\text{can}: A \otimes_B A \rightarrow A \otimes_{H^R} H, \quad \text{can}(a \otimes_B b) = ab_{(0)} \otimes_{H^R} b_{(1)}$$

биективно, то слабое H -расширение A/B называется *слабым правым H -Галуа*, где правая H^R -модульная структура на A задается формулой $a \bullet h^R = \varepsilon(a_{(1)}h^R)a_{(0)}$, и H является левым H^R -модулем, определенным соотношением $h^R \cdot h = hS^{-1}(h^R)$.

Хорошо известно, что если S биективно, то can будет биективным, если и только если can' , определенное соотношением

$$\text{can}': A \otimes_B A \rightarrow A \otimes_{H^R} H, \quad \text{can}'(a \otimes_B b) = a_{(0)}b \otimes_{H^R} a_{(1)},$$

биективно. Если A/B – слабое H -Галуа, $\text{can}' = \psi \circ \text{can}$, где

$$\psi(a \otimes_{H^R} h) = a_{(0)} \otimes_{H^R} a_{(1)}S(h)$$

с обратным ψ^{-1} , заданным соотношением

$$\psi^{-1}(a \otimes_{H^R} h) = a_{(0)} \otimes_{H^R} S^{-1}(h)a_{(1)}$$

для всех $a \in A, h \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть H – слабая биалгебра, а A – слабая правая H -комодульная алгебра. Положим

$$\text{Rev}(H, A) = \{\psi \in \text{Hom}(H, A) \mid \text{существует } \phi \in \text{Hom}(H, A): (\psi * \phi)(h) = \psi(\Pi^L(h)), \\ (\phi * \psi)(h) = \psi(\Pi^R(h)) \text{ для всех } h \in H\}.$$

Тогда ϕ называется *слабо конволютивно обратным элементом* ψ , где “ $*$ ” – конволютивное произведение в $\text{Hom}(H, A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 [15]. (1) Пусть H – слабая биалгебра, а A – слабая правая H -комодульная алгебра. Если отображение $\psi: H \rightarrow A$ является правым H -коллинearным, то назовем ψ *слабым интегралом для A* .

(2) Пусть H – слабая алгебра Хопфа, а A – слабая правая H -комодульная алгебра. Если существует слабый интеграл $\psi \in \text{Rev}(H, A)$ и слабо конволютивно обратный $\phi \in \text{Hom}(H, A)$, для которых выполняется $\rho\phi(h) = \phi(h_2) \otimes S(h_1)$ для всех $h \in H$, то A/B называется *слабым правым H -расщепленным расширением*.

2. Расширение алгебры эндоморфизмов. В этом разделе мы будем всегда предполагать, что H – это конечномерная слабая алгебра Хопфа с двойственной парой левых интегралов (T, t) [2; теорема 3.18] и зафиксируем слабое H -Галуа расширение A/B . Также мы будем использовать следующее формальное обозначение для обратного к can : для любого $h \in H$

$$\text{can}^{-1}(1_A \otimes_{H^R} h) = l_i(h) \otimes_B r_i(h) \in A \otimes_B A,$$

для которого

$$l_i(h)r_i(h)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(h)_{(1)} = 1_A \otimes_{H^R} h \quad (11)$$

по определению. У таких элементов есть следующие свойства.

ЛЕММА 2.1 [7]. Для всех $a \in A, b \in B$ и $h, g \in H$ имеем

- (1) $l_i(h)r_i(h) = \varepsilon(h1_{(1)})1_{(0)}$,
- (2) $a_{(0)}l_i(a_{(1)}) \otimes_B r_i(a_{(1)}) = 1_A \otimes_B a$,
- (3) $bl_i(h) \otimes_B r_i(h) = l_i(h) \otimes_B r_i(h)b$,
- (4) $l_i(hg) \otimes_B r_i(hg) = l_i(g)l_j(h) \otimes_B r_j(h)r_i(g)$, где $l_j(h) \otimes r_j(h)$ – копия $l_i(h) \otimes r_i(h)$,
- (5) $l_i(h) \otimes_B r_i(h)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(h)_{(1)} = l_i(h_1) \otimes_B r_i(h_1) \otimes_{H^R} h_2$,
- (6) $l_i(h)_{(0)} \otimes_B r_i(h) \otimes_{H^R} l_i(h)_{(1)} = l_i(h_2) \otimes_B r_i(h_2) \otimes_{H^R} S(h_1)$,
- (7) $l_i(h_1) \otimes_B r_i(h_1)l_j(h_2) \otimes_B r_j(h_2) = l_i(h) \otimes_B 1_A \otimes_B r_i(h)$,
- (8) $l_i(h)_{(0)}r_i(h)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(h)_{(1)} \otimes_{H^R} l_i(h)_{(1)} = 1_A \otimes_{H^R} h_2 \otimes_{H^R} S(h_1)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа с двойственной парой левых интегралов (T, t) , а A/B – слабое H -Галуа расширение. Определим $\text{tr}(a) = a_{(0)}T(a_{(1)})$ для всех $a \in A$. Тогда

- (1) $T(t) = 1_k$;
- (2) если t является S -фиксированным, то tr – это B -бимодульное отображение из A на B , и верна следующая формула:

$$l_i(t)\text{tr}(r_i(t)) = 1_A = \text{tr}(l_i(t))r_i(t). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как (T, t) – двойственная пара левых интегралов, $\langle T, t_2 \rangle t_1 = 1_H$. Применим ε к обеим сторонам этого равенства и получим $T(t) = 1_k$.

(2) Так как $T \in H^*$ – левый интеграл, согласно [16] выполняется $g_1 \langle T, h g_2 \rangle = S(h_1) \langle T, h_2 g \rangle$ для всех $h, g \in H$. Тогда для любого $a \in A$

$$\rho(a_{(0)} T(a_{(1)})) = a_{(0)} \otimes a_{(1)} T(a_{(2)}) = a_{(0)} \otimes S(1_1) \langle T, 1_2 a_{(1)} \rangle \in A \otimes H^L,$$

поэтому $\text{tr}(A) \subseteq B$.

Для всех $a \in A$, $b \in B$, поскольку

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= a_{(0)} b_{(0)} T(a_{(1)} b_{(1)}) = a_{(0)} 1_{(0)} b T(a_{(1)} 1_{(1)}) = a_{(0)} b T(a_{(1)}) = \text{tr}(a) b, \\ \text{tr}(ba) &= b_{(0)} a_{(0)} T(b_{(1)} a_{(1)}) = b 1_{(0)} a_{(0)} T(1_{(1)} a_{(1)}) = b a_{(0)} T(a_{(1)}) = b \text{tr}(a), \end{aligned}$$

tr является B -бимодульным отображением.

Далее, поскольку диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_B A & \xrightarrow{\text{can}} & A \otimes_{H^R} H \\ & \searrow \text{id}_A \otimes \text{tr} & \swarrow \text{id}_A \otimes T \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes_B A & \xrightarrow{\text{can}'} & A \otimes_{H^R} H \\ & \searrow \text{tr} \otimes \text{id}_A & \swarrow \text{id}_A \otimes T \\ & A & \end{array}$$

коммутируют, имеем

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes T) \circ \text{can} &= \text{id}_A \otimes_B \text{tr} \\ \implies (\text{id}_A \otimes T) \text{can}(l_i(t) \otimes_B r_i(t)) &= (\text{id}_A \otimes_B \text{tr})(l_i(t) \otimes_B r_i(t)) \\ \implies 1_A T(t) &= l_i(t) \text{tr}(r_i(t)) \\ \implies 1_A &= l_i(t) \text{tr}(r_i(t)), \end{aligned}$$

и поскольку для всех $a \in A$ выполняется

$$\begin{aligned} (a 1_{(0)}) \bullet S(1_{(1)}) &= \varepsilon(a_{(1)} 1_{(1)} S(1_{(2)})) a_{(0)} 1_{(0)} = \varepsilon(a_{(1)} \Pi^L(1_{(1)})) a_{(0)} 1_{(0)} \\ &= \varepsilon(a_{(1)} 1_{(1)}) a_{(0)} 1_{(0)} = a, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes T) \circ \text{can}' &= \text{tr} \otimes_B \text{id}_A \\ \implies (\text{id}_A \otimes T) \psi \text{can}(l_i(t) \otimes_B r_i(t)) &= (\text{tr} \otimes_B \text{id}_A)(l_i(t) \otimes_B r_i(t)) \\ \implies (\text{id}_A \otimes T) \psi(1_A \otimes_{H^R} t) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies (\text{id}_A \otimes T)(1_{(0)} \otimes_{H^R} S^{-1}(t) 1_{(1)}) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies (\text{id}_A \otimes T)(1_{(0)} \otimes_{H^R} S(1_{(1)}) \cdot S^{-1}(t)) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies (\text{id}_A \otimes T)(1_{(0)} \bullet S(1_{(1)}) \otimes_{H^R} S^{-1}(t)) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies (\text{id}_A \otimes T)(1_A \otimes_{H^R} S^{-1}(t)) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies 1_A T(S^{-1}(t)) &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) \\ \implies 1_A &= \text{tr}(l_i(t)) r_i(t), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть $M, N \in \mathcal{M}_A$. Как и в работе [7], будем определять (H, A) -бимодульную структуру на множестве $\text{Hom}_B(M, N)$ следующим образом:

$$(h \cdot f \cdot a)(m) = f[ml_i(S(h))]r_i(S(h))a \quad (13)$$

для всех $a \in A, h \in H, m \in M$ и $f \in \text{Hom}_B(M, N)$. Тогда $\text{End}_B(M)$ является слабой левой H -модульной алгеброй с инвариантной подалгеброй $\text{End}_A(M)$.

Пусть $M, N \in \mathcal{M}_A^H$. Из статьи [8] мы знаем, что $\text{Hom}_A(M, N)$ является правым H -комодулем с кодействием, которое задается соотношением

$$f_{(0)}(m) \otimes f_{(1)} = f(m_{(0)})_{(0)} \otimes f(m_{(0)})_{(1)}S(m_{(1)}), \quad (14)$$

и для которого $\text{Hom}_A(M, N)^{\text{co } H} = \text{Hom}_A^H(M, N)$. Следовательно, $\text{End}_A(M)$ – слабая правая H -комодульная алгебра.

Пусть $M \in \mathcal{M}_A^H$. Тогда $M \otimes_B A$ и $M \otimes_{H^R} H$ – индуцированные слабые правые модули Доя–Хопфа со структурами, заданными в [7] соотношениями

$$\begin{aligned} (m \otimes_B a) \cdot b &= m \otimes_B ab, & \rho(m \otimes_B a) &= m \otimes_B a_{(0)} \otimes a_{(1)}, \\ (m \otimes_{H^R} h) \cdot b &= mb_{(0)} \otimes_{H^R} hb_{(1)}, & \rho(m \otimes_{H^R} h) &= m \otimes_{H^R} h_1 \otimes h_2, \end{aligned}$$

где M – правый H^R -модуль, определяемый соотношением $m \bullet h^R = m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}h^R)$, и H – левый H^R -модуль относительно операции $h^R \cdot h = hS^{-1}(h^R)$. Тогда из уравнения (W15) работы [8] получаем $m \bullet h^R = m1_{(0)}\varepsilon(1_{(1)}h^R)$.

Таким образом, из рассуждений, приведенных выше, следует, что $\text{End}_A(M \otimes_B A)$ – слабая правая H -комодульная алгебра.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что A/B является слабым правым H -Галуа расширением, а $M \in \mathcal{M}_A^H$. Тогда $\text{End}_A(M \otimes_B A) \cong \text{End}_B(M) \# H$ как правые H -комодульные алгебры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что для любого $x \in H^L$ выполняется

$$l_j(x) \otimes_B r_j(x) = 1_{(0)}\varepsilon(x1_{(1)}) \otimes_B 1_A = l_j(x)r_j(x) \otimes_B 1_A. \quad (15)$$

Действительно, из леммы 2.1(6) и того факта, что $l_j(1_H) \otimes_B r_j(1_H) = 1_A \otimes_B 1_A$, получаем

$$\begin{aligned} l_j(x) \otimes_B r_j(x) &= l_j(1_2) \otimes_B r_j(1_2)\varepsilon(1_1x) = l_j(1_2) \otimes_B r_j(1_2)\varepsilon(xS(1_1)) \\ &= l_j(1_H)_{(0)} \otimes_B r_j(1_H)\varepsilon(xl_j(1_H)_{(1)}) = 1_{(0)}\varepsilon(x1_{(1)}) \otimes_B 1_A. \end{aligned}$$

Второе равенство легко получается из леммы 2.1(1).

Для $M \in \mathcal{M}_A^H$ определим $\eta: \text{End}_B(M) \# H \rightarrow \text{End}_A(M \otimes_B A)$ соотношением

$$\eta(f \# h)(m \otimes_B a) = f(ml_i(h)) \otimes_B r_i(h)a$$

для всех $a \in A, h \in H, m \in M$ и $f \in \text{End}_B(M)$, где $\text{End}_B(M)$ – правый H^L -модуль относительно операции $f \leftarrow x = S^{-1}(x) \cdot f$ для всех $x \in H^L$.

Отображение η хорошо определено. Для любых $a \in A, b \in B, x \in H^L, h \in H, m \in M$ и $f \in \text{End}_B(M)$, так как

$$\begin{aligned} \eta(f \# xh)(m \otimes_B a) &= f(ml_i(xh)) \otimes_B r_i(xh)a \stackrel{\text{лемма 2.1(4)}}{=} f(ml_i(h)l_j(x)) \otimes_B r_j(x)r_i(h)a \\ &\stackrel{(15)}{=} f(ml_i(h)l_j(x))r_j(x) \otimes_B r_i(h)a = (S^{-1}(x) \cdot f)(ml_i(h)) \otimes_B r_i(h)a \\ &= \eta(f \leftarrow x \# h)(m \otimes_B a), \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}\eta(f \# h)(m \otimes_B ba) &= f(ml_i(h)) \otimes_B r_i(h)ba \stackrel{\text{лемма 2.1 (3)}}{=} f(mbl_i(h)) \otimes_B r_i(h)a \\ &= \eta(f \# h)(mb \otimes_B a).\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\Phi: M \otimes_B A \rightarrow M \otimes_{H^R} H, \quad \Phi(m \otimes_B a) = ma_{(0)} \otimes a_{(1)},$$

– биекция с инверсией $\Phi^{-1}(m \otimes_{H^R} h) = ml_i(h) \otimes r_i(h)$.

Пусть θ – композиция следующих изоморфизмов H -комодулей:

$$\begin{aligned}\text{End}_B(M) \otimes_{H^L} H &\xrightarrow{\phi_1} \text{End}_B(M) \otimes_{H^R} H \xrightarrow{\phi_2} \text{Hom}_B(M, M \otimes_{H^R} H) \\ &\xrightarrow{\phi_3} \text{Hom}_B(M, M \otimes_B A) \xrightarrow{\phi_4} \text{End}_A(M \otimes_B A),\end{aligned}$$

где $\phi_1: f \otimes_{H^L} h \mapsto S^{-1}(h_1) \cdot f \otimes_{H^R} h_2$, $\phi_3 = \text{Hom}(\cdot, \Phi^{-1})$ и ϕ_2, ϕ_4 – канонические изоморфизмы.

Поскольку

$$\begin{aligned}\theta(f \otimes_{H^L} h)(m \otimes_B a) &= (\phi_4 \phi_3 \phi_2 \phi_1)(f \otimes_{H^L} h)(m \otimes_B a) = (\phi_3 \phi_2 \phi_1)(f \otimes_{H^L} h)(m)a \\ &= (\Phi^{-1} \phi_2 \phi_1)(f \otimes_{H^L} h)(m)a = (\Phi^{-1} \phi_2)(S^{-1}(h_1) \cdot f \otimes_{H^R} h_2)(m)a \\ &= \Phi^{-1}((S^{-1}(h_1) \cdot f)(m) \otimes_{H^R} h_2)a \stackrel{(13)}{=} \Phi^{-1}(f(ml_i(h_1))r_i(h_1) \otimes_{H^R} h_2)a \\ &= f(ml_i(h_1))r_i(h_1)l_j(h_2) \otimes_B r_j(h_2)a \stackrel{\text{лемма 2.1 (7)}}{=} f(ml_i(h)) \otimes_B r_i(h)a,\end{aligned}$$

мы знаем, что $\eta = \theta$. Таким образом, нам осталось доказать, что η – отображение алгебр. Заметим, что следующее отображение биективно:

$$A \otimes_B A \otimes_B A \xrightarrow{(\text{can} \otimes_B \text{id}_H) \circ (\text{id}_A \otimes_B \text{can})} A \otimes_{H^R} H \otimes_{H^R} H.$$

Поскольку can является правым H^R -линейным, как следует из соотношения

$$l_i(y) \otimes_B r_i(y) = 1_A \otimes_B 1_{(0)} \varepsilon(y 1_{(1)}) \quad \text{для всех } y \in H^R,$$

доказанного в [7], имеем

$$\begin{aligned}&(\text{can} \otimes_B \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes_B \text{can})(l_i(h_2)l_j(S(h_1)) \otimes_B r_j(S(h_1)) \otimes_B r_i(h_2)) \\ &= (\text{can} \otimes_B \text{id}_H)(l_i(h_2)l_j(S(h_1)) \otimes_B r_j(S(h_1))r_i(h_2)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(h_2)_{(1)}) \\ &\stackrel{\text{лемма 2.1 (5)}}{=} (\text{can} \otimes_B \text{id}_H)(l_i(h_2)l_j(S(h_1)) \otimes_B r_j(S(h_1))r_i(h_2) \otimes_{H^R} h_3) \\ &= l_i(h_2)l_j(S(h_1))r_j(S(h_1))_{(0)}r_i(h_2)_{(0)} \otimes_{H^R} r_j(S(h_1))_{(1)}r_i(h_2)_{(1)} \otimes_{H^R} h_3 \\ &\stackrel{(11)}{=} l_i(h_2)r_i(h_2)_{(0)} \otimes_{H^R} S(h_1)r_i(h_2)_{(1)} \otimes_{H^R} h_3 = 1_A \otimes_{H^R} S(h_1)h_2 \otimes_{H^R} h_3 \\ &= 1_A \otimes_{H^R} \Pi^R(h_1) \otimes_{H^R} h_2 = 1_A \otimes_{H^R} 1_1 \otimes_{H^R} h 1_2 \\ &= 1_A \otimes_{H^R} 1_1 \otimes_{H^R} S(1_2) \cdot h = \text{can}(l_i(1_1) \otimes_B r_i(1_1)) \otimes_{H^R} S(1_2) \cdot h \\ &= \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)} \varepsilon(1_1 1_{(1)})) \cdot S(1_2) \otimes_{H^R} h = \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)}) \cdot S(1_{(1)}) \otimes_{H^R} h \\ &= \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)} \bullet S(1_{(1)})) \otimes_{H^R} h = \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)} 1'_{(0)}) \varepsilon(1'_{(1)} S(1_{(1)})) \\ &= \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)} 1'_{(0)}) \varepsilon(1'_{(1)} \Pi^R(1_{(1)})) = \text{can}(1_A \otimes_B 1_{(0)} 1'_{(0)}) \varepsilon(1_{(1)} 1'_{(1)}) \\ &= \text{can}(1_A \otimes_B 1_A) \otimes_{H^R} h = (\text{can} \otimes_B \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes_B \text{can})(1_A \otimes_B l_i(h) \otimes_B r_i(h)),\end{aligned}$$

а также

$$l_i(h_2)l_j(S(h_1)) \otimes_B r_j(S(h_1)) \otimes_B r_i(h_2) = 1_A \otimes_B l_i(h) \otimes_B r_i(h). \quad (16)$$

Далее, для любых $f, g \in \text{End}_B(M)$ и $x, y \in H$, $m \in M$ вычислим

$$\begin{aligned} & \eta((f \# x)(g \# y))(m \otimes_B 1_A) \\ &= \eta(f(x_1 \cdot g) \# x_2 y)(m \otimes_B 1_A) = f(x_1 \cdot g)(ml_i(x_2 y)) \otimes_B r_i(x_2 y) \\ &\stackrel{(13)}{=} f[g(ml_i(x_2 y)l_j(S(x_1)))r_j(S(x_1))] \otimes_B r_i(x_2 y) \\ &\stackrel{\text{лемма 2.1}^{(4)}}{=} f[g(ml_i(y)l_k(x_2)l_j(S(x_1)))r_j(S(x_1))] \otimes_B r_k(x_2)r_i(y) \\ &\stackrel{(16)}{=} f[g(ml_i(y))l_j(x)] \otimes_B r_j(x)r_i(y) = \eta(f \# x)\eta(g \# y)(m \otimes_B 1_A), \\ &\eta(\text{id}_M \# 1_H)(m \otimes_B 1_A) = ml_i(1_H) \otimes_B r_i(1_H) = m \otimes_B 1_A, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Согласно [7], [17] мы знаем, что H/H^L – слабое правое H -Галуа расширение. Тогда из теоремы 2.3 и работы [14] следует, что $\text{End}_H(H \otimes_{H^L} H)/\text{End}_{H^L}(H)$ – слабое H -расщепленное расширение, и что

$$\text{End}_H(H \otimes_{H^L} H) \cong \text{End}_{H^L}(H) \# H$$

как комодульные алгебры.

Пусть $M, N \in \mathcal{M}_A^H$, и пусть M_A, N_A обозначают A -модульную структуру для M и N соответственно. Будем писать $M_A < N_A$, чтобы показать, что M_A – прямое слагаемое некоторой A -модульной прямой суммы конечного числа копий структуры N_A , т.е. M_A слабо делит N_A .

ТЕОРЕМА 2.5. *Предположим, что A/B – слабое правое H -Галуа расширение, а H унимодулярна и содержит S -фиксированный двусторонний интеграл t и двойственный к нему интеграл $T \in H^*$. Пусть $M \in \mathcal{M}_A^H$. Тогда*

- (1) $\text{End}_B(M)/\text{End}_A(M)$ является слабым правым H^* -Галуа, если и только если $M \otimes_B A < M$;
- (2) $\text{End}_B(M)$ имеет элементы с единичным следом, если и только если $M < M \otimes_B A$.

Далее, если выполняются оба соотношения (1) и (2), то

$$(\text{End}_B(M) \otimes_{\text{End}_A(M)} \cdot, \cdot \otimes_{\text{End}_A(M \otimes_B A)} \text{End}_B(M))$$

определяет эквивалентность Морита между $_{\text{End}_A(M)}\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_{\text{End}_A(M \otimes_B A)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $a \in A$

$$al_i(t) \otimes_B r_i(t) = l_i(t) \otimes_B r_i(t)a. \quad (17)$$

Действительно, поскольку t – двусторонний интеграл,

$$\begin{aligned} \text{can}(l_i(t) \otimes_B r_i(t)a) &= l_i(t)r_i(t)_{(0)}a_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(t)_{(1)}a_{(1)} = a_{(0)} \otimes_{H^R} ta_{(1)} \\ &= a_{(0)} \otimes_{H^R} t\Pi^R(a_{(1)}) \stackrel{(10)}{=} a1_{(0)} \otimes_{H^R} t\Pi^R(1_{(1)}) = a1_{(0)} \otimes_{H^R} t1_{(1)} \\ &= a1_{(0)} \otimes_{H^R} S(1_{(1)}) \cdot t = (a1_{(0)}) \bullet S(1_{(1)}) \otimes_{H^R} t \\ &= a \otimes_{H^R} t = al_i(t)r_i(t)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(t)_{(1)} = \text{can}(al_i(t) \otimes_B r_i(t)). \end{aligned}$$

Положим $F = \text{End}_B(M)$ и $G = \text{End}_A(M)$. Отождествим $E = \text{End}_A(M \otimes_B A)$ с $F \# H$ с помощью замечания 2.4. Мы знаем, что ${}_E F_G$ и ${}_G F_E$ являются бимодулями.

Кроме того, ${}_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A)_G$ и ${}_G \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M)_E$ являются бимодулями относительно композиции отображений. Далее мы докажем, что δ и σ , заданные соотношениями

$$\begin{aligned} \delta: {}_E F_G &\rightarrow {}_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A)_G, & \delta(f)(m) &= f(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t), \\ \sigma: {}_G F_E &\rightarrow {}_G \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M)_E, & \sigma(f)(m \otimes_B a) &= f(m)a, \end{aligned}$$

являются бимодальными изоморфизмами.

Чтобы доказать, что $\delta(\sigma)$ – левый (правый) E -линейный элемент, нам нужно только показать, что $\delta(\sigma)$ является одновременно левым (правым) F -линейным и левым (правым) H -линейным. Ясно, что δ является (F, G) -билинейным и биективно с обратным δ^{-1} , задаваемым соотношением

$$\delta^{-1}: {}_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A)_G \rightarrow {}_E F_G, \quad \delta^{-1}(g)(m) = (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})g(m).$$

Действительно, если обозначить $g(m)$ через $m_p \otimes_B a_p$, имеем

$$\begin{aligned} \delta\delta^{-1}(g)(m) &= \delta^{-1}(g)(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t) = (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})g(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t) \\ &= (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})(g(m) \cdot l_i(t)) \otimes_B r_i(t) = (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})(m_p \otimes_B a_p l_i(t)) \otimes_B r_i(t) \\ &= m_p \text{tr}(a_p l_i(t)) \otimes_B r_i(t) \stackrel{(17)}{=} m_p \text{tr}(l_i(t)) \otimes_B r_i(t) a_p \\ &\stackrel{\text{лемма 2.2 (2)}}{=} m_p \otimes_B \text{tr}(l_i(t)) r_i(t) a_p \stackrel{(12)}{=} m_p \otimes_B a_p = g(m), \\ \delta^{-1}\delta(f)(m) &= (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})\delta(f)(m) = (\text{id}_M \otimes_B \text{tr})(f(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t)) \\ &= f(ml_i(t)) \text{tr}(r_i(t)) = f(ml_i(t) \text{tr}(r_i(t))) = f(m). \end{aligned}$$

Для всех $h \in H$, $f \in F$ и $m \in M$ вычисляем

$$\begin{aligned} \delta(h \cdot f)(m) &= (h \cdot f)(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t) = f(ml_i(t) l_j(S(h))) r_j(S(h)) \otimes_B r_i(t) \\ &= f(ml_i(t) l_j(h)) \otimes_B r_j(h) r_i(t) = \eta(\text{id}_M \# h)(f(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t)) \\ &= \eta(\text{id}_M \# h)\delta(f)(m) = (h \cdot \delta(f))(m). \end{aligned}$$

Обратите внимание, что ${}_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A)_G$ – бимодуль относительно композиции отображений. Отсюда следует, что $\delta(h \cdot f) = h \cdot \delta(f)$, где третье равенство выполняется, потому что

$$l_i(t) l_j(S(h)) \otimes_B r_j(S(h)) \otimes_B r_i(t) = l_i(t) \otimes_B l_j(h) \otimes_B r_j(h) r_i(t)$$

в $A \otimes_B A \otimes_B A$.

Действительно,

$$\begin{aligned} &(\text{can} \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \text{can})(l_i(t) \otimes_B l_j(h) \otimes_B r_j(h) r_i(t)) \\ &= (\text{can} \otimes \text{id}_H)(l_i(t) \otimes_B l_j(h) r_j(h)_{(0)} r_i(t)_{(0)} \otimes_{H^R} r_j(h)_{(1)} r_i(t)_{(1)}) \\ &\stackrel{(11)}{=} (\text{can} \otimes \text{id}_H)(l_i(t) \otimes_B r_i(t)_{(0)} \otimes_{H^R} h r_i(t)_{(1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{лемма 2.1 (5)}}{=} (\text{can} \otimes \text{id}_H)(l_i(t_1) \otimes_B r_i(t_1) \otimes_{H^R} h t_2) \\
 & \stackrel{[8; (W9)]}{=} 1_A \otimes_{H^R} t_1 \otimes_{H^R} h t_2 = 1_A \otimes_{H^R} S(h) t_1 \otimes_{H^R} t_2 \\
 & = l_i(t_1) r_i(t_1)_{(0)} \otimes_{H^R} S(h) r_i(t_1)_{(1)} \otimes_{H^R} t_2 \\
 & = l_i(t_1) l_j(S(h)) r_j(S(h))_{(0)} r_i(t_1)_{(0)} \otimes_{H^R} r_j(S(h))_{(1)} r_i(t_1)_{(1)} \otimes_{H^R} t_2 \\
 & = (\text{can} \otimes \text{id}_H)(l_i(t_1) l_j(S(h)) \otimes_B r_j(S(h)) r_i(t_1) \otimes_{H^R} t_2) \\
 & = (\text{can} \otimes \text{id}_H)(l_i(t) l_j(S(h)) \otimes_B r_j(S(h)) r_i(t)_{(0)} \otimes_{H^R} r_i(t)_{(1)}) \\
 & = (\text{can} \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \text{can})(l_i(t) l_j(S(h)) \otimes_B r_j(S(h)) \otimes_B r_i(t)).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что σ является (G, F) -изоморфизмом с обратным, заданным соотношением $\sigma^{-1}: g \mapsto (m \mapsto g(m \otimes_B 1_A))$ для всех $g \in \text{Hom}_A(M \otimes_B A)$ и $m \in M$. Более того, поскольку $\text{Hom}_A(M \otimes_B A, M) \in \mathcal{M}_H$ (где $\text{Hom}_A(M \otimes_B A, M)$ рассматривается относительно умножения $g \cdot h = g \circ \eta(\text{id}_M \# h)$ для всех $g \in \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M)$ и $h \in H$), имеем

$$\begin{aligned}
 \sigma(f \leftarrow h)(m \otimes_B a) &= \sigma(S^{-1}(h) \cdot f)(m \otimes_B a) = (S^{-1}(h) \cdot f)(m) a \stackrel{(13)}{=} f(ml_i(h)) r_i(h) a \\
 &= \sigma(f)(ml_i(h) \otimes_B r_i(h) a) = \sigma(f)(\eta(\text{id}_M \# h)(m \otimes_B a)) \\
 &= (\sigma(f) \cdot h)(m \otimes_B a).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\sigma(f \leftarrow h) = \sigma(f) \cdot h$, и поэтому σ является правым H -линейным. Определим

$$\begin{aligned}
 P_1: \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A) \otimes_G \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M) &\rightarrow E, & f \otimes g &\mapsto f \circ g, \\
 P_2: \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M) \otimes_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A) &\rightarrow G, & u \otimes v &\mapsto u \circ v.
 \end{aligned}$$

Если мы забудем об H -комодульной структуре на M , то, как хорошо известно, P_1 будет сюръективно, если и только если $M_A \otimes_B A < M_A$, и P_2 будет сюръективно, если и только если $M_A < M_A \otimes_B A$.

Далее мы покажем, что канонические отображения

$$\begin{aligned}
 F \otimes_G F &\xrightarrow{\delta \otimes \sigma} \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A) \otimes_G \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M) \xrightarrow{P_1} E = F \# H, \\
 F \otimes_E F &\xrightarrow{\sigma \otimes \delta} \text{Hom}_A(M \otimes_B A, M) \otimes_E \text{Hom}_A(M, M \otimes_B A) \xrightarrow{P_2} G
 \end{aligned}$$

– это в точности отображения $[\cdot, \cdot]$ и $(\cdot, \cdot)$, соответственно, в контексте Морита

$$\{F \# H, G, {}_{F \# H} F_G, {}_G F_{F \# H}, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)\},$$

где $[f, g] = f t g \in F \# H$ и $(f, g) = t \cdot (f \circ g) \in G$.

Действительно, для любых $a \in A$, $m \in M$ и $f, g \in F$, с одной стороны,

$$\begin{aligned}
 \delta(f) \circ \sigma(g)(m \otimes_B a) &= \delta(f)(g(m) a) = \delta(f)(g(m)) \cdot a = f(g(m) l_i(t)) \otimes_B r_i(t) a \\
 &\stackrel{(16)}{=} f(g(ml_i(t_2) l_j(S(t_1))) r_j(S(t_1))) \otimes_B r_i(t_2) a \\
 &\stackrel{(13)}{=} f(t_1 \cdot g)(ml_i(t_2)) \otimes_B r_i(t_2) a = \eta(f(t_1 \cdot g) \# t_2)(m \otimes_B a) \\
 &= (f \# t)(g \# 1_H)(m \otimes_B a) = f t g(m \otimes_B a),
 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\delta(f) \circ \sigma(g) = ftg = [f, g] \in F \# H$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sigma(f) \circ \delta(g)(m) &= \sigma(f)(g(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t)) = f(g(ml_i(t))r_i(t)) \\ &= f(g(ml_i(S(t)))r_i(S(t))) = t \cdot (f \circ g)(m),\end{aligned}$$

и, следовательно, $\sigma(f) \circ \delta(g) = t \cdot (f \circ g) = (f, g) \in G$.

Теперь мы видим, что из соотношений (1) и (2) следует, что оба $\delta \otimes \sigma$ и $\sigma \otimes \delta$ биективны.

Пусть H – конечномерная фробениусова слабая алгебра Хопфа, а A/B – слабое H^* -расширение. Тогда A – слабая левая H -модульная алгебра. Хорошо известно, что отображение Морита $[\cdot, \cdot]: A \otimes_B A \rightarrow A \# H$ сюръективно, если и только если A/B – слабое H^* -Галуа расширение согласно следствию 5.7 из работы [19].

Как следствие теоремы 2.5, мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Предположим, что A/B – слабое правое H -Галуа расширение, H унимодулярна с S -фиксированным интегралом t и двойственным к нему интегралом $T \in H^*$, и $M \in \mathcal{M}_A^H$. Если t – интеграл Хаара, заданный в определении 3.24 статьи [2] (т.е. нормализованный двусторонний интеграл), то следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) $M \otimes_B A < M$;
- (2) $\text{End}_A(M)$ Морита эквивалентно $\text{End}_B(M) \# H$;
- (3) $\text{End}_A(M)$ Морита эквивалентно $\text{End}_A(M \otimes_B A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.3 утверждения (2) и (3) эквивалентны. Так как H имеет невырожденный интеграл, она является фробениусовой. Поэтому (1) и (2) эквивалентны по [18; теорема 4] и предложению 2.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Предположим, что H – конечномерная слабая алгебра Хопфа с S -фиксированным левым интегралом t , а A/B – слабое правое H -Галуа расширение. Пусть $M \in \mathcal{M}_A^H$. Если слабая левая H -модульная алгебра $\text{End}_B(M)$ имеет элемент с единичным следом, то M_A делит $M \otimes_B A$.

Предположим, что $\phi \in \text{End}_B(M)$ – элемент с единичным следом, т.е. $t \cdot \phi = \text{id}_M$. Определим отображения

$$\begin{aligned}\theta: M &\rightarrow M \otimes_B A, & m &\mapsto \phi(ml_i(t)) \otimes_B r_i(t), \\ \psi: M \otimes_B A &\rightarrow M, & m \otimes_B a &\mapsto ta.\end{aligned}$$

С помощью равенства (17) легко увидеть, что оба θ и ψ являются правыми A -линейными, и что для любого $m \in M$ выполняется

$$\psi\theta(m) = \phi(ml_i(t))r_i(t) = (t \cdot \phi)(m) = m.$$

Отсюда $\psi \circ \theta = \text{id}_M$, поэтому M_A делит $M \otimes_B A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Предположим, что H – конечная слабая алгебра Хопфа, для которой H^* полупроста, A/B – слабое правое H -Галуа расширение, и $\text{End}_B(M)/\text{End}_A(M)$ – слабое правое H^* -Галуа расширение из теоремы 2.5. Тогда по теореме 3.3 из [20] выполняется $\text{gl}(\text{End}_B(M)) \leq \text{gl}(\text{End}_B(N))$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Van Oystaeyen, Y. H. Zhang, “ H -module endomorphism rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **102**:2 (1995), 207–219.
- [2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, “Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C^* -structure”, *J. Algebra*, **221**:2 (1999), 385–438.
- [3] T. Hayashi, “Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its applications to Jones’s index theory”, *Comm. Math. Phys.*, **157**:2 (1993), 331–345.
- [4] D. Nikshych, L. Vainerman, “Finite quantum groupoids and their applications”, *New Directions in Hopf Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 211–262.
- [5] T. Yamanouchi, “Duality for generalized Kac algebras and a characterization of finite groupoid algebras”, *J. Algebra*, **163**:1 (1994), 9–50.
- [6] Ю. Ванг, Л. Ю. Жанг, “Структурная теорема для слабых модульных коалгебр”, *Матем. заметки*, **88**:1 (2010), 3–17.
- [7] R. F. Niu, Y. Wang, L. Y. Zhang, “The structure theorem of endomorphism algebras for weak Doi–Hopf modules”, *Acta Math. Hungar.*, **127**:3 (2010), 273–290.
- [8] Y. Wang, L. Y. Zhang, “The structure theorem and duality theorem for endomorphism algebras of weak Hopf algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**:6 (2011), 1133–1145.
- [9] L. Y. Zhang, “Maschke-type theorem and Morita context over weak Hopf algebras”, *Sci. China Ser. A*, **49**:5 (2006), 587–598.
- [10] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [11] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [12] S. Caenepeel, E. De Groot, “Modules over weak entwining structures”, *New Trends in Hopf Algebra Theory*, Contemp. Math., **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 31–54.
- [13] G. Böhm, “Doi–Hopf modules over weak Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:10 (2000), 4687–4698.
- [14] A. B. Rodríguez Raposo, “Crossed Products for Weak Hopf Algebras”, *Comm. Algebra*, **37**:7 (2009), 2274–2289.
- [15] X. Zhou, S. H. Wang, “The duality theorem for weak Hopf algebra (co)actions”, *Comm. Algebra*, **38**:12 (2010), 4613–4632.
- [16] D. Nikshych, “On the structure of weak Hopf algebras”, *Adv. Math.*, **170**:2 (2002), 257–286.
- [17] S. Caenepeel, E. De Groot, “Galois theory for weak Hopf algebras”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **52**:2 (2007), 151–176.
- [18] Л. Чжан, Я. Ли, “Гомоморфизмы, сепарабельные расширения и отображения Морита для слабых модульных алгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 210–222.
- [19] G. Böhm, “Galois theory for Hopf algebroids”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **51** (2005), 233–262.
- [20] X. Y. Zhou, “Homological dimension of weak Hopf–Galois extensions”, *Acta Math. Hungar.*, **138**:1–2 (2013), 140–146.

Ж. В. Ванг

Nanjing Agricultural University, China

Поступило

29.01.2013

Ю. Ю. Чень

Nanjing Agricultural University, China

Л. Ю. Жанг

Nanjing Agricultural University, China

E-mail: zlyun@njau.edu.cn