Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Псевдоторические структуры и лагранже-
ва сфера в многообразии флагов F^3 , *Матем. заметки*,
2014, том 96, выпуск 3, 476–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:48:56

Псевдоторические структуры и лагранжева сфера в многообразии флагов F^3

Н. А. Тюрин

1. Псевдоторическая структура. Кратко напомним конструкцию псевдоторической структуры ранга 1 на пространстве флагов F^3 (детали см. в [1], общее определение псевдоторических структур может быть найдено в [2]).

Реализуем F^3 как гиперповерхность $\{\mathcal{U} \in \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2\}$, задаваемую уравнением

$$\sum_{i=0}^2 x_i y_i = 0$$

на прямом произведении проективных плоскостей с однородными координатами $[x_0 : x_1 : x_2]$ и $[y_0 : y_1 : y_2]$ на $\mathbb{CP}_x^2$ и $\mathbb{CP}_y^2$ соответственно. Вещественная функция

$$F(\lambda_i; \mu_j) = \frac{\sum_{i=0}^2 \lambda_i |x_i|^2}{\sum_{i=0}^2 |x_i|^2} + \frac{\sum_{j=0}^2 \mu_j |y_j|^2}{\sum_{j=0}^2 |y_j|^2}$$

сохраняется гамильтоновым действием $\mathcal{U}$, если и только если

$$\lambda_0 + \mu_0 = \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2;$$

например, можно взять $\lambda_i = -\mu_i$. Таким образом, имеем в точности две вещественные функции Морса такого типа, которые алгебраически независимы почти всюду на $\mathcal{U}$ и коммутируют относительно скобки Пуассона, индуцируемой прямым произведением стандартных симплектических форм с прямых сомножителей (детали см. в [1]).

Выберем

$$F_1 = F(0, 1, -2; 0, -1, 2), \quad F_2 = F(1, 0, -2; -1, 0, 2);$$

эти функции имеют попарно несовпадающие критические значения на $\mathcal{U}$ (но не на объемлющем пространстве). Рассмотрим отображение

$$\psi: \mathbb{CP}_x^2 \times \mathbb{CP}_y^2 \rightarrow \mathbb{CP}_w^2,$$

задаваемое формулой $w_i = x_i y_i$; оно не определено в точности на шести прямых, соединяющих критические точки F_i на $\mathcal{U}$. Ограничим это отображение на $\mathcal{U}$ и обозначим той же буквой ψ так, что

$$\psi: \mathcal{U} \setminus (6 \text{ прямых}) \rightarrow L = \left\{ \sum_{i=0}^2 w_i = 0 \right\} \subset \mathbb{CP}_w^2.$$

Эти 6 прямых являются базисным множеством пучка дивизоров

$$D_{\alpha, \beta} = \overline{\psi^{-1}([\alpha : \beta])},$$

где в качестве однородных координат $[\alpha : \beta]$ можно взять $\alpha = w_1$, $\beta = w_2$ на L , причем (см. [1]) каждый $D_{\alpha, \beta}$ сохраняется гамильтоновым действием каждой F_i , т.е. ограничение

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ–ВШЭ, и гранта правительства РФ аг. 11.G34.31.0023.

DOI: 10.4213/mzm10519

$(F_1|_{D_{\alpha,\beta}}, F_2|_{D_{\alpha,\beta}})$ дает вполне интегрируемую систему на $D_{\alpha,\beta}$. Тип торического многообразия $D_{\alpha,\beta}$ определяется выпуклым шестиугольником $P \subset \mathbb{R}^2$, откуда видно, что гладкий компактифицированный слой над точкой $[\alpha, \beta] \in L$ есть поверхность дель Пеццо $\mathbb{CP}^2_3$; негладкие слои надлежат в точности трем точкам в L , а именно

$$p_1 = [1 : -1 : 0], \quad p_2 = [1 : 0 : -1], \quad p_3 = [0 : 1 : -1], \quad (1)$$

и являются объединениями пар поверхностей дель Пеццо типа $\mathbb{CP}^2_1$ (см. [1]).

Набор данных (F_i, ψ) есть псевдоторическая структура на многообразии флагов, используя которую, в [1] было построено лагранжево слоение с общим слоем гладкий лагранжев тор.

2. Лагранжева сфера в F^3 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выбор гладкого пути с концами в p_i и p_j на проективной прямой L , не проходящего через p_k , задает лагранжево вложение S^3 в F^3 .*

Здесь (i, j, k) – произвольная перестановка $(1, 2, 3)$, а точки p_i, p_j, p_k определены в (1).

В самом деле, пусть гладкий путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$ начинается в p_1 и кончается в p_2 . Зафиксируем значения $F_1 = F_2 = 0$. Тогда над каждой внутренней точкой $p \in \gamma \subset L$, $p \neq p_i$, это условие высекает на компактифицированном слое $D_p = \overline{\psi^{-1}(p)}$ совместное множество уровня $\{F_1 = 0, F_2 = 0\}$, являющееся гладким тором $T^2_p \subset D_p$. Над граничными точками p_1, p_2 на компактифицированных слоях D_{p_1}, D_{p_2} зафиксированные значения F_1, F_2 соответствуют прообразам пересечения трех главных диагоналей в шестиугольнике P . Это означает, что условие $\{F_1 = 0, F_2 = 0\}$ высекает окружности на D_{p_1}, D_{p_2} , лежащие на прямых пересечения пар поверхностей дель Пеццо, составляющих особые компактифицированные слои. Соберем по всем слоям D_p , $p \in \gamma$, множества уровней $\{F_1 = 0, F_2 = 0\}$:

$$S = \bigcup_{p \in \gamma} D_p \cap \{F_1 = 0, F_2 = 0\}; \quad (2)$$

подмногообразие $S \subset F^3$ лагранжево по построению, как и торы из [1], так что нам необходимо показать, что S является трехмерной сферой. Мы сделаем это в два шага: сначала построим похожую псевдоторическую структуру на $\mathbb{CP}^3$ и опишем в этих терминах лагранжево $\mathbb{RP}^3$, а затем в качестве второго шага покажем, что наше S двулистно накрывает это последнее.

Рассмотрим $\mathbb{CP}^3$ с однородными координатами $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ и псевдоторической структурой (G_1, G_2, ϕ) , построенной в [2], где $\phi: \mathbb{CP}^3 \setminus B \rightarrow \mathbb{CP}^1_{\alpha,\beta}$ задается как

$$\overline{\phi^{-1}(p)} = \{\alpha z_0 z_1 = \beta z_2 z_3\}, \quad p \mapsto [\alpha, \beta] \in \mathbb{CP}^1_{\alpha,\beta},$$

где базисное множество $B \subset \mathbb{CP}^3$ состоит из 4 прямых, а функции G_1, G_2 имеют вид

$$G_1 = \frac{|z_0|^2 - |z_1|^2 + 2|z_2|^2 - 2|z_3|^2}{\sum_{i=0}^3 |z_i|^2}, \quad G_2 = \frac{2|z_0|^2 - 2|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2}{\sum_{i=0}^3 |z_i|^2};$$

особые слои надлежат $[1 : 0]$ и $[0 : 1]$, каждый из них есть объединение двух плоскостей, пересекающихся по прямой. Зафиксируем $G_1 = G_2 = 0$ и возьмем отрезок $\alpha = t$, $\beta = t - 1$, $t \in [0, 1]$, на проективной прямой $\mathbb{CP}^1_{\alpha,\beta}$. На каждом слое

$$D'_{p_t} = \overline{\phi^{-1}(p_t)}, \quad t \neq 0, 1,$$

условия $\{G_1 = G_2 = 0\}$ высекают лагранжев тор на D'_{p_t} , а над концами p_0, p_1 мы снова имеем окружности. Получаем

$$S_0 = \bigcup_{t \in [0,1]} D'_{p_t} \cap \{G_1 = 0, G_2 = 0\}; \quad (2')$$

покажем явно, что это лагранжево $\mathbb{RP}^3$ в $\mathbb{CP}^3$. В самом деле, S_0 лагранжево по построению: рассуждение в точности такое же, как в [1], [2] для торов. Далее, покажем что S_0 есть $\mathbb{RP}^3$. Выберем другие однородные координаты $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ на $\mathbb{CP}^3$; в них стандартное $\mathbb{RP}^3$ задается условием $\{x_i \in \mathbb{R}\}$. Пусть z -координаты и x -координаты связаны следующим проективным преобразованием:

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [z_0 = x_0 + ix_1 : z_1 = ix_0 + x_1 : z_2 = x_2 + ix_3 : z_3 = ix_2 + x_3];$$

тогда условие $\{x_i \in \mathbb{R}\}$ преобразуется в условия

$$|z_0| = |z_1|, \quad |z_2| = |z_3|, \quad tz_0z_1 = (t-1)z_2z_3$$

для некоторых t , лежащих на отрезке $[0; 1]$. То есть мы получаем, что S_0 не только изоморфна $\mathbb{RP}^3$, но еще и гамильтоново изотопна стандартному вещественному проективному пространству.

Далее, покажем, что S двулистно покрывает S_0 . Пусть путь $\gamma \subset L$ соединяет точки $[1 : -1 : 0]$ и $[1 : 0 : -1]$. Вырежем из баз псевдоторических структур L и $\mathbb{CP}^1_{\alpha, \beta}$ по точке: из L точку с координатами $[0 : 1 : -1]$, а из $\mathbb{CP}^1_{\alpha, \beta}$ точку $[1 : -1]$. Заметим, что это вырезание не задевает наши лагранжевы подмногообразия S и S_0 . Посмотрим, как будут выглядеть S и S_0 при аффинизации $\mathcal{U}$ и $\mathbb{CP}^3$, возникающей после этого вырезания.

Множество

$$K_0 = \mathbb{CP}^2 \setminus Q_{1, -1}$$

– проективное пространство без квадрики $Q = \{z_0z_1 + z_2z_3 = 0\}$ – двулистно покрывается гиперповерхностью $\{Z_0Z_1 + Z_2Z_3 = 1\} \in \mathbb{C}^4$ без ветвлений. В то же время $\mathcal{U} \setminus D_{1, -1}$ может быть представлено аффинной моделью в $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ если, воспользовавшись описанием $D_{1, -1}$ как $x_0y_0 = 0$ в $\mathbb{CP}^2_x \times \mathbb{CP}^2_y$, мы возьмем в каждом прямом слагаемом аффинные карты $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Тогда нетрудно видеть, что в аффинных координатах $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ нужная нам аффинная часть $\mathcal{U}$ задается уравнением $K = \{X_1Y_1 + X_2Y_2 = 1\}$. Таким образом, после выбрасывания слоя над одной и той же точкой базы псевдоторических структур мы получаем двулистное накрытие $K \rightarrow K_0$.

Далее, оба аффинных многообразия расслоены над общей базой $\mathbb{CP}^1_{\alpha, \beta} = L$ с выколотой точкой, и нетрудно видеть, что слои ψ и ϕ совпадают. Условия зануления функций F_1, F_2, G_1, G_2 в точности соответствуют попарному равенству норм:

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 = 0 & \iff |X_1| = |Y_1|, \quad |X_2| = |Y_2|, \\ G_1 = G_2 = 0 & \iff |Z_0| = |Z_1|, \quad |Z_2| = |Z_3|. \end{aligned}$$

В результате получаем, что условия, определяющие S и S_0 , совпадают по модулю двулистности накрытия $K \rightarrow K_0$, откуда следует необходимое нам утверждение.

Таким образом, S является лагранжевой сферой.

В заключение приведем несколько естественных замечаний.

При вариациях гладкого пути $\gamma \in L$ с фиксированными концами мы получаем лагранжевы деформации S , а поскольку периоды лагранжевой сферы при непрерывных деформациях не могут изменяться, эти деформации являются гамильтоновыми изотопиями. Отсюда следует, что все лагранжевы сферы, получаемые нашей конструкцией при фиксированных концах p_i, p_j , гамильтоново изотопны. Однако совсем не очевидна гамильтонова изотопность лагранжевых сфер, получающихся при выборе разных пар концов. Нетрудно видеть, что такие сферы симплектоморфны, но очень правдоподобной выглядит гипотеза о том, что они гамильтоново неэквивалентны. Препятствия очень похожи на те, которые возникают при деформациях чекановских торов. Более того, естественно встает вопрос о том, является ли лагранжева сфера, доставляемая нашей конструкцией, известной лагранжевой сфере, возникающей из исследований системы Гельфанда–Цейтлина на многообразии флагов.

Представленная выше конструкция возникла как некоторое обобщение метода построения лагранжевых сфер из исчезающих циклов, индуцируемых пучками Лефшеца (см. [3]).

Мы используем пучки, не являющиеся в строгом смысле пучками Лефшеца, поскольку наши отображения ψ и ϕ имеют целые компоненты особенностей, а не только изолированные особенности. Однако, как мы видим, такие пучки тоже оказываются полезны в исследованиях лагранжевой геометрии алгебраических многообразий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 193–205. [2] Н. А. Тюрин, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 307–333. [3] S. K. Donaldson, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 55–64.

Н. А. Тюрин

Лаборатория теоретической
физики им. Н. Н. Боголюбова,
ОИЯИ, г. Дубна Московской обл.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва

E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

Поступило

20.03.2014