Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Троицкая, О первой краевой задаче для гиперболического уравнения на плоскости, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 294–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:14:08

УДК 517.956.32

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

С. Д. Троицкая

В работе изучается краевая задача для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными, являющаяся обобщением известной задачи Дарбу.

Библиография: 14 названий.

Пусть D_* – область в плоскости Oxy , которая ограничена двумя гладкими кривыми $\Gamma_1 := \{(x, y) : y = \gamma_1(x), -\infty < x_* \leq x \leq 0\}$ и $\Gamma_2 := \{(x, y) : x = \gamma_2(y), 0 \leq y \leq y_* < \infty\}$, выходящими из начала координат и целиком лежащими в координатном угле $x \leq 0, y \geq 0$, а также отрезками прямых $x = x_*$ и $y = y_*$. В области D_* рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором $a(x, y), b(x, y) \in C^1(D_0), c(x, y) \in C(D_0)$, где область $D_0 \supset \overline{D_*}$, а $f \in L_2(D_*)$. Ниже мы будем рассматривать обобщенные решения $u(x, y)$ этого уравнения, принадлежащие пространству Соболева $W_2^1(D_*)$. Известно (см. [1]), что при выполнении определенных условий на расположение кривых Γ_i (например, когда кривые Γ_i совпадают с характеристиками уравнения (1), либо когда они ни в одной своей точке не имеют характеристического направления) всякое такое решение $u(x, y)$ почти всюду в D_* совпадает с функцией $u_c(x, y)$, непрерывной на $\overline{D_*} \setminus D^*$, где множество D^* состоит не более чем из двух точек. Более того, следы функции $u_c(x, y)$ на кривых Γ_1, Γ_2 принадлежат пространствам $W_2^1(x_*, \varepsilon), W_2^1(\varepsilon, y_*)$ соответственно для любого $\varepsilon > 0$. Эти факты позволяют изучать краевую задачу, которая является естественным обобщением задачи Дарбу и заключается в нахождении обобщенного решения $u(x, y)$ уравнения (1), принадлежащего пространству $W_2^1(D_*)$ и удовлетворяющего краевым условиям вида

$$u|_{\Gamma_i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad \varphi_1 \in W_2^1(x_*, 0), \quad \varphi_2 \in W_2^1(0, y_*), \quad (2) \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

В большинстве работ изучаются частные случаи этой задачи, когда либо одна из кривых Γ_1, Γ_2 , либо обе являются характеристиками, а $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ (см. [2]–[6]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-01000, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96091.

Основной целью настоящей работы – изучение задачи (1), (2) в области с нехарактеристической границей. Именно такая задача возникает при исследовании спектральных свойств задачи Соболева о малых колебаниях вращающейся жидкости в некоторых трехмерных областях с ребрами (см. [1], [7]).

Обозначим через $C^{n,n}(S)$, где S – некоторая область с кусочно-гладкой границей, множество всех функций $r(x, y)$, имеющих непрерывные на $\bar{S}$ смешанные производные

$$\frac{\partial^{i+j} r(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

через $W_2^{n,n}(S)$, $n \geq 0$, гильбертово пространство функций из $L_2(S)$ с нормой

$$\|f\|_{W_2^{n,n}(S)}^2 = \sum_{i,j=0}^n \iint_S \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right|^2 dx dy.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть область $D := \{(x, y) : x_* < x < 0, 0 < l_2(x) < y < l_1(x)\}$, где функции $l_1(x), l_2(x) \in C^1[x_*, 0]$ такие, что

$$\begin{aligned} l_1'(x) < 0, \quad l_2'(x) < 0 \quad \text{для всех } x \in (x_*, 0), \\ l_1(0) = l_2(0) = 0, \quad 0 < \lim_{x \rightarrow -0} |l_2'(x)| < \lim_{x \rightarrow -0} |l_1'(x)|. \end{aligned} \quad (3)$$

Для любой функции $f \in L_2(D)$, любых $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^1(x_*, 0)$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, в пространстве $W_2^1(D)$ всегда существует и притом единственное обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, l_i(x)) = \varphi_i(x), \quad x \in (x_*, 0), \quad i = 1, 2,$$

и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1,1}(D)}^2 \leq c(\|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^1(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^1(x_*, 0)}^2),$$

где c не зависит от f, φ_1, φ_2 .

Если дополнительно предположить, что $a, b \in C^{n+1, n+1}(D_0)$, $c \in C^{n,n}(D_0)$ ($D_0 \supset \bar{D}$), $n \geq 0$, $l_1, l_2 \in C^{n+1}[x_*, 0]$, $f \in W_2^{n,n}(D)$, а функции $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{n+1}(x_*, 0)$, то указанное решение $u(x, y)$ принадлежит пространству $W_2^{n+1, n+1}(D)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{n+1, n+1}(D)}^2 \leq c_n(\|f\|_{W_2^{n,n}(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^{n+1}(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^{n+1}(x_*, 0)}^2),$$

где c_n не зависит от f, φ_1, φ_2 .

Некоторые результаты настоящей работы анонсированы в [8].

В случае, когда $a = b = c \equiv 0$, а Γ_1, Γ_2 являются отрезками прямых, единственность обобщенного решения такой задачи в пространстве $W_2^1(D)$ фактически доказана в [7]. В [1] для произвольных кривых Γ_1, Γ_2 , удовлетворяющих сформулированным условиям, единственность указанного решения доказана для уравнения Эйлера–Дарбу.

1. О гладкости решений задачи Гурса. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть в прямоугольной области $P = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ задано уравнение (1), в котором $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y) \in C^{n,n}(P)$, $n \geq 0$, и заданы функции $\varphi_1(x) \in C^{n+1}[x_0, x_1]$, $\varphi_2(y) \in C^{n+1}[y_0, y_1]$ такие, что $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(y_0)$. Тогда в классе $C^1(\overline{P})$ существует единственное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y_0) = \varphi_1(x), \quad u(x_0, y) = \varphi_2(y). \quad (4)$$

Это решение принадлежит классу $C^{n+1,n+1}(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 0$. Тогда, как известно, в классе $C^1(\overline{P})$ указанное решение $u(x, y)$ существует и единственно, при этом $\partial^2 u / \partial x \partial y \in C(\overline{P})$, т.е. $u(x, y) \in C^{1,1}(P)$. Докажем утверждение при $n = 1$. Положим

$$\begin{aligned} t_{00}^* &:= u, \quad t_{01}^* := \frac{\partial u}{\partial y}, \quad t_{10}^* := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t_{02}^* := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t_{20}^* := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ t_{11}^* &:= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t_{12}^* := \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad t_{21}^* := \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad t_{22}^* := \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

Дифференцируя систему интегральных уравнений (6) из [9, с. 253], к которой традиционно сводится задача Гурса, несложно показать, что t_{ij}^* удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} t_{00}^* &= \varphi_1(x) + \int_{y_0}^y t_{01}^*(x, y') dy', \quad t_{10}^* = \varphi_1'(x) + \int_{y_0}^y (F - at_{10}^* - bt_{01}^* - ct_{00}^*)(x, y') dy', \\ t_{01}^* &= \varphi_2'(y) + \int_{x_0}^x (F - at_{10}^* - bt_{01}^* - ct_{00}^*)(x', y) dx', \quad t_{11}^* = F - at_{10}^* - bt_{01}^* - ct_{00}^*, \\ t_{20}^* &= \varphi_1''(x) + \int_{y_0}^y (F'_x - at_{20}^* - bt_{11}^* - ct_{10}^* - a'_x t_{10}^* - b'_x t_{01}^* - c'_x t_{00}^*)(x, y') dy', \\ t_{02}^* &= \varphi_2''(y) + \int_{x_0}^x (F'_y - at_{11}^* - bt_{02}^* - ct_{01}^* - a'_y t_{10}^* - b'_y t_{01}^* - c'_y t_{00}^*)(x', y) dx', \\ t_{21}^* &= F'_x - at_{20}^* - bt_{11}^* - ct_{10}^* - a'_x t_{10}^* - b'_x t_{01}^* - c'_x t_{00}^*, \\ t_{12}^* &= F'_y - at_{11}^* - bt_{02}^* - ct_{01}^* - a'_y t_{10}^* - b'_y t_{01}^* - c'_y t_{00}^*, \\ t_{22}^* &= F''_{xy} - at_{21}^* - bt_{12}^* - ct_{11}^* - a'_{xy} t_{20}^* - b'_{xy} t_{11}^* - c'_{xy} t_{10}^* \\ &\quad - a'_x t_{11}^* - b'_x t_{02}^* - c'_x t_{01}^* - a''_{xy} t_{10}^* - b''_{xy} t_{01}^* - c''_{xy} t_{00}^*. \end{aligned}$$

Пусть $\{C(\overline{P})\}^9$ – пространство непрерывных на $\overline{P}$ вектор-функций

$$\vec{t}^* = (t_{00}^*, t_{10}^*, t_{01}^*, t_{11}^*, t_{20}^*, t_{02}^*, t_{21}^*, t_{12}^*, t_{22}^*)$$

с естественной нормой

$$\|\vec{t}^*\| = \max_{i,j=0,1,2} \left(\max_{(x,y) \in \overline{P}} |t_{ij}^*(x, y)| \right).$$

Обозначим через $\mathcal{A}_0: \{C(\overline{P})\}^9 \rightarrow \{C(\overline{P})\}^9$ линейный оператор, определяемый соответствующей однородной системой уравнений, а через $\vec{\Phi} \in \{C(\overline{P})\}^9$ вектор с координатами

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= \varphi_1(x), \quad \Phi_{10} = \varphi'_1(x) + \int_{y_0}^y F(x, y') dy', \\ \Phi_{01} &= \varphi'_2(y) + \int_{x_0}^x F(x', y) dx', \quad \Phi_{11} = F, \\ \Phi_{20} &= \varphi''_1(x) + \int_{y_0}^y F'_x(x, y') dy', \quad \Phi_{02} = \varphi''_2(y) + \int_{x_0}^x F'_y(x', y) dx', \\ \Phi_{21} &= F'_x, \quad \Phi_{12} = F'_y, \quad \Phi_{22} = F''_{xy}.\end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\mathcal{A}(\vec{t}^*) = \vec{t}^{**}$, $\mathcal{A}: \{C(\overline{P})\}^9 \rightarrow \{C(\overline{P})\}^9$, определяемое формулой $\mathcal{A}(\vec{t}^*) = \vec{\Phi} + \mathcal{A}_0(\vec{t}^{**})$. Тогда, очевидно, решение нашей системы уравнений равносильно нахождению неподвижных точек отображения $\mathcal{A}$. Докажем, что некоторая степень отображения $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением. Если $\mathcal{A}(\vec{s}^{**}) = \vec{\Phi} + \mathcal{A}_0(\vec{s}^{**})$, $\vec{s}^*, \vec{s}^{**} \in \{C(\overline{P})\}^9$, то, очевидно, $\mathcal{A}^k(\vec{t}^*) - \mathcal{A}^k(\vec{s}^{**}) = \mathcal{A}_0^k(\vec{t}^{**} - \vec{s}^{**})$, $k = 1, 2, \dots$. Положим

$$\vec{t}^{[0]} := \vec{t}^{**} - \vec{s}^{**}, \quad \vec{t}^{[k]} := \mathcal{A}_0^k(\vec{t}^{[0]}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad M := \|\vec{t}^{[0]}\|,$$

$$K := 1 + \max(|a| + |b| + |c| + |a'_x| + |b'_x| + |c'_x| + |a'_y| + |b'_y| + |c'_y| + |a''_{xy}| + |b''_{xy}| + |c''_{xy}|).$$

Тогда при $k \geq 4$

$$\max |t_{ij}^{[k]}| \leq \begin{cases} MK^k \frac{(x+y-x_0-y_0)^k}{k!}, & \text{если } i+j=0, 1, \\ MK^k \frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{если } i+j=2, \\ MK^k \frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-2}}{(k-2)!}, & \text{если } i+j=3, \\ MK^k \frac{(x+y-x_0-y_0)^{k-3}}{(k-3)!}, & \text{если } i+j=4. \end{cases}$$

Из этих оценок видно, что существует $k_0 < \infty$ такое, что отображение $\mathcal{A}^{k_0}$ является сжимающим. Это доказывает существование и единственность неподвижной точки для отображения $\mathcal{A}$ и естественным образом завершает доказательство леммы в случае $n = 1$. Ясно, что аналогично устанавливается справедливость леммы и для $n = 2, 3, 4, \dots$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в уравнении (1) коэффициенты $a, b \in C^{n+1, n+1}(P)$, $c \in C^{n, n}(P)$, $n \geq 0$, то его функция Римана $R(x, y; x_*, y_*)$ принадлежит $C^{n+1, n+1}(P)$ по каждой паре переменных $(x, y), (x_*, y_*)$.

2. О корректности задачи Гурса в классе W_2^1 . Известно, что если функция $u(x, y) \in W_2^1(P)$ является обобщенным решением уравнения (1) в прямоугольнике P , то почти всюду в P она совпадает с функцией $u_c(x, y) \in C(\overline{P})$ (как и в работе [1], мы будем называть ее непрерывным представителем такого решения). При этом для всех $x' \in [x_0, x_1]$ функция $u_c(x', y) \in W_2^1(y_0, y_1)$ и для всех $y' \in [y_0, y_1]$ функция $u_c(x, y') \in W_2^1(x_0, x_1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, b \in C^{n+1, n+1}(P)$, $c \in C^{n, n}(P)$, $f(x, y) \in W_2^{n, n}(P)$, $\varphi_1 \in W_2^{n+1}(x_0, x_1)$, $\varphi_2 \in W_2^{n+1}(y_0, y_1)$, $n \geq 0$, $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(y_0)$. В пространстве $W_2^1(P)$ существует и единственно обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4). Это решение принадлежит пространству $W_2^{n+1, n+1}(P)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{n+1, n+1}(P)}^2 \leq C_{nG} (\|f\|_{W_2^{n, n}(P)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^{n+1}(x_0, x_1)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^{n+1}(y_0, y_1)}^2),$$

где C_{nG} не зависит от f, φ_1, φ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы следуют из того, что для всякого обобщенного решения $u(x, y) \in W_2^1(P)$ уравнения (1) справедливо представление (см. [1])

$$\begin{aligned} u_c(x_*, y_*) &= \frac{1}{2} u_c(x_*, y_0) R(x_*, y_0; x_*, y_*) + \frac{1}{2} u_c(x_0, y_*) R(x_0, y_*; x_*, y_*) \\ &+ \int_{y_0}^{y_*} \left(R(x_0, y; x_*, y_*) \left(\frac{1}{2} u_c(x_0, y)'_y + a(x_0, y) u_c(x_0, y) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial y}(x_0, y; x_*, y_*) u_c(x_0, y) \right) dy \\ &+ \int_{x_0}^{x_*} \left(R(x, y_0; x_*, y_*) \left(\frac{1}{2} u_c(x, y_0)'_x + b(x, y_0) u_c(x, y_0) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y_0; x_*, y_*) u_c(x, y_0) \right) dx \\ &+ \int_{x_0}^{x_*} dx \int_{y_0}^{y_*} f(x, y) R(x, y; x_*, y_*) dy, \end{aligned}$$

где $R(x, y; x_*, y_*)$ – функция Римана уравнения (1). Ясно, что искомое решение задачи Гурса получается из этого выражения заменой $u_c(x_*, y_0)$ на $\varphi_1(x_*)$, $u_c(x_0, y_*)$ на $\varphi_2(y_*)$.

3. О корректности задачи Дарбу в классе W_2^1 . Пусть теперь уравнение (1) задано в области $S_D := \{(x, y) : x_* < x < 0, 0 < y < l(x)\}$, где $l(x) \in C^{n+1}[x_*, 0]$, $l'(x) < 0$ для всех $x \in [x_*, 0]$, $l(0) = 0$, и пусть $a(x, y), b(x, y) \in C^{n+1, n+1}(S_0)$, $c(x, y) \in C^{n, n}(S_0)$, где $S_0 \supset \overline{S}_D$.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f \in W_2^{n, n}(S_D)$, $n \geq 0$, и любых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{n+1}(x_*, 0)$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, в пространстве $W_2^1(S_D)$ существует и единственно обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l(x)) = \varphi_2(x), \quad x \in (x_*, 0).$$

Это решение принадлежит пространству $W_2^{n+1, n+1}(S_D)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{n+1, n+1}(S_D)}^2 \leq C_{nD} (\|f\|_{W_2^{n, n}(S_D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^{n+1}(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^{n+1}(x_*, 0)}^2),$$

где C_{nD} не зависит от f, φ_1, φ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко доказать, что для непрерывного представителя $u_c(x, y)$ всякого решения сформулированной задачи Дарбу при любом $x_0 \in (x_*, 0)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= \frac{1}{2}\varphi_2(0)R(0, 0; x_0, 0) + \frac{1}{2}\varphi_2(x_0)R(x_0, l(x_0); x_0, 0) \\ &+ \int_{x_0}^0 \varphi_2(x) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}(x, l(x); x_0, 0) - \frac{l'(x)}{2} \frac{\partial R}{\partial y}(x, l(x); x_0, 0) \right. \\ &\quad \left. - (b(x, l(x)) - l'(x)a(x, l(x))) R(x, l(x); x_0, 0) \right) dx \\ &+ \int_{x_0}^0 R(x, l(x); x_0, 0) \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} - l'(x) \frac{\partial u_c}{\partial y} \Big|_{y=l(x)} \right) dx \\ &+ \int_{x_0}^0 dx \int_0^{l(x)} R(x, y; x_0, 0) f(x, y) dy, \end{aligned}$$

где $R = R(x, y; x_0, y_0)$ – функция Римана уравнения (1). Это равенство можно записать в виде

$$\int_{x_0}^0 R(x, l(x); x_0, 0) h_D(x) dx = \varphi_{3D}(x_0) \quad \text{для всех } x_0 \in (x_*, 0), \quad (5)$$

где

$$h_D(x) := \frac{\partial u}{\partial x} - l'(x) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l(x)}, \quad \varphi_{3D}(x) \in W_2^1(x_*, 0).$$

Обозначим через $L_{2,*}(x_*, 0)$ гильбертово пространство классов измеримых на этом интервале функций с нормой

$$\|h(x)\|_{L_{2,*}(x_*, 0)}^2 = \int_{x_*}^0 |h(x)|^2 |x| dx.$$

Из результатов работы [1] следует, что функция $h_D(x) \in L_{2,*}(x_*, 0)$. Из (5) для почти всех $x_0 \in (x_*, 0)$ получаем равенство

$$-R(x_0, l(x_0); x_0, 0) h_D(x_0) + \int_{x_0}^0 (R(x, l(x); x_0, 0))'_{x_0} h_D(x) dx = \varphi'_{3D}(x_0). \quad (6)$$

Поскольку функция $R(x, l(x); x_0, 0)$ непрерывна вместе со своими первыми частными производными по переменным x, x_0 на множестве $T := \{(x_0, x) : x_* \leq x_0 \leq 0, x_0 \leq x \leq 0\}$ и $R(x_0, l(x_0); x_0, 0) \neq 0$, из последнего равенства следует, что на самом деле $h_D(x) \in L_2(x_0, x_1)$. Как известно, для любой функции $\varphi_{4D}(x_0) := \varphi'_{3D}(x_0) \in L_2(x_0, x_1)$ в этом пространстве существует единственное решение $h_D(x)$ уравнения Вольтерра (6), причем

$$\|h_D\|_{W_2^n(x_*, 0)} \leq C_{nV} \|\varphi_{3D}\|_{W_2^{(n+1)}(x_*, 0)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где C_{nV} не зависит от φ_{3D} . Для завершения доказательства теоремы остается лишь заметить, что искомое решение $u(x, y)$ восстанавливается однозначно по функциям φ_2, h_D и f с помощью известной формулы Римана (см., например, [9, с. 263]), справедливость которой для непрерывных представителей обобщенных решений уравнения (1), принадлежащих $W_2^1(S_D)$, следует из [1].

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x, y) \in W_2^1(D)$ является обобщенным решением задачи (1), (2). Используя результаты работы [1], несложно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_0) = & \int_{x_0}^{\psi_1(l_2(x_0))} dx \int_{l_2(x_0)}^{l_1(x)} R(x, y; x_0, l_2(x_0)) f(x, y) dy \\ & + \frac{1}{2} \varphi_1(\psi_1(l_2(x_0))) R(\psi_1(l_2(x_0)), l_2(x_0); x_0, l_2(x_0)) + \frac{1}{2} \varphi_1(x_0) R(x_0, l_1(x_0); x_0, l_2(x_0)) \\ & + \int_{x_0}^{\psi_1(l_2(x_0))} \varphi_1(x) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)) - \frac{l'_1(x)}{2} \frac{\partial R}{\partial y}(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)) \right. \\ & \quad \left. - (b(x, l_1(x)) - l'_1(x)a(x, l_1(x))) R(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)) \right) dx \\ & + \int_{x_0}^{\psi_1(l_2(x_0))} R(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - l'_1(x) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_1(x)} \right) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где $R(x, y; x_0, y_0)$ – функция Римана уравнения (1), а $\psi_1(x)$ – обратная к $y = l_1(x)$ функция. Положим

$$h(x) := \frac{\partial u}{\partial x} - l'_1(x) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=l_1(x)}.$$

Из работы [1] следует, что $h(x) \in L_{2,*}(x_*, 0)$. Для любой точки $x \in [x_*, 0)$ определим отображение $\Lambda: x \mapsto \psi_1(l_2(x))$, $\Lambda(0) = 0$ (некоторые его свойства описаны в леммах 2.3–2.5 из [1]). Тогда равенство (7) можно записать в виде

$$\int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} R(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)) h(x) dx = \varphi_3(x_0) \quad \text{для всех } x_0 \in (x_*, 0),$$

где $\varphi_3(x) \in W_2^1(x_*, 0)$. Дифференцируя последнее равенство и используя свойства функции Римана, получаем

$$h(x_0) = \Lambda'(x_0) E(x_0) h(\Lambda(x_0)) + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} K(x, x_0) h(x) dx + \varphi_4(x_0) \quad (8)$$

для почти всех $x_0 \in (x_*, 0)$, в котором

$$\begin{aligned} E(x_0) &:= \exp \left(\int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} b(x, l_2(x_0)) dx - \int_{l_2(x_0)}^{l_1(x_0)} a(x_0, y) dy \right), \\ K(x, x_0) &:= (R(x, l_1(x); x_0, l_2(x_0)))'_{x_0} \exp \left(- \int_{l_2(x_0)}^{l_1(x_0)} a(x_0, y) dy \right), \end{aligned}$$

а $\varphi_4 \in L_2(x_*, 0)$. Рассмотрим цепочку равенств, эквивалентных (8):

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) h(\Lambda^i(x_0)) &= \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^i E(\Lambda^j(x_0)) h(\Lambda^{i+1}(x_0)) \\ &+ \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) K(x, \Lambda^i(x_0)) h(x) dx \\ &+ \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) \varphi_4(\Lambda^i(x_0)) \quad \text{для почти всех } x_0 \in (x_*, 0), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Несложно убедиться в том, что последовательность чисел

$$M_i := \max_{x_0 \in [x_*, 0]} \left| \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \right| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, а последовательность непрерывных функций

$$e_i(x_0) := \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0))$$

равномерно ограничена на отрезке $[x_*, 0]$. Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_4(\Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \right\|_{L_2}^2 &= \int_{x_*}^0 \left| \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \varphi_4(\Lambda^i(x_0)) \right|^2 dx_0 \\ &\leq M_i \int_{x_*}^0 \left| \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \right| \cdot |\varphi_4(\Lambda^i(x_0))|^2 dx_0 = M_i \int_{\Lambda(x_*)}^0 |\varphi_4(z)|^2 dz, \end{aligned}$$

ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) \varphi_4(\Lambda^i(x_0)) \right) \quad (10)$$

сходится в пространстве $L_2(x_*, 0)$. А так как

$$\begin{aligned} &\int_{x_*}^0 \left| \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) K(x, \Lambda^i(x_0)) h(x) dx \right|^2 dx_0 \\ &\leq C M_i^2 \int_{x_*}^0 |\Lambda^{i+1}(x_0) - \Lambda^i(x_0)| \left(\int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} |h(x)|^2 dx \right) dx_0 \\ &\leq C M_i^2 \int_{x_*}^0 \frac{|\Lambda^{i+1}(x_0) - \Lambda^i(x_0)|}{|\Lambda^{i+1}(x_0)|} \left(\int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} |h(x)|^2 |x| dx \right) dx_0 \\ &\leq C_1 M_i^2 \int_{x_*}^0 |h(x)|^2 |x| dx, \end{aligned}$$

ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \prod_{j=0}^{i-1} \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} E(\Lambda^j(x_0)) K(x, \Lambda^i(x_0)) h(x) dx \right) \quad (11)$$

также сходится в пространстве $L_2(x_*, 0)$. Очевидно, что ряды (10), (11) сходятся и в пространстве $L_{2,*}(x_*, 0)$. Складывая i равенств (9), приходим к выводу, что последовательность функций

$$h_{(i)}(x_0) := h(x_0) - \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^i E(\Lambda^j(x_0)) h(\Lambda^{i+1}(x_0))$$

является последовательностью Коши в $L_{2,*}(x_*, 0)$. А так как $h(x) \in L_{2,*}(x_*, 0)$, то и $h_{(i)}(x_0) - h(x_0)$ также является последовательностью Коши в этом пространстве, причем

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^i E(\Lambda^j(x_0)) h(\Lambda^{i+1}(x_0)) \right\|_{L_{2,x}(x_*, 0)}^2 \\ &= \int_{x_*}^0 \left| \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \prod_{j=0}^i E(\Lambda^j(x_0)) h(\Lambda^{i+1}(x_0)) \right|^2 |x_0| dx_0 \\ &\leq C \int_{x_*}^0 \left| \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \frac{|x_0|}{\Lambda^{i+1}(x_0)} \right| \cdot |h^2(\Lambda^{i+1}(x_0)) \Lambda^{i+1}(x_0) (\Lambda^{i+1}(x_0))'| dx_0. \end{aligned}$$

Положим

$$q := \lim_{x \rightarrow -0} \frac{l_2(x)}{l_1(x)}.$$

Из условия (3) следует, что $0 < q < 1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$q_1 := \frac{(q + \varepsilon)^2}{q - \varepsilon} < 1.$$

Тогда существует $x_1 \in (x_*, 0)$ такое, что для всех $x_0 \in (x_1, 0)$ выполнены неравенства

$$|\Lambda'(x_0)| > q - \varepsilon, \quad |\Lambda^i(x_0)| < (q + \varepsilon)^i |x_0|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \Lambda^{i+1}(x_0) &= \Lambda'(\Lambda^i(x_0)) \Lambda'(\Lambda^{i-1}(x_0)) \cdots \Lambda'(\Lambda(x_0)) \Lambda'(x_0) x_0 \\ &- \frac{\Lambda''(\xi_1)}{2} x_0^2 \Lambda'(\Lambda(x_0)) \Lambda'(\Lambda^2(x_0)) \cdots \Lambda'(\Lambda^i(x_0)) \\ &- \frac{\Lambda''(\xi_2)}{2} (\Lambda(x_0))^2 \Lambda'(\Lambda^2(x_0)) \Lambda'(\Lambda^3(x_0)) \cdots \Lambda'(\Lambda^i(x_0)) \\ &- \frac{\Lambda''(\xi_3)}{2} (\Lambda^2(x_0))^2 \Lambda'(\Lambda^3(x_0)) \Lambda'(\Lambda^4(x_0)) \cdots \Lambda'(\Lambda^i(x_0)) - \dots - \frac{\Lambda''(\xi_{i+1})}{2} (\Lambda^i(x_0))^2, \end{aligned}$$

где $\xi_i \in [x_1, 0]$. Поэтому если $K_2 := \max_{x \in [x_1, 0]} |\Lambda''(x)|$, то

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=0}^i \Lambda'(\Lambda^j(x_0)) \frac{|x_0|}{\Lambda^{i+1}(x_0)} \right| &\leq \left(1 - K_2 \left(\frac{|x_0|}{|\Lambda'(x_0)|} + \frac{(\Lambda(x_0))^2}{|x_0 \Lambda'(x_0) \Lambda'(\Lambda(x_0))|} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\Lambda^i(x_0))^2}{|x_0 \Lambda'(x_0) \Lambda'(\Lambda(x_0)) \cdots \Lambda'(\Lambda^i(x_0))|} \right) \right)^{-1} \\ &\leq \left(1 - \frac{K_2 |x_0|}{q - \varepsilon} \left(1 + \frac{(q + \varepsilon)^2}{q - \varepsilon} + \dots + \frac{(q + \varepsilon)^{2i}}{(q - \varepsilon)^i} \right) \right)^{-1} \\ &\leq \left(1 - \frac{K_2 |x_0|}{(q - \varepsilon) - (q + \varepsilon)^2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

где функция $\varphi_5(x_0) \in L_2(x_*, 0)$, а функция $K_1(x, x_0)$ определена в области $T = \{(x_0, x) : x_* < x_0 < 0, x_0 < x < 0\}$, имеет бесконечное число линий разрыва, задаваемых уравнениями $x = \Lambda^i(x_0)$, $i = 1, 2, \dots$, но при этом ограничена в этой области, а именно, существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что $|K_1(x, x_0)| \leq k_1$ для всех $(x_0, x) \in T$. Поэтому уравнение (13) в пространстве $L_2(x_*, 0)$ обязательно имеет, притом единственное, решение $h(x_0)$, и справедлива оценка

$$\|h\|_{L_2(x_*, 0)}^2 \leq C_V \|\varphi_5\|_{L_2(x_*, 0)}^2 \leq C_4 (\|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^1(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^1(x_*, 0)}^2).$$

Если же выполнены условия второй части теоремы 1 и $n \geq 1$, то $K(x, x_0) \in C^{n,n}(T_1)$, где $T_1 := \{(x_0, x) : x_* < x_0 < 0, x_0 < x < \Lambda(x_0)\}$, $E(x_0) \in C^n[x_*, 0]$, $\Lambda(x_0) \in C^{n+1}[x_*, 0]$, а функция $\varphi_5(x_0) \in W_2^n(x_*, 0)$. Поэтому если $\mathcal{A}_1 : W_2^n(x_*, 0) \rightarrow W_2^n(x_*, 0)$ – отображение, определяемое правой частью равенства (13), то, используя стандартные рассуждения, несложно установить, что последовательность функций из $W_2^n(x_*, 0)$:

$$\theta_0 \equiv 0, \quad \theta_1 := \varphi_5, \quad \theta_{k+1} := \mathcal{A}_1[\theta_k], \quad k = 1, 2, \dots,$$

является последовательностью Коши в этом пространстве, поэтому ее предел – функция $h(x_0)$ – также принадлежит $W_2^n(x_*, 0)$ и

$$\|h\|_{W_2^n(x_*, 0)}^2 \leq C_{Vn} \|\varphi_5\|_{W_2^n(x_*, 0)}^2.$$

Поскольку искомое решение $u(x, y)$ нашей задачи может быть теперь однозначно восстановлено во всей области D с помощью формулы Римана по функциям φ_2, h и f , то теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2$. На пространстве $L_2(D)$ определим оператор L , ставящий в соответствие всякой функции $f(x, y)$ решение задачи (1), (2). Из теорем 1–3 следует, что оператор L вполне непрерывен и его спектр состоит из единственной точки $\lambda = 0$, которая не является собственным значением, т.е. L – оператор Вольтерра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если рассматривать задачу (1), (2) как задачу об определении положения участка колеблющейся струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = f, \quad u|_{s=c_i t} = 0, \quad 0 < c_1 < 1, \quad -1 < c_2 < 0,$$

заключенного между двумя точками, в которых положение струны известно (в начальный момент эти точки совпадают, а с течением времени они расходятся в разные стороны), то для решения $u(s, t)$ такой задачи из теорем 1–3 легко следует энергетическое неравенство

$$\int_{c_2 T}^{c_1 T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \Big|_{t=T} ds \leq C(T) \iint_{\Delta} |f|^2 ds dt,$$

где $\Delta := \{(s, t) : 0 < t < T, c_2 t < s < c_1 t\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [10] для случая, когда $a = b = c = 0$, а Γ_1, Γ_2 являются прямыми, получены оценки для решения задачи (1), (2) в весовых пространствах Соболева, введенных в [11]. Предложенный выше метод исследования задачи также позволяет рассматривать ее в этих пространствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Известно, что проблема существования не почти периодических по времени решений задачи Соболева о малых колебаниях вращающейся жидкости, заполняющей область G , тесно связана с вопросом о единственности в пространстве $W_2^1(G)$ обобщенного решения задачи Дирихле для некоторого гиперболического уравнения, заданного в области G , и сильно зависит от конфигурации G (см. [1], [7], [12], [13]). Теоремы 1–3 позволяют легко конструировать области (как двумерные, так и трехмерные), для которых имеет место единственность решения такой задачи Дирихле для гиперболических уравнений. Так, например, пусть уравнение (1) задано в области G плоскости Oxy , ограниченной кривой

$$\left(r \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \left(r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = a^2, \quad a > 1.$$

Тогда из теорем 1–3 следует, что если существует обобщенное решение $u(x, y) \in \dot{W}_2^1(G)$ данного уравнения, то оно единственно в этом пространстве. Некоторые другие примеры двумерных и трехмерных областей, обладающих этим свойством, приведены в [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В отличие от классической задачи Дарбу, условие (3), требующее чтобы кривые Γ_1, Γ_2 не касались характеристик в точке $x = 0$, необходимо для корректности задачи (1), (2). Действительно, пусть уравнение (1), в котором $a = b = c = 0$ и $f = 0$, задано в области D_{bad} , ограниченной кривыми $y = -x, y = x^2, x_* = -1/2$, и пусть $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$, т.е. выполнены все условия теоремы 1 кроме условия (3). Пусть $h(t) \neq 0$ – произвольная непрерывная на интервале $(x_*, 0)$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_x^{-x^2} h(t) dt \equiv 0 \quad \text{для всех } x \in (x_*, 0).$$

Тогда задача (1), (2) кроме тривиального имеет также решение

$$u(x, y) = \int_{-y}^x h(t) dt,$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Покажем, например, что $u'_x \in L_2(D_{\text{bad}})$. Имеем

$$\iint_{D_{\text{bad}}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{x_*}^0 |h(x)|^2 |x + x^2| dx. \quad (14)$$

Поскольку $h(x) + 2xh(-x^2) \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} a_i &:= \int_{-|x_*|^{2^i}}^{-|x_*|^{2^{i+1}}} |h(x)|^2 |x| dx = \int_{-|x_*|^{2^i}}^{-|x_*|^{2^{i+1}}} 4|x|^3 |h(-x^2)|^2 dx \\ &= \int_{-|x_*|^{2^{i+1}}}^{-|x_*|^{2^{i+2}}} 2|h(t)|^2 |t| dt = 2a_{i+1}, \end{aligned}$$

откуда следует существование интеграла

$$\int_{x_*}^0 |h(x)|^2 |x| dx = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i < \infty,$$

а вместе с ним и существование интеграла (14). Таким образом, задача (1), (2) в области D_{bad} некорректна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Троицкая С. Д. О не почти периодичности решений задачи С. Л. Соболева в областях с ребрами // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 97–124.
- [2] Капустин Н. Ю., Шония З. В. К вопросу об обобщенной разрешимости первой задачи Дарбу // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 85–91.
- [3] Капустин Н. Ю. О двух задачах для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 301–305.
- [4] Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 60–65.
- [5] Коврижкин В. В. О слабых решениях задачи Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 68–75.
- [6] Врагов В. Н. О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 7–16.
- [7] Ralston J. V. On stationary models in inviscid rotating fluids // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 44. № 2. P. 366–383.
- [8] Троицкая С. Д. О единственности обобщенного решения задачи Дарбу // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 149–150.
- [9] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
- [10] Харибегашвили С. С. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа. Дисс. ... к. ф.-м. н. Тбилиси, 1986.
- [11] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [12] Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
- [13] Александриян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. ММО. 1960. Т. 9. С. 455–505.
- [14] Троицкая С. Д. Некоторые спектральные свойства задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1992.

Московский государственный институт стали и сплавов

Поступило

02.07.97

Исправленный вариант

15.04.98