Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Гладун, Об одном методе получения формул для
тэта-функций Якоби, *Матем. заметки*, 2014, том 96,
выпуск 4, 504–511

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:00:59

Об одном методе получения формул для тэта-функций Якоби

С. Е. Гладун

В статье рассматривается новый метод получения формул для тэта-функций Якоби.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10529

В статье рассматривается новый метод получения формул для тэта-функций Якоби. В основу метода положено разложение степени тройного произведения в ряд Лорана. Для комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$ формулы, которые могут быть получены предлагаемым методом, имеют вид

$$2 \frac{\vartheta_1^2(z/2, \sqrt{q})}{\vartheta_2^2(0, \sqrt{q})} = \frac{\vartheta_3(z, q)}{\vartheta_3(0, q)} - \frac{\vartheta_2(z, q)}{\vartheta_2(0, q)}, \quad (1)$$

$$\vartheta_1^3(z, \sqrt{q}) = -a(q)\vartheta_1(3z, q^{3/2}) + 2q^{1/24}c(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \sin[(6n+1)z], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1^5(z, \sqrt{q}) = & g(0)\vartheta_1(5z, q^{5/2}) + 2g(1)q^{5/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(5n+3)/2} \sin[(10n+3)z] \\ & + 2g(2)q^{5/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(5n+1)/2} \sin[(10n+1)z], \end{aligned} \quad (3)$$

где q – база тэта-функции, $|q| < 1$, $q = e^{\pi i \tau}$, $\text{Im}(\tau) > 0$, и полагаем $q^\lambda = e^{\lambda \pi i \tau}$.

Коэффициенты $g(0)$, $g(1)$ и $g(2)$ определяются в доказательстве теоремы 3, а сами тэта-функции Якоби и тэта-функции $a(q)$, $b(q)$, $c(q)$ представляются рядами [1; с. 336] и [2; с. 93]:

$$\vartheta_1(z, q) := 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin[(2n+1)z],$$

$$\vartheta_2(z, q) := 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos[(2n+1)z],$$

$$\vartheta_3(z, q) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz),$$

$$\vartheta_4(z, q) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz),$$

$$a(q) := \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} q^{m^2 + mn + n^2},$$

$$b(q) := \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \omega^{m-n} q^{m^2 + mn + n^2},$$

$$c(q) := \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} q^{(m+1/3)^2 + (m+1/3)(n+1/3) + (n+1/3)^2},$$

где $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Определение общей тэта-функции Рамануджана можно найти в монографии [3; с. 3]:

$$f(p, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^{n(n+1)/2} q^{n(n-1)/2}, \quad \text{где } |pq| < 1.$$

В случае формулы (2) на завершающем этапе доказательства применяются модулярные уравнения третьей степени, полученные Рамануджаном.

В работе делается акцент на методе получения соотношений для тэта-функций Якоби и на формуле (3), поскольку соотношения (1) и (2) были известны ранее, только в других обозначениях, и выводились иначе.

Известно, что указанные тэта-функции являются частными случаями общей тэта-функции Римана, приведенной в обзоре Дубровина [4; с. 14]. Формула (4.1.5) из [4; с. 52], обобщающая равенство (1), является следствием теоремы сложения 1.4.1 из [4; с. 20]. Формулы для тэта-функций рода 2, аналогичные соотношению (2), приведены в разделе А7 монографии [5; с. 293–301].

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива формула (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию, представляющую собой квадрат тройного произведения:

$$S(x) := \left\{ (q; q)_{\infty}(x; q)_{\infty} \left(\frac{q}{x}; q \right)_{\infty} \right\}^2, \quad (4)$$

где $(\lambda; q)_{\infty} := \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda q^n)$.

Функция $S(x)$ аналитическая в $0 < |x| < \infty$ при $|q| < 1$. Нетрудно убедиться, что для функции $S(x)$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{S(qx)}{S(x)} = \frac{1}{x^2}, \quad (5)$$

$$S\left(\frac{q}{x}\right) = S(x). \quad (6)$$

Функция $S(x)$ может быть разложена в ряд Лорана при $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (за внутреннюю окружность кольца принимаем окружность с центром в начале координат сколь угодно малого радиуса, а за внешнюю – концентрическую сколь угодно большого

радиуса):

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)x^n. \quad (7)$$

Тогда из формул (5)–(7) следуют рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда:

$$s(n-2)q^{n-2} = s(n), \quad s(-n) = s(n)q^n.$$

Из этих соотношений ясно, что все коэффициенты выражаются через $s(0)$ и $s(1)$, а $S(x)$ ввиду абсолютной сходимости соответствующих рядов в рассматриваемой области запишется в виде

$$S(x) = s(0)\{1 + x^2 + q^2x^4 + q^6x^6 + \dots\} + s(0)\{q^2x^{-2} + q^6x^{-4} + q^{12}x^{-6} + \dots\} \\ + s(1)\{x + qx^3 + q^4x^5 + q^9x^7 + \dots\} + s(1)\{qx^{-1} + q^4x^{-3} + q^9x^{-5} + \dots\}$$

или

$$S(x) = s(0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)}x^{2n+2} + s(1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}x^{2n+1}. \quad (8)$$

Пусть согласно [3; с. 36, запись 22] определены

$$\psi(q) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}, \quad \varphi(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

и $f(-q) := f(-q, -q^2) = (q; q)_{\infty}$. Подставив значения $x = 1$ и $x = -1$ в формулу (8), получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными $s(0)$ и $s(1)$:

$$S(1) = 2s(0)\psi(q^2) + s(1)\varphi(q) = 0, \\ S(-1) = 2s(0)\psi(q^2) - s(1)\varphi(q) = 4 \frac{f^4(-q^2)}{f^2(-q)}.$$

Таким образом,

$$s(0) = \frac{f^4(-q^2)}{f^2(-q)\psi(q^2)} = \frac{\psi^2(q)}{\psi(q^2)}, \quad (9)$$

$$s(1) = -2 \frac{f^4(-q^2)}{f^2(-q)\varphi(q)} = -2 \frac{\psi^2(q)}{\varphi(q)}. \quad (10)$$

Пусть далее $x = e^{iz}$. Тогда из (4), (8), (9) и (10) получим, используя выражение тэта-функции через бесконечное произведение [1; с. 344]:

$$\vartheta_1^2\left(\frac{z}{2}, \sqrt{q}\right) = 2q^{1/4} \frac{\psi^2(q)}{\varphi(q)} \vartheta_3(z, q) - \frac{\psi^2(q)}{\psi(q^2)} \vartheta_2(z, q),$$

что эквивалентно (1). Формула доказана.

Заметим, что из формулы (1) немедленно вытекают следующие результаты для тэта-функций Якоби.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Сделав замену в формуле (1) $z \rightarrow z + \pi$, получим*

$$2 \frac{\vartheta_2^2(z/2, \sqrt{q})}{\vartheta_2^2(0, \sqrt{q})} = \frac{\vartheta_3(z, q)}{\vartheta_3(0, q)} + \frac{\vartheta_2(z, q)}{\vartheta_2(0, q)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Умножив равенство (1) на выражение следствия 1 и, воспользовавшись формулой для квадратов тэта-функций [1; с. 340], получаем

$$2 \frac{\vartheta_1(z/2, \sqrt{q})\vartheta_2(z/2, \sqrt{q})}{\vartheta_2^2(0, \sqrt{q})} = \frac{\vartheta_1(z, q)\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_2(0, q)\vartheta_3(0, q)}.$$

Эта формула равносильна преобразованию типа Ландена [1; с. 354].

ТЕОРЕМА 2. Справедлива формула (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию, представляющую собой куб тройного произведения:

$$R(x) := \left\{ (q; q)_\infty (x; q)_\infty \left(\frac{q}{x}; q \right)_\infty \right\}^3. \quad (11)$$

Далее схема доказательства аналогична приведенной в теореме 1. Функция $R(x)$ аналитическая в $0 < |x| < \infty$ при $|q| < 1$ и может быть разложена в ряд Лорана

$$R(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n)x^n. \quad (12)$$

Из (11) заключаем, что для $R(x)$ выполняются следующие равенства:

$$\frac{R(qx)}{R(x)} = -\frac{1}{x^3}, \quad (13)$$

$$R\left(\frac{q}{x}\right) = R(x). \quad (14)$$

Из формул (12)–(14) получаются рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда:

$$r(n-3)q^{n-3} = -r(n), \quad r(-n) = r(n)q^n.$$

Из этих соотношений в силу абсолютной сходимости рядов следует

$$\begin{aligned} R(x) &= r(0)x^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{3n(n+1)/2} (x^{-3(2n+1)/2} - x^{3(2n+1)/2}) \\ &\quad + r(1)x^{3/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} (x^{-(6n+1)/2} - x^{(6n+1)/2}). \end{aligned}$$

После замены переменной $x = e^{iz}$ эта формула будет иметь вид

$$\begin{aligned} R(e^{iz}) &= -2ir(0)e^{i3z/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{3n(n+1)/2} \sin \left[\frac{3}{2}(2n+1)z \right] \\ &\quad - 2ir(1)e^{i3z/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \sin \left[\frac{6n+1}{2}z \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Положим в формуле (15) $z = 2\pi/3$, получим

$$r(1) = -3 \frac{(q^3; q^3)_\infty^3}{(q; q)_\infty}. \quad (16)$$

Из формулы пятикратного произведения Ватсона [3; с. 118] при $n = \pi/3$ следует

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(3k+1)/2} = (q; q)_{\infty} (q\omega; q)_{\infty} (q\omega^2; q)_{\infty} (q\omega^2; q^2)_{\infty} (q\omega; q^2)_{\infty}.$$

Отсюда получается выражение суммы ряда через бесконечное произведение:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(3k+1)/2} = \frac{(q^3; q^3)_{\infty}^2 (q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q)_{\infty} (q^6; q^6)_{\infty}}. \quad (17)$$

Выразив произведение из левой части формулы (15) через тэта-функцию (см. [1; с. 344]), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} -\frac{\vartheta_1^3(z/2, \sqrt{q})}{q^{3/8}} &= 2r(0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{3n(n+1)/2} \sin \left[\frac{3}{2} (2n+1)z \right] \\ &+ 2r(1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \sin \left[\frac{6n+1}{2} z \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив в это выражение $z = \pi/3$ и приняв во внимание (16), получим

$$r(0) = \frac{3}{2} \frac{(q^3; q^3)_{\infty}^6}{(q; q)_{\infty}^2} \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q^6; q^6)_{\infty}^3} - \frac{1}{2} \frac{(q; q)_{\infty}^6}{(q^3; q^3)_{\infty}^2} \frac{(q^6; q^6)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}^3}.$$

Используя формулы для тэта-функций [2; с. 109, (5.4) и (5.5)], запишем это выражение в виде

$$r(0) = \frac{1}{2} \frac{c^2(q)}{c(q^2)} - \frac{1}{2} \frac{b^2(q)}{b(q^2)}. \quad (19)$$

Пусть далее $z_n = \varphi^2(q^n)$, $m = z_1/z_n$. Пусть квадрат модуля эллиптического интеграла первого рода K обозначен через α . База

$$q = e^{-\pi K'/K} \quad \text{и} \quad \sqrt{1-\alpha} = \frac{\varphi^2(-q)}{\varphi^2(q)}.$$

Через β обозначен квадрат модуля степени 3 относительно α , так что

$$\sqrt{1-\beta} = \frac{\varphi^2(-q^3)}{\varphi^2(q^3)}.$$

Пользуясь результатами, приведенными в [3; с. 124, запись 12] и [2; с. 117], будем иметь из формулы (19)

$$r(0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z_1^{3/2}}{z_3^{1/2}} \frac{\alpha^{3/4}}{\beta^{1/4}} - \frac{3}{2} \frac{z_1^{3/2}}{z_3^{1/2}} \frac{1}{m^2} + \frac{z_1^{3/2}}{2z_3^{1/2}} - \frac{z_1^{3/2}}{z_3^{1/2}} \frac{(1-\alpha)^{3/4}}{(1-\beta)^{1/4}} \right\}. \quad (20)$$

Из формулы (20) на основе известных модулярных уравнений [3; с. 232, (5.1)] следует, что

$$r(0) = \frac{1}{2} \frac{z_1^{3/2}}{z_3^{1/2}} \left\{ \frac{(3+m)^2}{4m^2} - \frac{3}{2m^2} + \frac{1}{2} - \frac{(3-m)^2}{4m^2} \right\} = \frac{z_1^{3/2}}{z_3^{1/2}} \frac{m^2 + 6m - 3}{4m^2}.$$

Отсюда, используя [2; с. 94, (2.10)], получаем

$$r(0) = a(q). \quad (21)$$

Учитывая выражения (16), (21) и [2; с. 109, (5.5)], мы можем заключить, что из формулы (18), где сделана замена $z \rightarrow 2z$, следует формула (2). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Продифференцировав формулу (2) по z , учитывая равномерную сходимость полученных рядов и подставив в результат $z = 0$, приходим к следующему тождеству:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (6n+1) q^{n(3n+1)/2} = a(q)(q; q)_{\infty}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Продифференцировав трижды формулу (2) по z и подставив в результат $z = 0$, получаем*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (6n+1)^3 q^{n(3n+1)/2} = (q; q)_{\infty} \{9a(q)L(q^3) - 8b^3(q)\},$$

где

$$L(q) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}$$

– ряд Эйзенштейна.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Сделав замену в формуле (2) $z \rightarrow z + \pi/2$, получим*

$$\vartheta_2^3(z, \sqrt{q}) = a(q)\vartheta_2(3z, q^{3/2}) + 2q^{1/24}c(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(3n+1)/2} \cos[(6n+1)z].$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедлива формула (3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательствам теорем 1 и 2 рассматривается функция, представляющая собой пятую степень тройного произведения Якоби:

$$G(x) := \left\{ (q; q)_{\infty} (x; q)_{\infty} \left(\frac{q}{x}; q \right)_{\infty} \right\}^5. \quad (22)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда Лорана функции $G(x)$ в данном случае имеют вид

$$g(n-5)q^{n-5} = -g(n), \quad g(-n) = g(n)q^n.$$

Поэтому все коэффициенты выражаются через $g(0)$, $g(1)$ и $g(2)$. Рассуждая так же, как при доказательствах теорем 1 и 2, приходим к следующей формуле для пятой степени тэта-функции Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_1^5(z/2, \sqrt{q})}{q^{5/8}} &= g(0) \frac{\vartheta_1(5z/2, q^{5/2})}{q^{5/8}} + 2g(1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(5n+3)/2} \sin \left[\frac{10n+3}{2} z \right] \\ &+ 2g(2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(5n+1)/2} \sin \left[\frac{10n+1}{2} z \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Для определения коэффициентов $g(1)$ и $g(2)$ подставим в формулу (23) значения $z = 2\pi/5$, а затем $z = 6\pi/5$, получим

$$g(1) = \frac{\sqrt{(5 + \sqrt{5})/2} \vartheta_1^5(\pi/5, \sqrt{q}) - \sqrt{(5 - \sqrt{5})/2} \vartheta_1^5(3\pi/5, \sqrt{q})}{5q^{5/8} f(-q, -q^4)}, \quad (24)$$

$$g(2) = \frac{\sqrt{(5 + \sqrt{5})/2} \vartheta_1^5(3\pi/5, \sqrt{q}) + \sqrt{(5 - \sqrt{5})/2} \vartheta_1^5(\pi/5, \sqrt{q})}{5q^{5/8} f(-q^2, -q^3)}. \quad (25)$$

В этих равенствах можно применить следующие соотношения, которые легко проверяются:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right) = q^{1/8} \left\{ \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} f(-q^{10}, -q^{15}) - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} qf(-q^5, -q^{20}) \right\}, \quad (26)$$

$$\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{5}, \sqrt{q}\right) = q^{1/8} \left\{ \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} f(-q^{10}, -q^{15}) + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} qf(-q^5, -q^{20}) \right\}. \quad (27)$$

Аналогично получаем формулу для коэффициента $g(0)$:

$$g(0) = \frac{16q^{5/8}\psi^5(q) + \vartheta_1^5(\pi/10, \sqrt{q}) - \vartheta_1^5(3\pi/10, \sqrt{q})}{5q^{5/8}\psi(q^5)}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{10}, \sqrt{q}\right) &= 2q^{1/8} \left\{ \frac{\sqrt{5}}{4} [f(q^{10}, q^{15}) - qf(q^5, q^{20})] \right. \\ &\quad \left. - 2q^{1/8} \left\{ \frac{1}{4} [f(q^{10}, q^{15}) + qf(q^5, q^{20})] - q^3\psi(q^{25}) \right\} \right\}, \\ \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{10}, \sqrt{q}\right) &= 2q^{1/8} \left\{ \frac{\sqrt{5}}{4} [f(q^{10}, q^{15}) - qf(q^5, q^{20})] \right. \\ &\quad \left. + 2q^{1/8} \left\{ \frac{1}{4} [f(q^{10}, q^{15}) + qf(q^5, q^{20})] - q^3\psi(q^{25}) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя [3; с. 262, запись 10, (i) и (v)], получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{10}, \sqrt{q}\right) - \vartheta_1\left(\frac{\pi}{10}, \sqrt{q}\right) &= q^{1/8} \tau(q), \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{10}, \sqrt{q}\right) \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{10}, \sqrt{q}\right) &= q^{1/4} \rho(q), \end{aligned}$$

где функции $\tau(q)$ и $\rho(q)$ определяются выражениями

$$\tau(q) = \psi(q) - 5q^3\psi(q^{25}), \quad (29)$$

$$\rho(q) = \psi^2(q) - 5q\psi^2(q^5). \quad (30)$$

Ввиду очевидного алгебраического соотношения

$$B^5 - A^5 = (B - A)\{(B - A)^4 + 5AB(B - A)^2 + 5(AB)^2\}$$

формула (28) переписывается следующим образом:

$$g(0) = \frac{16\psi^5(q) - \tau(q)\{\tau^4(q) + 5\tau^2(q)\rho(q) + 5\rho^2(q)\}}{5\psi(q^5)}. \quad (31)$$

Из (31) мы видим, как $g(0)$ выражается через тэта-функцию ψ . Значения коэффициентов $g(1)$ и $g(2)$ получаются из (24)–(27) через общую тэта-функцию Рамануджана $f(-q^k, -q^{5-k})$ и $f(-q^{5k}, -q^{25-5k})$, где $k = 1$ или $k = 2$.

Сделав замену $z \rightarrow 2z$ в формуле (23), приходим к (3), где коэффициенты $g(0)$, $g(1)$ и $g(2)$ вычислены выше.

Мы увидели, что предлагаемый метод работает и в этом случае.

Заметим, что не так давно были изданы несколько томов “Lost Notebooks” Рамануджана (см. [6]–[10]), в которых представлены материалы, не изданные в его основных работах.

Автор надеется, что данная работа внесет скромный вклад в исследование трудов Рамануджана, которое продолжается до нынешнего времени (см., например, работы последователей великого индийского математика [11], [12]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*. Ч. 2. *Трансцендентные функции*, ГИФМЛ, М., 1963.
- [2] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36:2** (1981), 11–80.
- [5] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Mateveev, *Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Evolution Equations*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] G. E. Andrews, “An introduction to Ramanujan's “lost” notebook”, *Amer. Math. Monthly*, **86:2** (1979), 89–108.
- [7] G. E. Andrews, “Ramanujan's “lost” notebook III. The Rogers–Ramanujan continued fraction”, *Adv. in Math.*, **41:2** (1981), 186–208.
- [8] G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part I*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [9] G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part II*, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [10] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa Publ. House, New Delhi, 1988.
- [11] D. Bowman, J. McLaughlin, A. V. Sills, “Some more identities of Rogers–Ramanujan type”, *Ramanujan J.*, **18:3** (2009), 307–325.
- [12] J. McLaughlin, A. V. Sills, “Rogers–Ramanujan–Slater type identities”, *Electron. J. Combin.*, 2008, Dynamic Survey, #DS15.

С. Е. Гладун

г. Черкассы

E-mail: gladunse@inbox.ru

Поступило

17.09.2013