Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Полудистрибутивные и дистрибутивно разложимые кольца, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 307–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1053>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:29:43

УДК 512.55

ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫЕ И ДИСТРИБУТИВНО РАЗЛОЖИМЫЕ КОЛЬЦА

А. А. Туганбаев

Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной решеткой подмодулей. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным модулем. Исследуются полудистрибутивные справа кольца, а также дистрибутивно разложимые кольца.

Библиография: 10 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль M называется *дистрибутивным (цепным)*, если решетка $\text{Lat}(M)$ всех его подмодулей дистрибутивна (является цепью). Прямая сумма дистрибутивных (цепных) модулей называется *полудистрибутивным (полуцепным)* модулем. Слова “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо A назовем *дистрибутивно разложимым справа*, если его единица является суммой ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ таких, что все $e_i A e_i$ – дистрибутивные справа кольца. Каждое дистрибутивное справа кольцо является полудистрибутивным справа кольцом. Любое полудистрибутивное справа кольцо является дистрибутивно разложимым справа [1, лемма 3 (7)]. Кольцо всех (2×2) -матриц над полем является полудистрибутивным, но не дистрибутивным справа кольцом. Кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a, b – любые комплексные числа, c – любое действительное число, является дистрибутивно разложимым, но не полудистрибутивным справа кольцом.

Обозначим через $J(M)$ радикал Джекобсона модуля M . В [2] доказано, что если A – полудистрибутивное нётерово полусовершенное кольцо, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J(A))^i = 0$. Одним из основных результатов данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – полудистрибутивное справа нётерово кольцо. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J(A))^i = 0$ и правая размерность Крулля кольца A не превосходит 1.

Теорема 1 следует из аналогичного результата для дистрибутивно разложимых справа нётеровых колец (предложение 1). В работе доказаны и другие результаты о полудистрибутивных и дистрибутивно разложимых кольцах. Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть L – частично упорядоченное множество. Пусть $L_1, L_2 \in L$ и $L_2 \leq L_1$. Обозначим через L_1/L_2 частично упорядоченное подмножество в L , образованное всеми элементами $N \in L$ такими, что $L_2 \leq N \leq L_1$. *Девияция* $\text{dev}(L)$ множества L определяется с помощью трансфинитной рекурсии следующим образом:

- 1) если L состоит из одного элемента, то $\text{dev}(L) = -1$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00627.

- 2) если α – ординальное число и $\text{dev}(L) \neq \beta$, где $\beta < \alpha$, то $\text{dev}(L) = \alpha$ в том случае, когда L не имеет бесконечных убывающих цепей $L_1 > L_2 > \dots$ таких, что $\text{dev}(L_i/L_{i+1}) \neq \beta$, где $\beta < \alpha$.

Не все частично упорядоченные множества обладают девиацией. Если решетка $\text{Lat}(M)$ подмодулей модуля M обладает девиацией, то эту девиацию обозначим через $\text{Kdim}(M)$ и назовем *размерностью Крулля* модуля M . Без особых ссылок будем использовать тот факт, что каждый нётеров модуль обладает размерностью Крулля [3].

Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Подмодуль фактормодуля называется *подфактором*. Модуль M называется *счетно-дистрибутивным*, если M удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:

- а) никакой подфактор модуля M не содержит бесконечных прямых сумм изоморфных простых модулей;
- б) никакой подфактор модуля M не содержит бесконечных прямых сумм изоморфных ненулевых модулей.

Любой дистрибутивный модуль M не имеет подфакторов, являющихся прямыми суммами двух изоморфных ненулевых модулей и, следовательно, M – счетно-дистрибутивный модуль. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Прямая сумма равномерных модулей называется *полуравномерным* модулем. Модуль называется *риккартовым*, если все его циклические подмодули проективны.

Циклический модуль M называется *локальным*, если M имеет ровно один максимальный подмодуль (т.е. если $M/J(M)$ – цепной модуль). Кольцо A называется *полусовершенным*, если выполнены два эквивалентных условия:

- а) A_A – прямая сумма локальных модулей;
- б) A – полулокальное кольцо и все идемпотенты кольца $A/J(A)$ поднимаются до идемпотентов кольца A .

Кольцо A называется *совершенным справа (слева)*, если A – полулокальное кольцо и для любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов радикала $J(A)$ существует свой номер n такой, что $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = 0$ ($a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 0$). Кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Собственный идеал B кольца A называется *несингулярно первичным*, если A/B – несингулярное справа первичное кольцо. Очевидно, правый и левый аннуляторы любого идеала полупервичного кольца A совпадают. Поэтому любой идеал полупервичного кольца A , являющийся правым (левым) аннулятором некоторого идеала B кольца A , называется *аннуляторным идеалом* и обозначается через B^* . Аннуляторный идеал, максимальный среди собственных аннуляторных идеалов полупервичного кольца, называется *максимальным аннуляторным идеалом*.

ЛЕММА 1 [4]. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A – дистрибутивное справа нётерово кольцо;
- (2) A – конечное прямое произведение цепных справа артиновых колец и инвариантных областей, у которых каждое собственное факторкольцо является конечным прямым произведением цепных артиновых колец.

ЛЕММА 2. Если A – дистрибутивное справа нётерово кольцо, то $\text{Kdim}(A_A) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 2 следует из леммы 1.

ЛЕММА 3 [1]. Пусть e – ненулевой идемпотент кольца A . Тогда

- (1) для любого модуля M_A правило $\varphi(N) = Ne$ задает сюръективный решеточный гомоморфизм $\varphi: \text{Lat}(M) \rightarrow \text{Lat}((Me)_{eAe})$, причем если $M_A = \bigoplus_{j \in J} M_j$, то $Me_{eAe} = \bigoplus_{j \in J} M_j e$;
- (2) если M_A – нётеров модуль (дистрибутивный модуль, прямая сумма локальных модулей), то модуль Me_{eAe} обладает аналогичным свойством;
- (3) если eA_A – нётеров модуль (дистрибутивный модуль, прямая сумма локальных модулей), то eAe – нётерово справа (дистрибутивное справа, полусовершенное) кольцо;
- (4) если A – нётерово справа (слева) кольцо, то кольцо eAe является нётеровым справа (слева) и, следовательно, обладает правой (левой) размерностью Крулля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) и импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ проверяются непосредственно.

ЛЕММА 4. Пусть A – дистрибутивно разложимое справа нётерово кольцо. Тогда существует разложение $1 = e_1 + \dots + e_n$ единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов e_i такое, что все $e_i A e_i$ – дистрибутивные справа нётеровы кольца, у которых правая размерность Крулля не превосходит 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4 следует из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 5. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов e_i , M – правый A -модуль. Если правый $e_i A e_i$ -модуль Me_i обладает размерностью Крулля α_i для любого i , то модуль M_A обладает размерностью Крулля равной $\max\{\alpha_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 5 непосредственно вытекает из определения размерности Крулля.

ЛЕММА 6. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов e_i , причем для любых i, j правый $e_i A e_i$ -модуль $e_j A e_i$ обладает размерностью Крулля α_{ij} . Тогда модуль A_A обладает размерностью Крулля равной $\max\{\alpha_{ij}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_j \equiv \max\{\alpha_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq n$). По лемме 5 модуль $e_j A_A$ имеет размерность Крулля равную β_j . Так как $A_A = \bigoplus_{j=1}^n e_j A$, правая размерность Крулля кольца A существует и равна $\max\{\beta_j\} = \max\{\alpha_{ij}\}$.

ЛЕММА 7. Пусть A – нётерово справа кольцо, $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов e_i , γ_i , $i = 1, \dots, n$, – правая размерность Крулля нётерова справа кольца $e_i A e_i$ (см. лемму 3(4)). Тогда $\text{Kdim}(A_A) = \max\{\gamma_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Так как $e_j A_A$ – нётеров модуль, по лемме 3(2) $e_j A e_i$ – нётеров правый $e_i A e_i$ -модуль и, следовательно, имеет размерность Крулля равную α_{ij} . Поскольку $e_j A e_i$ – конечнопорожденный правый $e_i A e_i$ -модуль и $e_i A e_i$ имеет правую размерность Крулля равную γ_i , то $\alpha_{ij} \leq \gamma_i \leq \text{Kdim}(A_A)$ (см. [3]). По лемме 6 $\text{Kdim}(A_A) = \max\{\alpha_{ij}\}$. Поэтому $\text{Kdim}(A_A) = \max\{\gamma_i\}$.

ЛЕММА 8 [5]. Если A – нётерово кольцо и $\text{Kdim}(A_A) \leq 1$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J(A))^i = 0$.

ЛЕММА 9. Пусть A – нётерово кольцо, $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов e_i ; α_i , $i = 1, \dots, n$, – правая размерность Крулля нётерова кольца $e_i A e_i$ (см. лемму 3(4)).

Если $\alpha_i \leq 1$ для всех i , то $\text{Kdim}(A) \leq 1$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J(A))^i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 9 следует из лемм 7 и 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – дистрибутивно разложимое справа нётерово кольцо. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} (J(A))^i = 0$ и правая размерность Крулля кольца A не превосходит 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 1 следует из лемм 4 и 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 1 следует из предложения 1 и того, что по лемме 3(3) все полудистрибутивные справа кольца являются дистрибутивно разложимыми справа.

ЛЕММА 10. Пусть M – правый модуль над полулокальным кольцом A , причем M является конечной прямой суммой счетно-дистрибутивных модулей. Тогда

- (1) все подфакторы модуля M конечномерны;
- (2) если M – полуартинов модуль, то M – артинов модуль;
- (3) если A – совершенное слева кольцо, то M – артинов модуль;
- (4) если A – совершенное справа кольцо, то M – нётеров модуль;
- (5) если A – совершенное кольцо, то M – модуль, обладающий композиционным рядом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 10 следует из [6, лемма 15, замечания 1, 3 и 4].

ЛЕММА 11. Пусть A – полулокальное кольцо, являющееся (конечной) прямой суммой счетно-дистрибутивных правых идеалов. Тогда

- (1) A – конечномерное справа кольцо;
- (2) если A – наследственное справа кольцо, то A – нётерово справа кольцо;
- (3) если A – совершенное слева или справа кольцо, то A – артиново справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 10(1); (2) следует из (1) и того, что наследственное справа конечномерное справа кольцо является нётеровым справа [7, утверждение 5.20]. Осталось доказать (3). Если A – совершенное слева кольцо, то по лемме 10(3) A – артиново справа кольцо. Пусть A – совершенное справа кольцо. По лемме 10(4) A – нётерово справа кольцо и, кроме того, радикал $J(A)$ совершенного справа кольца A является нильидеалом. Поэтому A – полупримальное нётерово справа кольцо. Тогда A – артиново справа кольцо.

ЛЕММА 12. Пусть A – полусовершенное кольцо, у которого все 2-порожденные правые идеалы проективны как правые A -модули. Тогда A – полуравномерное справа кольцо, если и только если A – полуцепное справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать только импликацию “ $\implies$ ”. Пусть M – равномерное прямое слагаемое модуля A_A . Достаточно установить, что M_A – цепной модуль. Допустим противное. Тогда существуют несравнимые по включению циклические подмодули F и G модуля M . Поэтому $F + G$ есть 2-порожденный модуль, не

являющийся локальным. Так как $F + G$ – неразложимый конечнопорожденный проективный модуль над полусовершенным кольцом A , то $F + G$ – локальный модуль (см. [8, утверждение 22.23]). Получили противоречие.

ЛЕММА 13. *Любое риккартово справа конечномерное справа полупервичное кольцо A является полуравномерным справа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Риккартово справа кольцо A является несингулярным справа. Конечномерное справа кольцо A имеет существенный правый идеал M , который является конечной прямой суммой равномерных правых идеалов $M_1, \dots, M_n$. Так как A – несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо, то A является правым порядком в полупростом артиновом кольце [9, утверждение 9.13]. Поэтому существенный правый идеал M кольца A содержит некоторый регулярный элемент a . Так как A – риккартово справа конечномерное справа кольцо и $aA \subseteq M$, проективный модуль aA изоморфен прямой сумме некоторых подмодулей из M_i , причем $aA \cong A_A$. Поэтому A – полуравномерное справа кольцо.

ЛЕММА 14. *Любое полунаследственное справа конечномерное справа полусовершенное полупервичное кольцо A является полуцепным справа кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 14 следует из лемм 12 и 13.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A – наследственное справа полусовершенное полупервичное кольцо. Равносильны следующие условия:*

- (1) A – нётерово справа кольцо;
- (2) A – полуцепное справа кольцо;
- (3) A – полудистрибутивное справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) следует из леммы 14. Импликация (2) $\implies$ (3) очевидна. Импликация (3) $\implies$ (1) следует из леммы 11 (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 нельзя отбросить условие полупервичности. Действительно, пусть A – подалгебра алгебры всех верхнетреугольных матриц третьего порядка над полем F , F -базисом которой служат матричные единицы $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$. Согласно [1, замечание 5] A – наследственное артиново полудистрибутивное кольцо, не являющееся полуцепным справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пример кольца A рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на 2 и 3, показывает, что в теореме 2 условие полусовершенности нельзя заменить условием полулокальности. В данном случае A – нётерова дистрибутивная полулокальная область, не являющаяся полуцепным кольцом.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если A – кольцо не дискретного нормирования в поле, то можно проверить, что в теореме 2 условие наследственности нельзя заменить условием полунаследственности. В данном случае A – цепная (в частности, полусовершенная и дистрибутивная) область, не являющаяся нётеровой.

ЛЕММА 15. *Пусть $P_1, \dots, P_n$ – идеалы кольца A такие, что $P_1 \cap \dots \cap P_n = 0$, причем $P_i + P_j = A$ для всех $i \neq j$. Тогда $A \cong \prod_{i=1}^n A/P_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 15 (китайская теорема об остатках) хорошо известна и проверяется непосредственно.

ЛЕММА 16 [1, лемма 11]. Пусть A – дистрибутивно разложимое справа кольцо. Тогда

- (1) если P, Q – несравнимые по включению несингулярно первичные идеалы кольца A , то $P + Q = A$;
- (2) первичный радикал кольца A содержит любой правый (левый) нильideal кольца A .

ЛЕММА 17. Пусть A – несингулярное справа полупервичное кольцо с условием максимальности для аннуляторных идеалов. Тогда

- (1) существуют несравнимые по включению несингулярно первичные идеалы $P_1, \dots, P_n$ кольца A такие, что $P_1 \cap \dots \cap P_n = 0$;
- (2) если A – дистрибутивно разложимое справа кольцо, то A – конечное прямое произведение дистрибутивно разложимых справа несингулярных справа первичных колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [1, лемма 12]. Докажем (2). Согласно (1) и лемме 16(1) существуют несравнимые по включению несингулярно первичные идеалы $P_1, \dots, P_n$ кольца A такие, что $P_1 \cap \dots \cap P_n = 0$ и $P_i + P_j = A$ для всех $i \neq j$. Теперь утверждение (2) следует из леммы 15.

ЛЕММА 18 [1, предложение 4(1), (2)]. Пусть единица кольца A является суммой ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ таких, что в каждом кольце $e_i A e_i$ сумма любых двух несравнимых по включению первичных идеалов равна $e_i A e_i$. Тогда

- (1) сумма любых двух несравнимых по включению первичных идеалов P, Q кольца A равна A ;
- (2) если A – полупервичное кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, то A – конечное прямое произведение первичных колец.

ЛЕММА 19. Пусть A – полусовершенное кольцо, являющееся дистрибутивно разложимым справа относительно ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$. Тогда

- (1) каждое кольцо $e_i A e_i$ является конечным прямым произведением цепных справа колец;
- (2) в каждом кольце $e_i A e_i$ сумма любых двух несравнимых по включению первичных идеалов равна $e_i A e_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). Каждое кольцо $e_i A e_i$ является по лемме 3(3) полусовершенным и дистрибутивным справа. Тогда A – конечное прямое произведение цепных справа колец [10, теорема 2.4]. (2) проверяется с помощью (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – дистрибутивно разложимое справа полупервичное кольцо. Если A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов или кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов, то A – конечное прямое произведение дистрибутивно разложимых справа первичных несингулярных колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A – полупервичное кольцо, причем A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов или кольцо с условием максимальности

для левых аннуляторов, то A – несингулярное справа и слева кольцо (см., например, [1, лемма 15]). Теперь утверждение следует из леммы 17 (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – дистрибутивно разложимое справа полупервичное полусовершенное кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда A – конечное прямое произведение дистрибутивно разложимых справа первичных полусовершенных колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 3 следует из лемм 18 (2) и 19 (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть M – конечная прямая сумма правых (левых) модулей $M_1, \dots, M_n$ таких, что все кольца $\text{End}(M_i)$ являются дистрибутивными справа. Тогда первичный радикал кольца $\text{End}(M)$ содержит любой правый (левый) нильideal кольца $\text{End}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \equiv \text{End}(M)$. Существуют ортогональные идемпотенты $e_1, \dots, e_n$ кольца A такие, что $e_1 + \dots + e_n = 1$ и $\text{End}(M_i) \cong e_i A e_i$ для любого i . По предположению все кольца $e_i A_i$ являются дистрибутивными справа. Теперь утверждение следует из леммы 16 (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Туганбаев А. А. Прямые суммы дистрибутивных модулей // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 137–156.
- [2] Wright M. H. Right locally distributive rings // Ring Theory. Proc. Bien. Ohio State. Denison Conf. (Granville, Ohio, May 1992). Singapore: World Sci. Publ., 1993. P. 350–357.
- [3] Gordon R., Robson J. C. Krull dimension // Mem. Amer. Math. Soc. 1973. V. 133. P. 1–78.
- [4] Туганбаев А. А. Кольца, у которых структура правых идеалов дистрибутивна // Изв. вузов. Матем. 1986. № 2. С. 44–49.
- [5] Lenagan T. H. Noetherian rings with Krull dimension one // J. London Math. Soc. (2). 1977. V. 15. № 1. P. 41–47.
- [6] Туганбаев А. А. Дистрибутивные полупервичные кольца // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 736–761.
- [7] Goodearl K. R. Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules. New York: Marcel Dekker, 1976.
- [8] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [9] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [10] Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. V. 28. № 2. P. 291–310.