Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Геворкян, О бинарных G -пространствах, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 623–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:01:56

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О бинарных G -пространствах

П. С. Геворкян

1. Непрерывные бинарные операции. Пусть X – произвольное топологическое пространство.

Непрерывное отображение $f: X^2 \rightarrow X$ назовем *непрерывной бинарной операцией* топологического пространства X . Множество всех непрерывных бинарных операций пространства X обозначим через $C_2(X)$. На множестве $C_2(X)$ определим операцию $*$ формулой¹

$$(f * \varphi)(x_1, x_2) = f(x_1, \varphi(x_1, x_2))$$

для всех $x_1, x_2 \in X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество $C_2(X)$ с операцией $*$ является топологической полугруппой с единицей $e(x_1, x_2) = x_2$, т.е. топологическим моноидом.*

Непрерывная бинарная операция $f \in C_2(X)$ называется *обратимой*, если существует такая непрерывная бинарная операция $\varphi \in C_2(X)$, что

$$f * \varphi = \varphi * f = e.$$

В этом случае f и φ называются *взаимно-обратными бинарными операциями*.

Подмножество всех обратимых элементов множества $C_2(X)$ обозначим через $C_2^*(X)$. Итак, $C_2^*(X)$ является группой.

Заметим, что каждая бинарная операция $f \in C_2(X)$ для произвольного $a \in X$ порождает непрерывное отображение $f_a: X \rightarrow X$ формулой

$$f_a(x) = f(a, x),$$

где $x \in X$.

ТЕОРЕМА 1. *Непрерывная бинарная операция $f: X^2 \rightarrow X$ обратима тогда и только тогда, когда для произвольного $a \in X$ отображение $f_a: X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом.*

2. Бинарные действия групп. Пусть X – топологическое пространство, а G – топологическая группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Непрерывное отображение $\alpha: G \times X^2 \rightarrow X$ назовем *бинарным действием* топологической группы G на пространстве X , если выполняются условия

$$\alpha(gh, x_1, x_2) = \alpha(g, x_1, \alpha(h, x_1, x_2)), \quad (1)$$

$$\alpha(e, x_1, x_2) = x_2 \quad (2)$$

для всех $g, h \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

¹Эта операция хорошо известна в алгебре (см., например, [1]).

Пространство X с фиксированным бинарным действием группы G или тройку (G, X, α) назовем *бинарным G -пространством*.

Часто вместо обозначения $\alpha(g, x_1, x_2)$ мы будем пользоваться записью $g(x_1, x_2)$, и тогда равенства (1) и (2) соответственно переписутся как

$$gh(x_1, x_2) = g(x_1, h(x_1, x_2)), \quad e(x_1, x_2) = x_2.$$

Следующая теорема справедлива лишь для бинарных действий компактных групп.

ТЕОРЕМА 2. *Бинарное действие $\alpha: G \times X^2 \rightarrow X$ компактной группы G на топологическом пространстве X – замкнутое отображение.*

ПРИМЕР 1. Непрерывное отображение $\alpha: G \times G^2 \rightarrow G$, заданное формулой

$$\alpha(g, g_1, g_2) = g_1^{-1} g g_1 g_2,$$

является бинарным действием топологической группе G на себя.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – общая линейная группа n -го порядка. Определим непрерывное отображение

$$\alpha: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

формулой

$$\alpha(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (E - A)\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad (3)$$

или

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (E - A)\mathbf{x} + A\mathbf{y},$$

где $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, E – единичная матрица, а $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Формулой (3) определяется бинарное действие общей линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на n -мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть α – бинарное действие группы G на X . Для произвольного $g \in G$ зададим непрерывное отображение $\alpha_g: X^2 \rightarrow X$ формулой

$$\alpha_g(x_1, x_2) = \alpha(g, x_1, x_2).$$

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $g \rightarrow \alpha_g$ является непрерывным гомоморфизмом группы G в группу всех обратимых непрерывных бинарных операций $C_2^*(X)$.*

Пусть теперь (G, X, α) и (G, Y, β) – два бинарных G -пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ назовем *би-эквивариантным*, если выполняется равенство

$$f(\alpha(g, x_1, x_2)) = \beta(g, f(x_1), f(x_2))$$

или

$$f(g(x_1, x_2)) = g(f(x_1), f(x_2))$$

для всех $g \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Би-эквивариантное отображение $f: X \rightarrow Y$, являющееся также гомеоморфизмом, назовем *би-эквивалентностью* бинарных G -пространств.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Бинарные G -пространства и би-эквивариантные отображения составляют категорию.*

3. Индуцированные действия. Пусть (G, X, α) – бинарное G -пространство. Рассмотрим G -пространство $(G, X \times X, \tilde{\alpha})$, на котором группа G действует по формуле

$$\tilde{\alpha}(g, x_1, x_2) = (x_1, \alpha(g, x_1, x_2)).$$

Если обозначить $\tilde{\alpha}(g, x_1, x_2) = g \cdot (x_1, x_2)$, а $\alpha(g, x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$, то последняя формула переписывается в виде

$$g \cdot (x_1, x_2) = (x_1, g(x_1, x_2)).$$

Заметим, что если X и Y – бинарные G -пространства, то произвольное би-эквивариантное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает эквивариантное отображение $\tilde{f}: X \times X \rightarrow Y \times Y$ по формуле

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$$

для произвольных $x_1, x_2 \in X$.

Указанное выше соответствие является ковариантным функтором из категории Bi-G-TOP в категорию G-TOP.

Пусть теперь X – G -пространство. На X определим бинарное G -действие формулой

$$g(x_1, x_2) = g \cdot x_2 \quad (4)$$

для всех $g \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Заметим, что если X и Y – G -пространства, то произвольное эквивариантное отображение $f: X \rightarrow Y$ является би-эквивариантным относительно действия (4).

Указанное соответствие является естественным ковариантным функтором из категории G-TOP в категорию Bi-G-TOP.

Пусть теперь $a \in X$ – произвольный элемент бинарного G -пространства X . Определим непрерывное отображение $\alpha_a: G \times X \rightarrow X$ формулой

$$\alpha_a(g, x) = \alpha(g, a, x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение α_a является действием группы G на пространстве X .*

Итак, бинарное действие группы G на пространстве X индуцирует семейство $\{\alpha_a: a \in X\}$ “обычных” действий группы G на X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Любое би-эквивариантное отображение $f: X \rightarrow Y$ является эквивариантным относительно индуцированных действий α_a и $\beta_{f(a)}$ для произвольного $a \in X$, где β – бинарное действие группы G на Y .*

4. Теорема Титце–Глисона. Пусть $A \subset X$, а $g \in G$. Положим

$$gA = \{g(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A\}.$$

Аналогично, для $K \subset G$ полагаем

$$KA = \{g(a_1, a_2); g \in K, a_1, a_2 \in A\}.$$

Следующая теорема непосредственно следует из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G – компактная группа, а X – бинарное G -пространство. Если $A \subset X$ замкнутое множество, то GA замкнуто в X , а если A компактно, то GA тоже компактно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подмножество $A \subset X$ называется *инвариантным* относительно бинарного действия группы G , если $GA = A$.

Следующая теорема о продолжении би-эквивариантных отображений показывает важность и естественность бинарного действия (3) группы $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – компактная группа, X – нормальное бинарное G -пространство, а A – замкнутое инвариантное подпространство пространства X . Пусть далее $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ – представление группы G и $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ – би-эквивариантное отображение. Тогда существует би-эквивариантное продолжение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображения φ .

Заметим, что эта теорема является бинарным аналогом эквивариантной теоремы Титце–Глисона [3; теорема 2.3], а ее доказательство основано на применении нормированного интеграла Хаара и теории интегрирования на компактных группах [3], [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю.М. Мовсисян, *УМН*, **53:1** (1998), 61–114. [2] P.S. Gevorgyan, *International Topological conference “Alexandroff readings”* (Moscow, May 21–25, 2012), Abstracts, Moscow, 2012, 28–29. [3] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980. [4] R. S. Palais, *The Classification of G -Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.

П. С. Геворкян

Академия труда и социальных
отношений, г. Москва
Московский энергетический
институт (технический университет)
E-mail: pgev@yandex.ru

Поступило

17.01.2014

Исправленный вариант

14.05.2014