Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. К. Макина, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев, О методах исследования асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 627–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:30:05

О методах исследования асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений

Н. К. Макина, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев

1. Известно [1], [2], [3], что для решений уравнения

$$y'' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

где $q(x)$ – вещественная, положительная и такая, что $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$, справедливы ВКБ асимптотические формулы:

$$y_{1,2} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \exp\left\{\pm i \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt\right\},$$

где $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $q'(x)$, $q''(x)$ при достаточно большом x_0 не меняют знак в интервале $[x_0, +\infty)$;
- 2) $q'(x) = o(q^\alpha(x))$, $0 < \alpha < 3/2$.

При этом в [1], [2] использовался метод Левинсона замены уравнения (1) системой уравнений первого порядка и приведением ее к L -диагональному виду, а в [3] использовалась замена Лиувилля. Первый метод более громоздкий, зато в отличие от второго может быть применен к уравнениям порядка выше второго.

L -диагональные системы – это системы вида

$$u'(x) = \Lambda(x)u(x) + \Theta(x)u(x),$$

где $\Theta(x)$ – суммируемая на $[x_0, \infty)$ матрица. Заметим, что условия 1) и 2) довольно жесткие, но они обеспечивают суммируемость матрицы $\Theta(x)$.

Целью настоящей заметки является задача о существенном расширении класса потенциалов $q(x)$, к которым можно применить метод Левинсона.

2. Рассмотрим следующее уравнение:

$$-y'' - q(x)y - (q_1(x) - q(x))y = 0.$$

Обозначим $u(x) = q_1(x) - q(x)$. Здесь $q(x)$ – функция, удовлетворяющая условиям 1), 2) п. 1. Перейдем от данного уравнения к системе, введя в рассмотрение вектор-столбец $Y = (y, y')$:

$$Y' = A(x)Y, \quad (2)$$

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x), \quad A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $A_1(x)$, обозначая через I тождественную матрицу размера 2×2 :

$$\det(A_1 - \omega \cdot I) = 0, \quad \omega^2 + q(x) = 0, \quad \omega_{1,2}(x) = \pm i q^{1/2}(x)$$

Пусть матрица $T(x)$ приводит A_1 к диагональному виду:

$$T^{-1}(x)A_1(x)T(x) = \Lambda(x), \quad \Lambda(x) = \text{diag}\{\omega_1(x), -\omega_1(x)\}.$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00567-а); работа третьего автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках госзадания вузам РФ в сфере научной деятельности.

DOI: 10.4213/mzml10531

Известно, что элементы матрицы $T(x)$ определяются с точностью до умножения элементов каждого столбца на скалярную функцию, при этом эти функции могут быть выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$(T^{-1}(x)T'(x))_{ii} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $T(x)$ имеет вид

$$T(x) = \delta(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1(x) & -\omega_1(x) \end{pmatrix}, \quad \delta(x) = q^{-1/4}(x),$$

$$T^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\delta}} & \frac{\delta}{i} \\ \frac{1}{\bar{\delta}} & -\frac{\delta}{i} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(x)T'(x) =: C(x) = \frac{\delta'}{\bar{\delta}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем в системе (2) замену

$$Y = T \cdot U, \quad (3)$$

придем к системе

$$U' = \Lambda(x)U - C(x)U + T^{-1}(x)A_2(x)T(x). \quad (4)$$

Пусть теперь матрица $G(x)$ такова, что $G(x)\Lambda(x) - \Lambda(x)G(x) = -C(x)$,

$$G(x) = \frac{\delta'(x)\delta(x)}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем в (4) замену

$$U = (I + G(x))W; \quad (5)$$

тогда получим систему

$$W' = \Lambda W - (I + G)^{-1}CGW - (I + G)^{-1}G'W - (I + G)^{-1}T^{-1}A_2T(I + G)W. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение функции

$$a(x) = \frac{\delta'(x)\delta(x)}{2i}, \quad \Delta(x) = 1 + a^2(x), \quad p(x) = u(x) \cdot \delta^2(x). \quad (7)$$

Пусть для краткости

$$D := (I + G)^{-1}CG + (I + G)^{-1}G', \quad p(x) \cdot B := (I + G)^{-1}T^{-1}A_2T(I + G).$$

Несложно выписать элементы матриц D , B , с учетом обозначений (7):

$$D(x) = \frac{\delta'(x)}{2i\Delta(x)} \begin{pmatrix} 1 & a(x) \\ -a(x) & 1 \end{pmatrix} + \frac{a'(x)}{\Delta(x)} \begin{pmatrix} a(x) & -1 \\ 1 & a(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\delta'(x)/2i + a'(x)}{\Delta(x)} \begin{pmatrix} 1 + a(x) & a(x) - 1 \\ 1 - a(x) & 1 + a(x) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 - a^2(x) & (a(x) - 1)^2 \\ -(a(x) + 1)^2 & a^2(x) - 1 \end{pmatrix} \rightarrow I, \quad x \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Полагая в системе (6)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = e^{\int \omega_1(t) dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

получаем систему уравнений

$$z_1' = -(d_{11}(x) + p(x) \cdot b_{11}(x))z_1 - (d_{12}(x) + p(x) \cdot b_{12}(x))z_2,$$

$$z_2' = -2 \cdot \omega_1(x)z_2 - (d_{21}(x) + p(x) \cdot b_{21}(x))z_1 - (d_{22}(x) + p(x) \cdot b_{22}(x))z_2. \quad (11)$$

Предполагая, что система (11) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} z_1(x) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} z_2(x) &= 0,\end{aligned}$$

и поступая аналогично доказательству леммы 1 в [1; с. 288], перейдем от системы (11) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}z_1 &= 1 - \int_x^\infty [(d_{11}(t) + p(t) \cdot b_{11}(t))z_1(t) - (d_{12}(t) + p(t) \cdot b_{12}(t))z_2(t)] dt, \\ z_2 &= - \int_x^\infty \psi(x, t)[(d_{21}(t) + p(t) \cdot b_{21}(t))z_1(t) - (d_{22}(t) + p(t) \cdot b_{22}(t))z_2(t)] dt,\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ 2 \int_x^t \omega_1(s) ds \right\}.$$

Интегрируя по частям слагаемые в правых частях уравнений, содержащие функцию $p(x)$, после преобразований можем привести (12) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P(x) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &+ \int_x^\infty P(t) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} dt - \int_x^\infty \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} dt,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$P(x) = \int_x^\infty p(t) dt = \int_x^\infty \frac{q_1(t) - q(t)}{\sqrt{q(t)}} dt,$$

и

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= b'_{11} - b_{11}d_{11} - pb_{11}^2 - b_{12}(d_{21} + b_{21}p), \\ \alpha_{12} &= b'_{12} - b_{11}(d_{12} + pb_{12}) - b_{12}(2\omega_1 + d_{22} + b_{22}p), \\ \alpha_{21} &= (\psi b_{21})' - \psi b_{21}(d_{11} + pb_{11}) - \psi b_{22}(d_{21} + b_{21}p), \\ \alpha_{22} &= (\psi b_{22})' - \psi b_{21}(d_{12} + pb_{12}) - \psi b_{22}(2\omega_1 + d_{22} + b_{22}p).\end{aligned}$$

Потребуем выполнения условия

$$|P(x) \cdot \omega_1| \leq r(x), \quad x > x_0\tag{14}$$

где $r(x) \in L(0, \infty)$.

Перепишем систему (13) в операторной форме. Введем в рассмотрение M – множество всех непрерывных на $[x_0, \infty)$ функций с конечным пределом при $x \rightarrow +\infty$, а также множество $M \times M = \widetilde{M}$.

Введем на множестве M норму

$$\|\phi\| = \sup_{[x_0, \infty)} |\phi(x)|.$$

На множестве $\widetilde{M}$ также определим норму по правилу

$$\|x\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Тогда норма оператора $A[x]$ есть

$$\|A\| = \sup_{x \in \widetilde{M}} \frac{\|A[x]\|}{\|x\|}.$$

Заметим, что если A – оператор умножения на матрицу, то согласованная норма будет иметь вид

$$\|A\| = \max_{j=1,2} \{\|a_{1j}\| + \|a_{2j}\|\}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$K[z] = P(x) \cdot Bz + \int_x^\infty P(t) \Upsilon(t) z dt - \int_x^\infty D(t) z dt,$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (\Upsilon(t))_{ij} = \alpha_{ij}(t).$$

Можно показать, что при выполнении условий (1), (2) из п. 1 и условия (14) оператор K действует из множества $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$. Тогда система (13) примет вид

$$z = e_1 + K[z], \quad (I - K)[z] = e_1, \quad z = (I - K)^{-1}[e_1], \quad (15)$$

где e_1 – единичный двумерный вектор.

Если $\|K\| < 1$, то существует решение уравнения (15), причем такое, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z = e_1.$$

Покажем, что $\|K\| < 1$. Для этого вычислим действие оператора $K[z] =: f$. С учетом (8), (9)

$$\begin{aligned} |f_1| &\leq |P(x) \cdot (b_{11}z_1 + b_{12}z_2)| + \left| \int_x^\infty P(t)(\alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2) dt \right| + \left| \int_x^\infty (d_{11}z_1 + d_{12}z_2) dt \right| \\ &\leq |P(x)|(|b_{11}||z_1| + |b_{12}||z_2|) \\ &\quad + \int_x^\infty (|P(t)\alpha_{11}||z_1| + |P(t)\alpha_{12}||z_2|) dt + \int_x^\infty (|d_{11}||z_1| + |d_{12}||z_2|) dt \\ &\leq |P(x)|(|b_{11}|||z_1|| + |b_{12}|||z_2||) \\ &\quad + \int_x^\infty (|P(t)\alpha_{11}|||z_1|| + |P(t)\alpha_{12}|||z_2||) dt + \int_x^\infty (|d_{11}|||z_1|| + |d_{12}|||z_2||) dt \\ &\leq |P(x)|\|B\|\|z\| + \|z\| \int_x^\infty (|P(t)\alpha_{11}| + |P(t)\alpha_{12}|) dt + \|z\| \int_x^\infty (|d_{11}| + |d_{12}|) dt, \end{aligned}$$

и

$$\|f_1\| \leq \|z\| \left(|P(x)|\|B\| + \int_x^\infty (|P(t)\alpha_{11}| + |P(t)\alpha_{12}|) dt + \int_x^\infty (|d_{11}| + |d_{12}|) dt \right). \quad (16)$$

При выполнении условия (14) очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0.$$

Заметим, что функция $a(x) \in L(0, \infty)$ ($a(x) = \delta'(x)\delta(x)$, $\delta(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$); следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0.$$

Учитывая это, получим, что $\|B(x)\| =: B_0 = \text{const}$; тогда $\|P(x) \cdot B(x)\| < \varepsilon$ при $x > x_0$ для достаточно большого x_0 .

Учитывая (7) и то, что $\delta'(x) = -1/4q^{-5/4} \cdot q'(x)$ ($x \in L(0, \infty)$), при выполнении условий (1), (2) из п. 1 верно также

$$\int_{x_0}^\infty |\delta'(x)| dx < \infty,$$

и

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\delta'(x)\delta(x)}{2i} = \frac{1}{4i}(\delta^2(x))' = \frac{1}{4i}(q^{-1/2}(x))', \\ a'(x) &= \frac{1}{4i}(q^{-1/2}(x))'' = -\frac{1}{8i}(q^{-3/2}(x)q'(x))' = -\frac{1}{8i}\left(-\frac{3}{2}q^{-5/2}(x)q'^2(x) + q^{-3/2}(x)q''(x)\right) \\ &= -\frac{1}{8i}q^{-3/2}(x)\left(-\frac{3}{2}q^{-1}(x)q'^2(x) + q''(x)\right). \end{aligned}$$

В силу условий (1), (2) из п. 1

$$\int_{x_0}^{\infty} |d_{ij}(x)| dx < \infty.$$

Из условий (7) и (14) также следует

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} |\alpha_{11}(x)| &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} |\alpha_{21}(x)| &= 0, \\ \alpha_{12} &\sim \text{const} \cdot q^{1/2}(x), & \alpha_{22} &\sim \text{const} \cdot q^{1/2}(x), \end{aligned}$$

откуда

$$|P(x)\alpha_{12}(x)| \leq \text{const} \cdot r(x), \quad |P(x)\alpha_{22}(x)| \leq \text{const} \cdot r(x).$$

Учитывая последнюю оценку и (16), для $x > x_0$ при достаточно больших x_0 имеем

$$\begin{aligned} |P(x)| + \int_x^{\infty} (|P(t)\alpha_{11}| + |P(t)\alpha_{12}|) dt + \int_x^{\infty} (|d_{11}| + |d_{12}|) dt &< \varepsilon, \\ \|f_1\|_M &\leq \varepsilon \|z\|_{\widetilde{M}}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оценки

$$\|f_2\|_M \leq \varepsilon \|z\|_{\widetilde{M}}, \quad \|K[z]\| \leq \varepsilon \|z\|, \quad \|K\| \leq \varepsilon < 1.$$

Таким образом, мы показали, что система (15) имеет решение такое, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z = e_1.$$

Возвращаясь с помощью обратных замен (3), (5), (10), приходим к следующему:

$$\begin{aligned} Y &= TU = T(I + G)W = T(I + G)e^{\int \omega_1(x) dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ Y &= \delta(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i/\delta^2(x) & -i/\delta^2(x) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a(x) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) e^{\int \omega_1(x) dx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 + o(1)), \\ Y &= e^{i \int q^{1/2}(x) dx} \left(\begin{pmatrix} q^{-1/4} \\ iq^{1/4} \end{pmatrix} + a(x) \begin{pmatrix} q^{-1/4} \\ iq^{1/4} \end{pmatrix} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Таким образом, нами была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (1), (2) из п. 1, а так же условие (14). Тогда уравнение $-y'' - q(x)y - (q_1(x) - q(x))y = 0$ имеет ФСР $\{y_1(x), y_2(x)\}$ такую, что при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= q^{-1/4} e^{i \int q^{1/2}(x) dx} (1 + o(1)), \\ y_1'(x) &= iq^{1/4} e^{i \int q^{1/2}(x) dx} (1 + o(1)), \\ y_2(x) &= q^{-1/4} e^{-i \int q^{1/2}(x) dx} (1 + o(1)), \\ y_2'(x) &= -iq^{1/4} e^{-i \int q^{1/2}(x) dx} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

3. Примеры. Введем в рассмотрение функцию

$$P_1(x) = \int_x^\infty u(x) dx.$$

Пусть $P_1(x)$ удовлетворяет условию

$$|P_1(x)| = \left| \int_x^\infty u(x) dx \right| \leq r_1(x), \quad (17)$$

где $r_1(x)$ – монотонная положительная функция и $r_1(x) \in L(0, \infty)$. Аналогично [4] можно доказать оценку

$$|P(x)q^{1/2}| < r(x).$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия (17) условие (14) так же выполняется.

ПРИМЕР 1. Функция $u(x) = q_1(x) - q(x) = c(1+x)^\alpha \sin(1+x)^\beta$, $\beta > \alpha + 2$, $\alpha > 0$, а функция $q(x)$ удовлетворяет всем условиям (1), (2).

ПРИМЕР 2. Функция $u(x) = q_1(x) - q(x) = ce^{\alpha x} \sin e^{\beta x}$, $\beta > \alpha > 0$, а функция $q(x)$ удовлетворяет всем условиям (1), (2).

ПРИМЕР 3. Функция $q_1(x) = x^\alpha \sin^2 x^\beta$, $\beta > \alpha + 2$, $\alpha > 0$, а функция $q(x)$ удовлетворяет всем условиям (1), (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
 [2] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983. [3] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978.
 [4] Х. Х. Муртазин, Я. Т. Султанаев, *Матем. заметки*, **28**:4 (1980), 545–553. [5] Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 932–938. [6] Я. Т. Султанаев, *Докл. АН СССР*, **284**:3 (1985), 551–555. [7] Л. К. Кусаинова, А. Ж. Монашова, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **93**:4 (2013), 630–633.

Н. К. Макина

Евразийский национальный университет
 им. Л. Н. Гумилева, Казахстан
 E-mail: nasgul28@mail.ru

Поступило

20.04.2014

Э. А. Назирова

Башкирский государственный университет, г. Уфа
 E-mail: ellkid@gmail.com

Я. Т. Султанаев

Башкирский государственный педагогический
 университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
 E-mail: sultanaevyt@gmail.com