Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко, Неравенство для дробных интегралов комплексных полиномов в L_0 , *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 633–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:41:42

Неравенство для дробных интегралов комплексных полиномов в L_0

Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко

Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ – алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами. Функционалы $\|\cdot\|_p$ на единичной окружности $|z| = 1$ при $0 \leq p \leq \infty$, как обычно, определяются равенствами

$$\|P_n\|_\infty = \max |P_n(z)|, \quad \|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{1/p},$$
$$\|P_n\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|P_n\|_p = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\varphi})| d\varphi \right).$$

Следуя Малеру [1], квазинорму $\|P_n\|_0$ будем называть *мерой полинома* $P_n(z)$ и обозначать $M(P_n)$.

Усилиями многих математиков доказано неравенство, позволяющее оценивать нормы или квазинормы производных полиномов $P_n(z)$ через нормы или квазинормы самих $P_n(z)$:

$$\|P'_n\|_p \leq n \|P_n\|_p, \quad 0 \leq p \leq \infty \quad (1)$$

(с подробной информацией можно ознакомиться в статье Арестова [2]).

Задачу об оценке снизу $\|P'_n\|_p$ посредством $\|P_n\|_p$ можно сформулировать как аналог неравенства (1) для неопределенного интеграла

$$IP_n(z) = \int_0^z P_n(t) dt = z \sum_{k=0}^n c_k \frac{z^k}{k+1},$$

если $P_n(z)$ заменить на $P'_n(z)$.

В самом деле, $IP'_n(z) = P_n(z) - P_n(0)$, и тогда оценка $\|IP'_n\|_p$ сверху через $\|P'_n\|_p$ дает ответ на поставленную задачу:

$$\|IP'_n\|_p = \|P_n(z) - P_n(0)\|_p \leq A_{n,p} \|P'_n\|_p, \quad 0 \leq p \leq \infty. \quad (2)$$

Заменяя в (2) P'_n на P_n , получаем неравенство типа Бернштейна для неопределенного интеграла

$$\|IP_n\|_p \leq A_{n,p} \|P_n\|_p, \quad 0 \leq p \leq \infty, \quad (2')$$

которое часто называют *неравенством типа Фавара*.

За последние двадцать лет вырос интерес к дробному интегрированию, о чем свидетельствуют многочисленные публикации по этой тематике. В настоящей статье рассматриваются дробные интегралы порядка $0 < \alpha < 1$ и доказывается аналог неравенства (2') для мер полиномов.

Вполне логично для полинома P_n определить дробный интеграл порядка $0 < \alpha < 1$ равенством

$$I^\alpha P_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Такое определение встречается, например, в работах Флетт (см. [3], [4]) для аналитических функций $f(z)$ внутри единичного круга в связи с изучением потенциалов Бесселя и Рисса.

Справедлива

ТЕОРЕМА. Для любого полинома $P_n(z)$ имеет место неравенство

$$M(I^\alpha P_n) \leq A_{\alpha,n} M(P_n), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где

$$A_{\alpha,n} < \frac{A_\alpha}{n^\alpha} (1,4)^n, \quad A_\alpha < \frac{2\alpha+1}{\alpha\Gamma(\alpha)}. \quad (3)$$

Порядок роста коэффициента $A_{\alpha,n}$ является точным в том смысле, что он совпадает с порядком точного значения коэффициента в неравенстве для неопределенного интеграла, т.е. при $\alpha = 1$.

Для сравнения мер полиномов $I^\alpha P_n$ и P_n удобно воспользоваться одним результатом де Брюйна и Спрингера [5] (см. также Арестов [6]), справедливым для композиции полиномов по Сегё (см. [7; V, с. 75]). Напомним, что композицией полиномов

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k z^k \quad \text{и} \quad R_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k z^k$$

называют полином

$$Q_n \otimes R_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k d_k z^k,$$

и тогда

$$M(Q_n \otimes R_n) \leq M(Q_n) M(R_n). \quad (4)$$

Поэтому данный полином P_n запишем в виде $P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k z^k$ и, соответственно,

$$I^\alpha P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Следовательно, $I^\alpha P_n(z) = P_n \otimes I^\alpha(1+z)^n$. Согласно неравенству (4) доказательство теоремы сводится к вычислению меры полинома $I^\alpha(1+z)^n$:

$$A_{\alpha,n} = M(I^\alpha(1+z)^n). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения гамма-функции Эйлера $\Gamma(\alpha)$ следует равенство

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(k+1)x} dx, \quad \alpha > 0, \quad k > -1.$$

Тогда полином $I^\alpha(1+z)^n$ представим в интегральной форме

$$I^\alpha(1+z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{z^k}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (1+e^{-x}z)^n e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

Оценим его модуль на единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, разбивая при этом интеграл $\int_0^\infty$ на два: $I_1 = \int_0^{1/n}$ и $I_2 = \int_{1/n}^\infty$.

Так как

$$|1 + e^{-x} e^{-i\varphi}|^2 = 1 + 2e^{-x} \cos \varphi + e^{-2x} \leq 1 + e^{-x} (2 \cos \varphi + 1) \leq 2(1 + \cos \varphi),$$

то

$$|I_1| \leq \left(2 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^n \int_0^{1/n} x^{\alpha-1} dx \leq \frac{(2 \cos \varphi/2)^n}{n^\alpha},$$

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq \int_{1/n}^{\infty} |1 + e^{-x} e^{-i\varphi}|^n e^{-x} x^{\alpha-1} dx \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_0^{\infty} (1 + e^{-x} (2 \cos \varphi + 1))^{n/2} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{[1 + (2 \cos \varphi + 1)]^{n/2+1} - 1}{2 \cos \varphi + 1} \\
 &\leq \frac{2}{n^{\alpha}} \cdot \frac{1}{|2 \cos \varphi + 1|} \cdot \begin{cases} \left(2 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^{n+2}, & \varphi \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ 1, & \varphi \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |I_1 + I_2| &\leq \frac{(2 \cos \varphi/2)^n}{\alpha n^{\alpha}} + \frac{2}{n^{\alpha}} \cdot \begin{cases} \frac{(2 \cos \varphi/2)^{n+2}}{(2 \cos \varphi + 1)} \\ \frac{1}{|2 \cos \varphi + 1|} \end{cases} \\
 &\leq \frac{2\alpha + 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot \begin{cases} \frac{(2 \cos \varphi/2)^{n+2}}{(2 \cos \varphi + 1)}, & \varphi \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ \frac{1}{|2 \cos \varphi + 1|}, & \varphi \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

(при $\varphi \in (0, 2\pi/3)$ использовалось неравенство $2 \cos \varphi + 1 \leq (2 \cos \varphi/2)^2$, а при $\varphi \in (2\pi/3, \pi)$ учитывалось, что $(2 \cos \varphi/2)^n < 1$).

Теперь по определению меры (см. (5))

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha, n} &\leq \frac{2\alpha + 1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \ln \frac{(2 \cos(\varphi/2))^{n+2}}{2 \cos \varphi + 1} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \ln |2 \cos \varphi + 1| d\varphi \right) \\
 &= \frac{2\alpha + 1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot \exp \left(\frac{n+2}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |2 \cos \varphi + 1| d\varphi \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл выразим посредством функции Лобачевского $L(x) = -\int_0^x \ln \cos x dx$ и воспользуемся ее табличным значением (см. [8]):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{\pi} L\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.323. \quad (7)$$

Второй интеграл равен нулю:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |2 \cos \varphi + 1| d\varphi = 2 \ln 2 + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \cos t dt = 0. \quad (8)$$

Из (6)–(8) следует (3).

Теперь относительно порядка роста коэффициента $A_{\alpha, n}$. В статье [9] в связи с одной задачей Малера находится

$$M(I(1+z)^n) = \frac{1}{n} \Pi_{n/6 \leq k \leq 5n/6} 2 \sin \frac{\pi k}{n},$$

что по порядку составляет

$$\frac{(1, 4)^n}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **264** (1961), 145–154. [2] В. В. Арестов, *Матем. заметки*, **48**:4 (1990), 7–18. [3] Т. М. Flett, *Pacif. J. Math.*, **25**:3 (1968), 463–494. [4] Т. М. Flett, “Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz Spaces”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **22**:3 (1971), 385–451. [5] N. G. de Bruijn, T. A. Springer, *Indag. Math.*, **9** (1947), 406–414. [6] В. В. Арестов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 3–22. [7] Г. Поля, Г. Сёге, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Наука, М., 1978. [8] И. С. Грандштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм и произведений*, ГИТТЛ, М., 1964. [9] Э. А. Стороженко, *Матем. сб.*, **187**:5 (1996), 111–120.

Э. А. Стороженко

Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова, Украина

Поступило

21.01.2014

Л. Г. Коваленко

Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова, Украина

E-mail: baier@ukr.net