Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Чернавская, Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 590–605

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:53:00

Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов

Е. А. Чернавская

Рассматривается бесканально-канальная система массового обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком. В предположении, что у времени обслуживания нет математического ожидания, доказываются предельные теоремы для числа занятых приборов. В качестве следствий получены предельные теоремы для систем, в которых интенсивность входящего потока является регенерирующим процессом.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10533

1. Введение

Системам обслуживания с бесконечным числом приборов посвящена обширная литература. Поскольку нет возможности упомянуть всех авторов, отметим только работы, наиболее близкие к изучаемой в статье проблеме. Прежде всего, заметим, что в литературе рассматриваются различные модели бесканально-канальных систем; например, системы с ограничениями [1], [2], системы в случайной среде [3], сети бесканально-канальных систем [4] и другие. Это обусловлено как широким кругом практических вопросов, в которых эти модели оказываются полезными, так и целым рядом возникающих здесь интересных математических задач.

На первый взгляд, бесканально-канальные системы кажутся нереалистичными, но на самом деле они могут быть использованы при описании многих реальных объектов. Например, в теории связи при изучении суммарного потока импульсов [5], а также при описании процессов образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог [6], в некоторых задачах страхования (см. [7] о связи рискованной модели Крамера–Лундберга и системы $G/G/\infty$).

Кроме этого, данные модели могут служить приближением систем с большим, но конечным числом приборов. Отметим, что подходы, используемые для изучения таких систем, оказываются полезными для задач массового обслуживания в случае высокой загрузки [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00653 А).

В данной статье предполагается, что процесс поступления требований является дважды стохастическим пуассоновским потоком. Этот поток заслуживает внимания, так как он является обобщением многих потоков, например, марковски-модулированного потока [9], полумарковского модулированного потока, потока Льюиса и т.д., часто используемых в теории очередей в качестве входных потоков.

Если среднее время обслуживания приборов конечно, то бесконечноканальная система эргодична [8]. Мы предполагаем, что среднего времени обслуживания требований не существует. Одна из первых работ, в которых изучались подобные системы, – статья Каплана [10], где доказаны предельные теоремы для числа требований в системе $GI/G/\infty$. Мы использовали подход из [10] при доказательстве предельных теорем данной статьи.

Основная цель работы – асимптотический анализ процесса, определяющего число занятых приборов, с ростом времени. Выписана производящая функция одномерных распределений этого процесса и доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. В качестве следствий получены предельные теоремы для систем, которые являются частными случаями исходной. Например, система с регенерирующим дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком, а также система с полумарковским модулированным входящим потоком.

2. Описание системы

Рассматривается бесконечноканальная система обслуживания. Заявки, поступающие на вход системы, образуют дважды стохастический пуассоновский поток (ДСПП) $A(t)$, который определяется с помощью случайной замены времени [11]

$$A(t) = A^*(\Lambda(t)),$$

где $\{A^*(t), t \geq 0\}$ – стандартный пуассоновский процесс, а $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ – стохастический процесс, не зависящий от $A^*(t)$, который имеет неубывающие непрерывные справа траектории и принимает значения в $\mathbb{R}$, $\Lambda(0) = 0$.

Будем считать, что для рассматриваемой системы выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. *Ведущая функция $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y, \omega) dy$, где $\lambda(y)$ – неотрицательный ограниченный с вероятностью 1 стационарный в широком смысле случайный процесс такой, что*

$$|r(x)| = |\text{cov}(\lambda(0), \lambda(x))| \leq \begin{cases} c_0 & \text{для } 0 < x < 1, \\ c_0 x^{-\alpha} & \text{для } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь α, c_0 – некоторые положительные постоянные.

Обозначим $E\lambda(t) = \lambda$. Процесс $\Lambda(t)$ называется *ведущим процессом*, а $\lambda(t)$ – *интенсивностью* дважды стохастического пуассоновского процесса $\{A(t), t \geq 0\}$.

Времена обслуживания заявок представляют собой последовательность $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) с функцией распределения $B(x)$. Обозначим $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$.

УСЛОВИЕ 2. Существуют положительные постоянные c_1, c_2, t_0 и $0 < \Delta < 1$ такие, что

$$c_1 t^{-\Delta} \leq \bar{B}(t) \leq c_2 t^{-\Delta} \quad (2.2)$$

при всех $t \geq t_0$.

Из (2.2) следует, что $\int_0^\infty x dB(x) = \infty$.

Основное внимание в данной работе направлено на изучение процесса $q(t)$, который представляет собой число заявок, находящихся в системе в момент времени t .

3. Вспомогательные результаты

Пользуясь свойствами ДСПИ [11], можно получить формулу для распределения вероятностей $q(t)$ при любом фиксированном t

$$P(q(t) = k) = EP(q(t) = k | \Lambda(t), t \in [0, \infty)) = E\left(e^{-\rho(t)} \frac{(\rho(t))^k}{k!}\right), \quad (3.1)$$

где $\rho(t) = \int_0^t \bar{B}(t-x)\lambda(x) dx$.

Из формулы (3.1) следует, что производящая функция для $q(t)$ имеет вид

$$P(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(q(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k E\left(e^{-\rho(t)} \frac{(\rho(t))^k}{k!}\right) = Ee^{-\rho(t)(1-u)}. \quad (3.2)$$

Из этого соотношения и свойств ДСПИ [11] следует, что

$$\begin{aligned} Eq(t) &= EE(q(t) | \Lambda(t), t \in [0, \infty)) = E\rho(t) = \lambda \int_0^t \bar{B}(y) dy, \\ Eq^2(t) &= EE(q^2(t) | \Lambda(t), t \in [0, \infty)) = E\rho(t) + E\rho^2(t). \end{aligned}$$

Условия 1 и 2 дают возможность найти оценки для $E\rho(t)$ и $D\rho(t)$. Очевидно, что оценка для $E\rho(t)$ имеет вид

$$\frac{\lambda c_1}{1-\Delta} t^{1-\Delta} \leq E\rho(t) \leq \frac{\lambda c_2}{1-\Delta} t^{1-\Delta}. \quad (3.3)$$

Найдем оценку для $D\rho(t)$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для всех $0 < \gamma < 1$, $\delta > 0$ найдется положительная константа C такая, что при достаточно больших t выполнено следующее неравенство:

$$\frac{D\rho(t)}{C} \leq t^{\gamma+\delta} + t^{1+\gamma-\alpha} \ln t + t^{-\delta(\alpha-1)+\gamma} \ln t + t^{-\delta(\alpha-1)+1-2\Delta} \ln t. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве мажорирующей функции для $|r(x)|$ возьмем

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} c_0 & \text{для } 0 < x < t_1^{-\delta}, \\ c_0 x^{-\alpha} & \text{для } x \geq t_1^{-\delta}, \end{cases}$$

где δ – любое фиксированное положительное число, $t_1 > 1$. Здесь c_0 определено условием 1. Таким образом, $|r(x)| \leq \tilde{r}(x)$ для любого $x \geq 0$.

Для функции $\bar{B}(x)$ также будет использована оценка, облегчающая выкладки. Положим

$$\widetilde{\bar{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 < x < t_2^\gamma, \\ c_2 x^{-\Delta} & \text{для } x \geq t_2^\gamma. \end{cases}$$

Здесь γ – любое фиксированное положительное число в интервале $(0, 1)$, а t_2 такое, что $t_2^\gamma > t_0$, где t_0 определяется условием 2. Это неравенство будет выполнено при любом $t_2 > t_0^{1/\gamma}$. Тогда $\bar{B}(x) \leq \widetilde{\bar{B}}(x)$ для любого $x > 0$.

Выберем t_3 такое, что оценки для $|r(x)|$ и $\bar{B}(x)$ одновременно будут иметь место при $t \geq t_3$. По определению

$$\begin{aligned} D\rho(t) &= \int_0^t du \int_0^t \bar{B}(t-u) \bar{B}(t-v) \text{cov}(\lambda(u), \lambda(v)) dv \\ &= 2 \int_0^t dz \int_0^{t-z} \bar{B}(u+z) \bar{B}(z) \text{cov}(\lambda(0), \lambda(u)) du \leq 2 \int_0^t dz \int_0^{t-z} \bar{B}^2(z) |r(u)| du. \end{aligned}$$

Для оценки полученного интеграла введем разбиение области его интегрирования на четыре части так, чтобы на каждой из них воспользоваться введенными выше оценками для функций $|r(x)|$ и $\bar{B}(x)$. В очевидных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} D\rho(t) &\leq 2 \left(\int_0^{t^\gamma} dz \int_0^{t-\delta} du + \int_0^{t^\gamma} dz \int_{t-\delta}^{t-z} du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t-\delta} dz \int_{t^\gamma}^{t-u} du + \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} dz \int_{t-\delta}^{t-z} du \right) \bar{B}^2(z) |r(u)| \\ &= 2(\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}). \end{aligned}$$

Далее, используя мажорирующие функции для $|r(x)|$ и $\bar{B}(x)$ на соответствующих интервалах, находим оценки при $t \rightarrow \infty$ для каждого из этих слагаемых. Сначала получим оценку для четвертого интеграла. С учетом оценок для $|r|$ и $\bar{B}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{IV} &= \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} dz \int_{t-\delta}^{t-z} \bar{B}^2(z) r(u) du \leq \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} dz \int_{t-\delta}^{t-z} \widetilde{\bar{B}}^2(z) \widetilde{r}(u) du \\ &\leq c_0 c_1 \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} dz \int_{t-\delta}^{t-z} z^{-2\Delta} u^{-\alpha} du. \end{aligned}$$

1. Если $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned} \text{IV} &\leq c_0 c_2 \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} dz \int_{t-\delta}^{t-z} z^{-2\Delta} u^{-1} du \\ &= c_0 c_2 \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} z^{-2\Delta} \ln(t-z) dz + c_0 c_2 \delta \ln t \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} z^{-2\Delta} dz. \end{aligned}$$

• Если $\Delta = 1/2$, то существует константа c_3 такая, что

$$\text{IV} \leq c_0 c_2 \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} z^{-1} \ln(t-z) dz + c_0 c_2 \delta \ln t \int_{t^\gamma}^{t-t^\delta} z^{-1} dz \leq c_3 (\ln t)^2.$$

- Если $\Delta \neq 1/2$, то

$$\begin{aligned}
 \text{IV} &\leq c_0 c_2 \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} \ln(t-z) dz + c_0 c_2 \delta \ln t \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz \\
 &\leq c_0 c_2 \ln(t-t^\gamma) \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz + c_0 c_2 \ln t \delta \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz \\
 &\leq (\delta+1) c_0 c_2 \ln t \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz = \frac{\delta+1}{1-2\Delta} c_0 c_2 ((t-t^{-\delta})^{1-2\Delta} - t^{\gamma(1-2\Delta)}) \ln t.
 \end{aligned}$$

Используя последнее неравенство для некоторых постоянных c'_4 , c''_4 и c'''_4 , при достаточно больших t и объединяя со случаем $\Delta = 1/2$, получаем, что при $\alpha = 1$

$$\text{IV} \leq \begin{cases} c'_4 t^{\gamma(1-2\Delta)} \ln t & \text{для } \Delta > \frac{1}{2}, \\ c''_4 (\ln t)^2 & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ c'''_4 t^{1-2\Delta} \ln t & \text{для } \Delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- 2. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\begin{aligned}
 \text{IV} &\leq c_0 c_1 \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} dz \int_{t^{-\delta}}^{t-z} z^{-2\Delta} u^{-\alpha} du \\
 &= \frac{c_0 c_2}{|1-\alpha|} \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} (t-z)^{1-\alpha} z^{-2\Delta} dz + \frac{c_0 c_2}{|1-\alpha|} t^{-\delta(1-\alpha)} \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz \\
 &= \frac{c_0 c_2}{|1-\alpha|} \text{IV}_1 + \frac{c_0 c_2}{|1-\alpha|} \text{IV}_2.
 \end{aligned}$$

Сначала оценим второе слагаемое. Рассмотрим два случая.

- Если $\Delta = 1/2$, то

$$\text{IV}_2 = t^{-\delta(1-\alpha)} \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-1} dz \leq (1+\gamma) t^{-\delta(1-\alpha)} \ln(t).$$

- Если $\Delta \neq 1/2$, то

$$\text{IV}_2 = \frac{1}{1-2\Delta} t^{-\delta(1-\alpha)} \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} z^{-2\Delta} dz = \frac{1}{1-2\Delta} t^{-\delta(1-\alpha)} ((t-t^{-\delta})^{1-2\Delta} - t^{\gamma(1-2\Delta)}).$$

Объединяя эти оценки, имеем

$$\text{IV}_2 \leq \begin{cases} \frac{2}{1-2\Delta} t^{-\delta(1-\alpha)+\gamma(1-2\Delta)} & \text{для } \Delta > \frac{1}{2}, \\ (1+\gamma) t^{-\delta(1-\alpha)} \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{1-2\Delta} t^{-\delta(1-\alpha)+1-2\Delta} & \text{для } \Delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое слагаемое после замены $z = t^\gamma + v(t - t^\gamma - t^{-\delta})$ принимает вид

$$IV_1 = \int_{t^\gamma}^{t-t^{-\delta}} (t-z)^{1-\alpha} z^{-2\Delta} dz = (t-t^{-\delta}-t^\gamma)^{2-2\Delta-\alpha} K,$$

где

$$K = \int_0^1 \left(\frac{t-t^\gamma}{t-t^\gamma-t^{-\delta}} - v \right)^{1-\alpha} \left(v + \frac{t^\gamma}{t-t^\gamma-t^{-\delta}} \right)^{-2\Delta} dv.$$

Из теоремы об асимптотике для интегралов со слабой особенностью [12] следует, что существует постоянная c_5 такая, что

$$K \leq \begin{cases} c_5 \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ c_5 t^{(1-2\Delta)(1-\gamma)} & \text{для } \Delta \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда оценка для IV_1 имеет вид

$$IV_1 \leq \begin{cases} c_5 t^{1-\alpha} \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ c_5 t^{2-2\Delta-\alpha+(2\Delta-1)(1-\gamma)} & \text{для } \Delta \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Объединяя оценки для IV_1 и IV_2 , получим оценку IV .

- Если $\alpha = 1$, то для некоторой постоянной c'_5 имеем

$$IV \leq \begin{cases} c'_5 (\ln t)^2 & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ c'_5 t^{1-2\Delta} \ln t & \text{для } \Delta < \frac{1}{2}, \\ c'_5 t^{\gamma(1-2\Delta)} \ln t & \text{для } \Delta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Если $\alpha \neq 1$, то для некоторой постоянной c''_5 имеем

$$IV \leq \begin{cases} c''_5 t^{-\delta(1-\alpha)} \ln t + c''_5 t^{1-\alpha} \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ c''_5 t^{-\delta(1-\alpha)+1-2\Delta} + c''_5 t^{1-\alpha+\gamma(1-2\Delta)} & \text{для } \Delta < \frac{1}{2}, \\ c''_5 t^{-\delta(1-\alpha)+\gamma(1-2\Delta)} + c''_5 t^{1-\alpha+\gamma(1-2\Delta)} & \text{для } \Delta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Оценки для остальных трех интегралов приводим без доказательства, так как они получаются аналогичным образом из оценок для $|r(x)|$ и $\bar{B}(x)$ в соответствующих

областях интегрирования. Итак, при $t > t_1$ и некоторой постоянной c имеем

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq ct^{\gamma-\delta}, \\ \text{II} &\leq \begin{cases} ct^\gamma \ln t & \text{для } \alpha = 1, \\ ct^{\gamma+\delta} & \text{для } \alpha = 2, \\ ct^{1+\gamma-\alpha} + ct^{-\delta(\alpha-1)+\gamma} & \text{для } \alpha \neq 1, \alpha \neq 2, \end{cases} \\ \text{III} &\leq \begin{cases} ct^{-\delta} \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ ct^{1-2\Delta-\delta} + ct^{\gamma(1-2\Delta)-\delta} & \text{для } \Delta \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Все полученные неравенства можно объединить. Таким образом, при всех достаточно больших t найдется общая постоянная C такая, что

$$\frac{D\rho(t)}{C} \leq \begin{cases} t^{\gamma-\delta} + t^{1+\gamma-\alpha} + t^{-\delta(\alpha-1)+\gamma} + t^{-\delta} \ln t + t^{\delta(\alpha-1)} \ln t + t^{1-\alpha} \ln t & \text{для } \Delta = \frac{1}{2}, \\ t^{\gamma-\delta} + t^{1+\gamma-\alpha} + t^{-\delta(\alpha-1)+\gamma} + t^{1-2\Delta-\delta} + t^{\gamma(1-2\Delta)-\delta} + t^{\delta(\alpha-1)+1-2\Delta} + t^{1-\alpha+\gamma(1-2\Delta)} & \text{для } \Delta < \frac{1}{2}, \\ t^{\gamma-\delta} + t^{1+\gamma-\alpha} + t^{-\delta(\alpha-1)+\gamma} + t^{1-2\Delta-\delta} + t^{\gamma(1-2\Delta)-\delta} + t^{-\delta(\alpha-1)+(1-2\Delta)} + t^{1-\alpha+\gamma(1-2\Delta)} & \text{для } \Delta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Это неравенство несложно упростить и привести к виду (3.4).

4. Основные теоремы и их доказательства

Обозначим $\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x) dx$; тогда $E\rho(t) = \lambda\beta(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия 1, 2 и $|\Delta - 1/2| < \alpha - 1/2$, то имеет место слабая сходимость величины

$$q^*(t) = \frac{q(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$$

к нормально распределенной случайной величине с параметрами $(0, 1)$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (3.2) характеристическая функция для $q^*(t)$ имеет вид

$$\varphi_{q^*(t)}(z, t) = Ee^{izq^*(t)} = E \exp \left\{ -\rho(t) \left(1 - \exp \left(\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \right) \right) - iz\sqrt{\lambda\beta(t)} \right\}.$$

Обозначим

$$\Phi_\rho(t, z) = E(\exp\{izq^*(t)\} | \rho(t), t \geq 0) = \exp \left\{ -\rho(t) \left(1 - \exp \left(\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \right) \right) - iz\sqrt{\lambda\beta(t)} \right\}.$$

Заметим, что $|\Phi_\rho(t, z)| \leq 1$ с вероятностью 1, поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости достаточно показать, что

$$\ln \Phi_\rho(t, z) \xrightarrow{P} -\frac{z^2}{2}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

при фиксированном z .

Рассмотрим следующее представление для $\ln \Phi_\rho(t, z)$:

$$\ln \Phi_\rho(t, z) = iz \left(\frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)} \right) - \frac{z^2}{2} \frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} + R(t), \quad (4.2)$$

где

$$R(t) = \rho(t) \left(\exp \left(\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \right) - 1 - \frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} + \frac{z^2}{2\lambda\beta(t)} \right).$$

Из (4.2) следует, что для доказательства теоремы достаточно установить следующие соотношения:

$$\frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)} \xrightarrow{p} 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} \xrightarrow{p} 1, \quad (4.4)$$

$$|R(t)| \xrightarrow{p} 0 \quad (4.5)$$

при фиксированном z и $t \rightarrow \infty$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Так как $E\rho(t) = \lambda\beta(t)$, из неравенства Чебышева имеем

$$P \left(\left| \frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)} \right| > \varepsilon_1 \right) \leq \frac{E(\rho(t) - \lambda\beta(t))^2}{\varepsilon_1^2 \lambda\beta(t)} = \frac{D\rho(t)}{\varepsilon_1^2 \lambda\beta(t)}. \quad (4.6)$$

Как следует из (3.3) и (3.4), соотношение (4.3) будет выполнено при таких α и Δ , которые удовлетворяют следующей системе неравенств при некоторых $\delta > 0$ и $0 < \gamma < 1$:

$$\begin{cases} \gamma - \delta + \Delta - 1 < 0, \\ \gamma - \alpha + \Delta < 0, \\ \delta(\alpha - 1) + \gamma - 1 + \Delta < 0, \\ \delta(\alpha - 1) - \Delta < 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Эта система имеет решение при $|\Delta - 1/2| < \alpha - 1/2$.

Сходимость (4.4) следует из (4.6), так как для любого $\varepsilon_2 > 0$

$$P \left(\left| \frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1 \right| \geq \varepsilon_2 \right) \leq \frac{D\rho(t)}{\varepsilon_2^2 \lambda\beta(t)^2(t)} \leq \frac{D\rho(t)}{\varepsilon_2^2 \lambda\beta(t)}.$$

Соотношение (4.5) следует из (4.6) и неравенства $|e^{ix} - 1 - ix + x^2/2| \leq x^3/6$, верного при всех $x \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия 1, 2 и $\alpha > 2\Delta - 1$, то $q^*(t) = q(t)/(\lambda\beta(t))$ сходится по вероятности к 1 при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем характеристическую функцию для $q^*(t) - 1$

$$\varphi_{q^*(t)}(z, t) = E \exp \left\{ -\rho(t) \left(1 - \exp \left(\frac{iz}{\lambda\beta(t)} \right) \right) - iz \right\}.$$

Обозначим

$$G_\rho(z, t) = \exp \left\{ -\rho(t) \left(1 - \exp \left(\frac{iz}{\lambda\beta(t)} \right) \right) - iz \right\}.$$

Согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости достаточно установить, что

$$\ln G_\rho(z, t) \xrightarrow{p} 0 \quad (4.8)$$

при фиксированном z и $t \rightarrow \infty$, так как $|G_\rho(z, t)| \leq 1$ с вероятностью 1.

Представим $\ln G_\rho(z, t)$ в следующем виде:

$$\ln G_\rho(z, t) = iz \left(\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1 \right) + R(t),$$

где

$$R(t) = \rho(t) \left(\exp \left(\frac{iz}{\lambda\beta(t)} \right) - 1 - \frac{iz}{\lambda\beta(t)} \right).$$

Для доказательства (4.8) достаточно, чтобы при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1 \xrightarrow{p} 0, \quad (4.9)$$

$$R(t) \xrightarrow{p} 0. \quad (4.10)$$

Поскольку

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1 \right| > \varepsilon_1 \right) \leq \frac{\mathbb{E}(\rho(t) - \lambda\beta(t))^2}{\varepsilon_1^2 (\lambda\beta(t))^2} = \frac{D\rho(t)}{\varepsilon_1^2 (\lambda\beta(t))^2},$$

то сходимость (4.9) имеет место, если α и Δ удовлетворяют для некоторых $0 < \gamma < 1$ и $\delta > 0$ системе неравенств

$$\begin{cases} \gamma - \delta - 2(1 - \Delta) < 0, \\ 1 + \gamma - \alpha - 2(1 - \Delta) < 0, \\ \delta(\alpha - 1) + \gamma - 2(1 - \Delta) < 0, \\ \delta(\alpha - 1) - 1 < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Эта система имеет решения при $\alpha > 2\Delta - 1$. Соотношение (4.10) следует из (4.9) и неравенства $|e^{ix} - 1 - ix| \leq x^2/2$, $x \geq 0$.

Из теорем 1 и 2 очевидным образом вытекают утверждения следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\overline{B}(t) \sim ct^{-\Delta}$ и $a_1 = c\lambda(1 - \Delta)^{-1}$.

• Если выполнены условия 1, 2 и $|\Delta - 1/2| < \alpha - 1/2$, то имеет место слабая сходимость при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{q(t) - a_1 t^{1-\Delta}}{\sqrt{a_1 t^{1-\Delta}}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1).$$

• Если выполнены условия 1, 2 и $\alpha > 2\Delta - 1$, то

$$\frac{q(t)}{a_1 t^{1-\Delta}} \xrightarrow{p} 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В качестве примера рассмотрим следующую систему.

ПРИМЕР 1. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$ – две независимые последовательности одинаково распределенных внутри каждой последовательности независимых случайных величин и $F(t) = P(\tau_1 < t)$, $E\tau_1 = \mu < \infty$, $E\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma_\xi^2 < \infty$.

Случайные величины ξ_0 и τ_0 независимы и не зависят от последовательностей $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$, причем

$$P(\tau_0 < t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}(y) dy.$$

Введем случайное блуждание $S_n = \sum_{j=0}^n \tau_j$ и считающий процесс

$$N(t) = \min\{k \geq 0 : S_k > t\}, \quad n \geq 0.$$

Заметим, что в данном случае процесс $N(t)$ имеет стационарные приращения [13], т.е. по распределению при $u > 0$

$$N(t+u) - N(t) \stackrel{d}{=} N(u) - N(0) \stackrel{d}{=} N(u). \quad (4.12)$$

Зададим интенсивность входящего ДСПП следующим соотношением:

$$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}(N(t) = j),$$

где $\mathbb{I}_A$ – индикаторная функция события A .

Заметим, что $\lambda(t)$ является стационарным процессом и $E\lambda(t) = a$. Для определения условий, при которых будут выполнены предельные теоремы 1 и 2, найдем оценку для $\text{cov}(\lambda(t), \lambda(t+u))$. Учитывая (4.12), имеем при $u \geq 0$

$$\begin{aligned} E\lambda(t)\lambda(t+u) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} E\xi_j \xi_k \mathbb{I}(N(t) = j, N(t+u) = k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} E\xi_j \xi_k \mathbb{I}(N(t) = j, N(t+u) = k) + \sum_{j=0}^{\infty} E\xi_j^2 \mathbb{I}(N(t) = j, N(t+u) = j) \\ &= a^2 P(N(t+u) - N(t) > 0) + (\sigma_\xi^2 + a^2) P(N(t+u) - N(t) = 0) \\ &= a^2 (1 - P(\tau_0 > u)) + (\sigma_\xi^2 + a^2) P(\tau_0 > u). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{cov}(\lambda(t), \lambda(t+u)) = \frac{\sigma_\xi^2}{\mu} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy.$$

Используя это равенство, получаем, что если $\bar{F}(y) \sim cy^{-\beta}$ и $c > 0$, то теорема 1 будет выполнена при $|\Delta - 1/2| < \beta - 3/2$ и $0 < \Delta < 1$, а теорема 2 будет выполнена при $\beta > 2\Delta$ и $0 < \Delta < 1$.

Заметим, что в рассмотренной системе процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим, точки регенерации – моменты скачков процесса $N(t)$. Мы рассмотрели систему, в которой случайные величины $\{\xi_j\}_{j=0}^\infty$ и $\{\tau_j\}_{j=0}^\infty$, на которых строится процесс $\lambda(t)$, являются независимыми. Случай, когда эти величины могут быть зависимыми, будет рассмотрен в следующем разделе.

5. Следствия и приложения

5.1. Регенерирующий входящий поток. Дважды стохастический пуассоновский поток $A(t)$ будем называть *регенерирующим*, если его случайная интенсивность $\lambda(t)$ является регенерирующим случайным процессом [14]. Определение, свойства и ряд примеров таких процессов, можно найти в статье [15].

Обозначим θ_j момент j -й регенерации процесса $\lambda(t)$, $j = 0, 1, \dots$, и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\theta_{-1} = 0$. Последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(t) = P(\tau_1 \leq t)$, $E\tau_1 = \mu < \infty$. Поскольку мы рассматриваем стационарный регенерирующий процесс, то распределение τ_0 не зависит от последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ и

$$F_0(t) = P(\tau_0 < t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}(y) dy.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\lambda(t)$ – стационарный регенерирующий процесс и $\sup_t \lambda(t, \omega) \leq \lambda_M < \infty$ с вероятностью 1, то

$$|r(t)| = |\text{cov}(\lambda(0), \lambda(t))| \leq 4\lambda_M^2 P(\tau_0 > t) = 4\lambda_M^2 \bar{F}_0(t) \quad \text{при } t \geq 0. \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению при $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} r(t) &= \text{cov}(\lambda(0), \lambda(t)) = E\lambda(0)\lambda(t) - E\lambda(0)E\lambda(t) \\ &= E(\lambda(0)\lambda(t)(\mathbb{I}_{\tau_0 > t} + \mathbb{I}_{\tau_0 \leq t})) - E(\lambda(0)(\mathbb{I}_{\tau_0 > t} + \mathbb{I}_{\tau_0 \leq t}))E(\lambda(t)(\mathbb{I}_{\tau_0 > t} + \mathbb{I}_{\tau_0 \leq t})). \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку $\lambda(t)$ – регенерирующий процесс, то $\lambda(0)$ и $\lambda(t)$ условно независимы при условии $\{\tau_0 \leq t\}$. Поэтому

$$E(\lambda(0)\lambda(t) | \tau_0 \leq t) = E(\lambda(0) | \tau_0 \leq t)E(\lambda(t) | \tau_0 \leq t).$$

Используя последнее равенство, находим

$$\begin{aligned} r(t) &= E(\lambda(0)\lambda(t) | \tau_0 > t)P(\tau_0 > t) \\ &\quad + E(\lambda(0) | \tau_0 \leq t)E(\lambda(t) | \tau_0 \leq t)P(\tau_0 \leq t)P(\tau_0 > t) \\ &\quad - E(\lambda(0) | \tau_0 > t)E(\lambda(t))P(\tau_0 > t) \\ &\quad - E(\lambda(0) | \tau_0 \leq t)E(\lambda(t) | \tau_0 > t)P(\tau_0 \leq t)P(\tau_0 > t) \\ &= P(\tau_0 > t)(E(\lambda(0)\lambda(t) | \tau_0 > t) + E(\lambda(0) | \tau_0 \leq t)E(\lambda(t) | \tau_0 \leq t)P(\tau_0 \leq t) \\ &\quad - E(\lambda(0) | \tau_0 > t)E(\lambda(t)) - E(\lambda(0) | \tau_0 \leq t)E(\lambda(t) | \tau_0 > t)P(\tau_0 \leq t)). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda(t) \leq \lambda_M$ с вероятностью 1, то из последнего неравенства очевидным образом следует (1.1).

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 3, если $\bar{F}(t) \leq ct^{-d}$, $d > 1$, то

- теорема 1 верна при $|\Delta - 1/2| < d - 3/2$;
- теорема 2 верна при $d > 2\Delta$.

Возвращаясь к примеру 1, отметим, что процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим, с моментами регенерации $\theta_j = \sum_{i=0}^j \tau_i$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что здесь не предполагается независимость ξ_j и τ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, и для нахождения оценки для корреляционной функции процесса $\lambda(t)$ достаточным является требование $P(\xi_j \leq \lambda_M) = 1$.

5.2. Входящий поток, управляемый полумарковским модулированным процессом. Эти потоки образуют важный подкласс ДСПП. Случайная интенсивность представляется в следующем виде:

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \mathbb{I}_{\{U(t)=k\}}, \quad (2.2)$$

где $\{U(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ – стационарный полумарковский процесс, принимающий значения $\{0, 1, 2, \dots\}$, а $\{\lambda_k, \lambda_k < C, k \geq 0\}$ – совокупность неотрицательных чисел. В таком случае интенсивность $\lambda(t)$ также является стационарным процессом. Как известно (см. например, [16]), распределение $U(t)$ определяется двумя матрицами $\mathbb{P} = (p_{ij})$ и $\mathbb{G} = (G_{ij}(x))$. Первая состоит из вероятностей перехода из (i) в (j) , а вторая – из функций распределения времен нахождения $U(t)$ в состояниях $i = 0, 1, 2, \dots$ при условии, что следующим состоянием будет j . Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – моменты скачков $U(t)$ и $U_n = U(t_n + 0)$. Тогда $\mathbb{P}$ является матрицей переходных вероятностей для цепи Маркова U_n . Заметим, что процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим и в качестве его точек регенерации $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ можно взять моменты его попадания в некоторое фиксированное состояние, например, в нулевое. Положим

$$\theta_0 = \inf\{t \geq 0 : U(t) = 0\}, \quad \theta_i = \inf_{n \geq 1} \{t_n > \theta_{i-1} : U_n = 0\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\tau_0 = \theta_0, \quad \tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Наша цель – выяснить условия, при которых для бесконечноканальной системы с полумарковским входящим потоком будут справедливы утверждения теорем 1 и 2. Для этого, как следует из теоремы 3, необходимо выяснить асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ вероятности

$$P(\tau_0 > t) = \frac{1}{E\tau_1} \int_t^{\infty} P(\tau_1 > y) dy.$$

Заметим, что период регенерации $\tau_j, j \geq 1$, состоит из времени, которое процесс $U(t)$ проводит в нулевом состоянии после попадания в него, и времени возвращения в нулевое состояние после выхода из него.

Определим

$$\nu_{jk} = \min\{n > 0 : U_n = k\} \quad \text{при условии} \quad U_0 = j.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует функция распределения $G(x)$ с конечным средним такая, что при достаточно больших x

$$1 - G_{ij}(x) \leq 1 - G(x) \quad \text{для} \quad i, j = 0, 1, \dots;$$

- 2) найдутся $\beta \in (0, 1)$, постоянная $C > 0$ и целое n_0 такие, что

$$P(\nu_{0j} > n) \leq C(1 - \beta)^n \quad \text{при} \quad n > n_0 \quad \text{и} \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$, некоторых постоянных C_1, C_2 и всех достаточно больших x выполняется неравенство

$$P(\tau_1 > x) \leq C_1(1 - G(x^{1-h})) + C_2 e^{-\gamma x^h}, \quad (2.3)$$

где $\gamma = -\ln(1 - \beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что справедливо следующее стохастическое равенство:

$$\nu_{00} = 1 + \sum_{j \neq 0} \nu_{0j} \mathbb{I}_{(A_{0j})},$$

где A_{0j} – событие, состоящее в том, что из (0) происходит переход в состояние (j).

Введем последовательность $\{\eta_j\}_{j=0}^{\infty}$ н.о.р.с.в. с функцией распределения $G(x)$. Для любого $M > n_0$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} P(\tau_1 > x) &\leq P\left(\sum_{j=0}^{\nu_{00}} \eta_j > x, \nu_{00} \leq M\right) + P\left(\sum_{j=0}^{\nu_{00}} \eta_j > x, \nu_{00} > M\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^M n P\left(\eta_1 > \frac{x}{n}\right) P(\nu_{00} = n) + P(\nu_{00} > M) \\ &\leq \sum_{j=1}^M n \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right) P(\nu_{00} = n) + P(\nu_{00} > M) \\ &\leq \left(1 - G\left(\frac{x}{M}\right)\right) E\nu_{00} + C(1 - \beta)^M. \end{aligned}$$

Полагая $M = [x^h]$ для $h \in (0, 1)$ и $\gamma = -\ln(1 - \beta)$, получаем (2.3).

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 4 для системы обслуживания с входящим потоком интенсивности $\lambda(t)$, определяемой соотношением (2.2), имеют место следующие утверждения:

- 1) если $1 - G(x) \leq e^{-qx}$ для некоторого $q > 0$, то выполняются теоремы 1 и 2;
- 2) если $1 - G(x) \leq c/x^\delta$ для $\delta > 1$, $c > 0$ при $x \rightarrow \infty$, то теорема 1 выполняется при $\delta > \Delta + 1$, а теорема 2 – при $|\Delta - 1/2| < \delta - 3/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 корреляционная функция $r(t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет оцениваться экспоненциальной в случае 1), так что теоремы 1 и 2 справедливы.

Далее, из (2.3) для $h \in (0, 1)$ и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$P(\tau_1 > x) \leq E\nu_{00} \frac{c}{x^{\delta(1-h)}} + e^{-\gamma x^h} \leq \frac{C}{x^{(1-h)(\delta-\varepsilon)}}$$

при $x \rightarrow \infty$. Здесь C – некоторая постоянная. Таким образом, получаем, что для некоторой постоянной C_1 имеет место оценка

$$|r(t)| \leq \frac{C_1}{t^{(1-h)(\delta-\varepsilon)-1}} \quad (2.4)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Если $|\Delta - 1/2| < \delta - 3/2$, то найдутся $\varepsilon > 0$, $h \in (0, 1)$ для которых выполнено (2.4) и, стало быть, теорема 1 верна во втором случае. Аналогично устанавливается справедливость теоремы 2 при $\delta > 2\Delta$.

ПРИМЕР 2. Предположим, что полумарковский процесс $U(t)$ имеет конечное множество состояний, $\mathbb{P}$ – эргодическая матрица. Пусть

$$\pi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{i0}(n),$$

где $P_{jk}(n) = P(U_n = k | U_0 = j)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что при всех $n \geq n_\varepsilon$ и всех i выполнено неравенство

$$|P_{i0}(n) - \pi_0| < \varepsilon,$$

так что $P_{i0}(n) > \pi_0 - \varepsilon > 0$. Поэтому при $j = 0, 1, 2, \dots$ и $n \geq n_\varepsilon$ имеем

$$P(\nu_{0j} > n) \leq (1 - \pi_0 + \varepsilon)^{n-n_\varepsilon} = C_\varepsilon (1 - \pi_0 + \varepsilon)^n.$$

Это и означает, что выполнено условие 2 теоремы 4.

Все множество пар состояний $\{(i, j), i, j = 0, 1, \dots, N\}$ разобьем на два класса K_0 и K_1 следующим образом. Если $(i, j) \in K_1$, то $1 - G_{ij}(x) \leq c_{ij}/x^{\delta_{ij}}$ при $x \rightarrow \infty$. В качестве мажорирующей функции $G(x)$ возьмем $\tilde{G}(x) = \min_{i,j} G_{ij}(x)$, которая при конечном N является функцией распределения.

Если класс K_1 пуст, то $1 - G(x) \leq e^{-qx}$ для некоторого $q > 0$ и теоремы 1 и 2 всегда имеют место. В противном случае для некоторой постоянной C_0 имеем

$$1 - G(x) \sim \frac{C_0}{x^{\delta_0}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

где $\delta_0 = \min_{(i,j) \in K_1} \delta_{ij}$. Теперь можно воспользоваться следствием 3 для того, чтобы определить, при каких условиях будут иметь место теоремы 1 и 2 в системе с таким входящим потоком.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим ДСПП $A(t)$ с интенсивностью $\lambda(t)$, которая является полумарковским модулированным процессом. Этот процесс управляется полумарковским процессом $U(t)$, который имеет счетное множество состояний. Матрица переходных вероятностей $\mathbb{P}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{0,1} &= 1, & p_{i,i+1} &= p_i, & p_{i,i-1} &= 1 - p_i, \\ p_{i,j} &= 0 & \text{при } |j - i| &> 1. \end{aligned}$$

Пусть выполнено условие 1 теоремы 4 и при всех $i = 1, 2, \dots$

$$p_i < \frac{1}{2} - \varepsilon \tag{2.5}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажем, что тогда справедливы утверждения следствия 3. Для этого нам достаточно установить выполнение условия 2 теоремы 4 или то, что случайная величина ν_{00} стохастически мажорируется геометрически распределенной случайной величиной $\tilde{\nu}$.

Для этого рассмотрим случайное блуждание S_n , задаваемое рекуррентным соотношением $S_n = [S_{n-1} + \xi_n]^+$ при $n > 0$, $S_0 = 0$. Здесь $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — н.о.р.с.в. и

$$P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

$E\xi_n = -2\varepsilon$, $D\xi_n = 1 - 4\varepsilon^2$. Пусть $\hat{\nu}_{10}$ — число шагов до первого попадания S_n в (0) из состояния (1). Тогда

$$P(\hat{\nu}_{10} > n) = P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n > 0) \leq P(S_n > 0).$$

Согласно центральной предельной теореме имеем при достаточно больших n

$$P(S_n > 0) \sim 1 - \Phi\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Используя в данном случае оценку [17]

$$1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

получаем асимптотическое неравенство для вероятности

$$P(S_n > 0) < \frac{1}{c\sqrt{2\pi n}} e^{-c^2 n/2} \quad (2.6)$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь $c = 2\varepsilon/\sqrt{1-4\varepsilon^2}$. Таким образом, при достаточно больших n справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} P(\nu_{00} > n) &= P(\nu_{10} > n-1) \leq P(\hat{\nu}_{10} > n-1) < P(S_{n-1} > 0) \\ &\leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi(n-1)}} e^{-(c^2(n-1))/2} \leq (e^{-c^2/2})^n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

что и доказывает выполнение условия 2 теоремы 4. Так что имеет место следствие 3.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Л. Г. Афанасьевой и к.ф.-м.н. Е. Е. Баштовой за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указания, существенным образом способствовавшие написанию работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Kang, K. Ramanan, “Asymptotic approximations for stationary distributions of many-server queues with abandonment”, *Ann. Appl. Probab.*, **22**:2 (2012), 477–521.
- [2] W. Whitt, “Efficiency-driven heavy-traffic approximations for many-server queues with abandonments”, *Management Science*, **50**:10 (2004), 1449–1461.
- [3] B. D’Auria, “Stochastic decomposition of the queue in a random environment”, *Oper. Res. Lett.*, **35**:6 (2007), 805–812.
- [4] W. A. Massey, W. Ward, “Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input”, *Queueing Systems Theory Appl.*, **13**:1-3 (1993), 183–250.
- [5] Л. Г. Афанасьева, А. П. Биленко, “Характеристика суммарного потока импульсов”, *Вопросы радиоэлектроники*, 1972, № 4.
- [6] Л. Г. Афанасьева, И. В. Руденко, “Системы обслуживания $GI|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей”, *ТВИП*, **57**:3 (2012), 427–452.
- [7] L. Lipsky, D. Derek, G. Swapna, “Checkpointing for the restart problem in Markov networks”, *J. Appl. Probab.*, **48A**, New frontiers in applied probability: a Festschrift for Søren Asmussen, (2011), 195–207.
- [8] А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Наука, М., 1972.
- [9] H. Thorisson, “The coupling of regenerative processes”, *Adv. Appl. Probab.*, **15**:3 (1983), 531–561.

- [10] N. Kaplan, “Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue”, *Ann. Probab.*, **3**:5 (1975), 780–789.
- [11] J. Grandell, *Doubly Stochastic Poisson Process*, Lecture Notes in Math., **529**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [12] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1987.
- [13] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1986.
- [14] Л. Г. Афанасьева, Е. В. Булинская, *Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980.
- [15] L. G. Afanasyeva, E. E. Bashtova, “Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server”, *Queueing Syst.*, **76**:2 (2014), 125–147.
- [16] В. С. Королюк, С. М. Броди, А. Ф. Турбин, “Полумарковские процессы и их применения”, *Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, **11**, ВИНТИ, М., 1974, 47–97.
- [17] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 1, Мир, М., 1984; В. Феллер, Т. 2, Мир, М., 1984.

Е. А. Чернавская

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: Chernavskayaak@mail.ru

Поступило

02.07.2014