Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, А. В. Иванов, Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 674–686

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:05:55

Оптимальные аргументы

в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля

В. И. Иванов, А. В. Иванов

Работа посвящена исследованию оптимальных аргументов в точном неравенстве Джексона–Стечкина с модулем непрерывности порядка r в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля, определяемого системой корней R и неотрицательной функцией кратности k . Если

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) = \frac{1}{2},$$

где R_+ – положительная подсистема системы корней, то оптимальные аргументы для всех r совпадают. Если $\lambda_k \neq 1/2$, то оптимальный аргумент для модуля непрерывности второго порядка больше, чем для первого. Такие закономерности связаны с арифметическими свойствами нулей функций Бесселя.

Библиография: 26 названий.

DOI: 10.4213/mzm10535

1. Введение. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ – d -мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\sigma > 0$, $B_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \sigma\}$ – евклидов шар,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)} \quad (1.1)$$

– обобщенный степенной вес или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией кратности $k(\alpha): R \rightarrow \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R ,

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$$

– интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x) dx$, $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ – гильбертово пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 d\mu_k(x) \right)^{1/2}.$$

При $k(\alpha) \equiv 0$ будем использовать обозначение $\|f\|_2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00045) и Министерства образования и науки РФ (госзадания №№ 5414ГЗ, 1.1333.2014К).

© В. И. Иванов, А. В. Иванов, 2014

Гармонический анализ в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) e_k(x, y) d\mu_k(y),$$

где $e_k(x, y)$ – обобщенная экспонента, определяемая с помощью дифференциально-разностных операторов Данкля, многие свойства которой аналогичны свойствам экспоненты $e^{i\langle x, y \rangle}$. Для преобразований Данкля выполнено равенство Парсеваля (см. [1]).

Пусть $C_b(X)$ – пространство непрерывных ограниченных функций на локально компактном множестве X , $\text{supp } f$ – носитель функции f .

Для функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

$$E_\sigma(f)_{2,k} = \inf \{ \|f - g\|_{2,k} : g \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d), \text{supp } \widehat{g} \subset B_\sigma \}$$

– величина наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа $\sigma > 0$.

Пусть $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, $r \in \mathbb{N}$,

$$\binom{r}{s} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(r-s+1)}, \quad M_r = \left\{ (-1)^s \binom{r}{s} \right\}_{s \in \mathbb{Z}}.$$

Последовательность M_r отлична от нуля только при $s = 0, 1, \dots, r$.

Посредством свертки образуем новую последовательность

$$\nu_s = (-1)^s \sum_{l \in \mathbb{Z}} \binom{r}{s+l} \binom{r}{l} = (-1)^s \binom{2r}{r-s}.$$

Она отлична от нуля при $s = -r, -r+1, \dots, r$. Определим функцию

$$\varphi_r(t, y) = \sum_{s=-r}^r \nu_s e_k(st, y), \quad t, y \in \mathbb{R}^d.$$

Используя интегральное представление обобщенной экспоненты [2]

$$e_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, y \rangle} d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x – вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке $\text{co}\{gx : g \in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$, получим

$$\varphi_r(t, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{s=-r}^r \nu_s e^{is\langle \xi, y \rangle} d\mu_k^t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} e^{is\langle \xi, y \rangle} \right|^2 d\mu_k^t(\xi) \geq 0.$$

Для $\varphi_r(t, y)$ выполнены также свойства

$$\varphi_r(t, y) \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \quad \varphi_r(t, y) = \varphi_r(y, t), \quad \varphi_r(0, y) = 0.$$

Перечисленные свойства $\varphi_r(t, y)$ позволяют для $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определить модуль непрерывности порядка r [3]:

$$\omega_r(\tau, f)_{2,k} = \sup_{|t| \leq \tau} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(t, y) |\widehat{f}(y)|^2 d\mu_k(y) \right)^{1/2}, \quad \tau > 0.$$

Если $v_k(x) = 1$ ($k(\alpha) \equiv 0$) – единичный вес и

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} f(x + st)$$

– разностный оператор порядка r , то модуль непрерывности

$$\omega_r(\tau, f)_{2,k} = \sup_{|t| \leq \tau} \|\Delta_t^r f(x)\|_2$$

совпадает с обычным модулем непрерывности порядка r .

Константа Джексона–Стечкина

$$D_r(\sigma, \tau)_{2,k} = \sup \left\{ \frac{E_\sigma(f)_{2,k}}{\omega_r(\tau, f)_{2,k}} : f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d) \right\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_\sigma(f)_{2,k} \leq D_r(\tau, f)_{2,k}.$$

Для константы Джексона–Стечкина установлены следующие свойства:

- 1) $D_r(\sigma, \tau)_{2,k} = D_r(1, \sigma\tau)_{2,k}$, поэтому в дальнейшем можно считать, что $\sigma = 1$ [4];
- 2) $D_r(1, \tau)_{2,k}$ как функция $\tau > 0$ конечна и непрерывна [4];
- 3) для любого $\tau > 0$ справедлива нижняя оценка [4]:

$$D_r(1, \tau)_{2,k} \geq \binom{2r}{r}^{-1/2};$$

- 4) для произвольного веса Данкля (1.1), $r \in \mathbb{N}$, функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, $\sigma > 0$ и некоторого $\tau^* = \tau^*(d, k, r)$ справедливо точное неравенство Джексона [5]:

$$E_\sigma(f)_{2,k} \leq \binom{2r}{r}^{-1/2} \omega_r\left(\frac{\tau^*}{\sigma}, f\right)_{2,k}. \quad (1.2)$$

В случае единичного веса неравенство (1.2) доказано Васильевым [6]. Для этого случая Горбачев [7] получил эффективную оценку $\tau^* \leq 2q_{d/2}$. Здесь $q_{d/2}$ – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_{d/2}(x)$.

Наименьшее значение τ^* в неравенстве (1.2) называется оптимальным аргументом. По определению оптимальный аргумент

$$\tau_{r,k} = \min \left\{ \tau > 0 : D_r(1, \tau)_{2,k} = \binom{2r}{r}^{-1/2} \right\}.$$

Существование минимума вытекает из непрерывности и невозрастания константы Джексона–Стечкина при $\tau > 0$ и ее неограниченности при $\tau \rightarrow 0 + 0$.

Наиболее полно оптимальные аргументы исследованы только для первого модуля непрерывности. Первый оптимальный аргумент был найден в периодическом случае Черных [8], [9]. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ оптимальные аргументы найдены Горбачевым [10]. Отметим также работу Бердышевой [11]. В $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ оптимальные аргументы найдены в работах [12]–[14].

Пусть v_k – произвольный вес Данкля (1.1),

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha). \quad (1.3)$$

Мы доказываем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $\lambda_k = 1/2$, то для всех $r \in \mathbb{N}$*

$$\tau_{r,k} = \tau_{1,k} = 2\pi. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Если $\lambda_k \neq 1/2$, то*

$$\tau_{2,k} > \tau_{1,k}. \quad (1.5)$$

Отметим, что равенство $\lambda_k = 1/2$ возможно только в размерностях $d = 1, 2, 3$, причем при $d = 3$ вес – единичный.

Равенство (1.4) в $L_2(\mathbb{R}^3)$ при $r = 2$ доказано Горбачевым и Странковским [15]. Неравенство (1.5) в $L_2(\mathbb{R})$ доказано Арестовым и Бабенко [16].

2. Редукция к одномерному неравенству Джексона–Стечкина. В [3] доказано, что константа Джексона–Стечкина в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ совпадает с константой Джексона–Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ со степенным весом.

Пусть $\lambda \geq -1/2$, $J_\lambda(x)$ – функция Бесселя порядка λ , $j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) J_\lambda(x) / x^\lambda$ – нормированная функция Бесселя, $b_\lambda = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)$, $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\lambda} = \left(b_\lambda^{-1} \int_0^\infty |f(t)|^2 t^{2\lambda+1} dt \right)^{1/2}, \quad \tilde{f}(s) = b_\lambda^{-1} \int_0^\infty f(r) j_\lambda(rs) r^{2\lambda+1} dr$$

– преобразование Ганкеля (см. [17; гл. V]). Преобразование Ганкеля является сужением на четные функции преобразования Данкля в $L_{2,k}(\mathbb{R})$ при $k(\alpha) = \lambda + 1/2$. Обратное преобразование Ганкеля совпадает с прямым.

Рассмотрим непрерывную на $\mathbb{R}_+$ функцию

$$\alpha_r(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \nu_l j_\lambda(lt).$$

Для нее выполнены условия [4]

$$\alpha_r(t) \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad \alpha_r(t) \geq 0, \quad \alpha_r(0) = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_{2,\lambda} &= \inf \{ \|f - g\|_{2,\lambda} : g \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+), \text{supp } \tilde{g} \subset [0, \sigma] \} \\ &= \left(b_\lambda^{-1} \int_\sigma^\infty |\tilde{f}(s)|^2 s^{2\lambda+1} ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ четными целыми функциями экспоненциального типа,

$$\omega_r(\delta, f)_{2,\lambda} = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left(b_\lambda^{-1} \int_0^\infty \alpha_r(ts) |\tilde{f}(s)|^2 s^{2\lambda+1} ds \right)^{1/2}$$

– ее модуль непрерывности порядка r ,

$$D_r(\sigma, \delta)_{2,\lambda} = \sup \left\{ \frac{E_\sigma(f)_{2,\lambda}}{\omega_r(\delta, f)_{2,\lambda}} : f \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+) \right\}$$

– константа Джексона–Стечкина в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 2.1 [3]. Если λ_k определено в (1.3), $r \in \mathbb{N}$, $\sigma, \tau > 0$, то

$$D_r(\sigma, \tau)_{2,k} = D_r(\sigma, \tau)_{2,\lambda_k}.$$

Пусть $\tau_{r,\lambda}$ – оптимальный аргумент в $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$, т.е.

$$\tau_{r,\lambda} = \min \left\{ \tau > 0 : D_r(1, \tau)_{2,\lambda} = \binom{2r}{r}^{-1/2} \right\}.$$

Согласно теореме 2.1 теоремы 1.1, 1.2 будут вытекать из следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\lambda = 1/2$, то для всех $r \in \mathbb{N}$

$$\tau_{r,\lambda} = \tau_{1,\lambda} = 2\pi. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Если $\lambda \neq 1/2$, то

$$\tau_{2,\lambda} > \tau_{1,\lambda}. \quad (2.2)$$

Известно, что при $\lambda \geq -1/2$ $\tau_{1,\lambda} = 2q_\lambda$, где q_λ – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_\lambda(x)$ [10], и $\tau_{2,1/2} = \tau_{1,1/2} = 2\pi$ [15]. В [18] получена оценка $\tau_{r,\lambda} \leq 2q_{\lambda+1}$.

3. Связь с обобщенной задачей Логана. Пусть $S^+[0, 1]$ – множество неубывающих на отрезке $[0, 1]$ функций $\mu(x)$, для которых $\mu(1) - \mu(0) = 1$,

$$K_\lambda = \left\{ f(x) : f(x) = \int_0^1 j_\lambda(tx) d\mu(t), \mu \in S^+[0, 1] \right\}$$

– класс четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа 1, $\theta(f) = \sup\{x > 0 : f(x) > 0\}$, $a_s = \nu_s/|\nu_1|$, $s = 1, \dots, r$,

$$F_r(x, f) = - \sum_{s=1}^r a_s f(sx). \quad (3.1)$$

Отметим, что $a_1 = -1$,

$$|a_s| \downarrow, \quad |a_s| < 1, \quad \operatorname{sgn} a_s = (-1)^s, \quad 1 - \sum_{k=2}^s a_k \in (0, 1), \quad s = 2, \dots, r, \quad (3.2)$$

$$\sum_{s=2}^r \frac{|a_s|}{s^2} < \frac{2}{3}.$$

Обобщенная задача Логана состоит в вычислении величины

$$\Lambda_r(K_\lambda) = \inf\{\theta(F_r(f)) : f \in K_\lambda\}.$$

Логан [19] поставил и решил эту задачу в случае $\lambda = -1/2$, $F_1(t, f) = f(t)$. Примеры решения задачи Логана можно найти в [10], [11], [13], [14].

ТЕОРЕМА 3.1 [20], [15]. Если $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq -1/2$, то

$$\tau_{r,\lambda} = \Lambda_r(K_\lambda).$$

В дальнейшем будем исследовать обобщенную задачу Логана. В [20] доказано, что в обобщенной задаче Логана существует экстремальная функция $f \in K_\lambda$, для которой $\theta(F_r(f)) < \infty$ и $F_r(f) \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$. Здесь $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(t)| t^{2\lambda+1} dt.$$

4. Обобщенная задача Логана при $\lambda = 1/2$. Для получения верхней оценки рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{j_{1/2}^2(x/2)}{1 - (x/2\pi)^2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \frac{1}{1 - (x/2\pi)^2}.$$

Так как

$$f(x) = 4 \int_0^1 j_{1/2}(xt) t \sin^2 \pi t dt,$$

то $f \in K_{1/2}$. Имеем

$$F_r(x, f) = \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2(1 - (x/2\pi)^2)} \left\{ 1 - \sum_{s=2}^r \frac{a_s \sin^2(sx/2)}{s^2 \sin^2(x/2)} \frac{((x/2\pi)^2 - 1)}{((sx/2\pi)^2 - 1)} \right\}.$$

Пусть $s \geq 2$. Так как для $x \geq 2\pi$

$$0 \leq \frac{\sin^2(sx/2)}{\sin^2(x/2)} \leq s^2, \quad 0 \leq \frac{(x/2\pi)^2 - 1}{(sx/2\pi)^2 - 1} \leq \frac{1}{s^2},$$

то согласно (3.2)

$$1 - \sum_{s=2}^r \frac{a_s \sin^2(sx/2)}{s^2 \sin^2(x/2)} \frac{((x/2\pi)^2 - 1)}{((sx/2\pi)^2 - 1)} \geq 1 - \sum_{s=2}^r \frac{|a_s|}{s^2} > \frac{1}{3}.$$

Поэтому для $x \geq 2\pi$ выполнено $F_r(x, f) \leq 0$ и $\Lambda_r(K_{1/2}) \leq 2\pi$.

Для получения нижней оценки нам понадобятся некоторые вспомогательные факты и утверждения.

Известно, что для $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_r| < 1$, $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{s_1=0}^\infty \dots \sum_{s_r=0}^\infty \frac{(s_2 + \dots + s_r + s)!}{s_1! \dots s_r!} \alpha_1^{s_1} \dots \alpha_r^{s_r} = \frac{s!}{(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_r)^{s+1}}, \quad (4.1)$$

причем ряд (4.1) сходится абсолютно.

Если для последовательности $\lambda_k \geq 0$ выполнено $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \delta > 0$, то для четной целой функции $g \in L(\mathbb{R}_+)$ экспоненциального типа не выше $\tau > 0$ справедливо неравенство Планшереля–Поля [21]

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(\lambda_k)| \leq \frac{4}{\pi\delta} e^{\tau\delta/2} \int_0^{\infty} |g(x)| dx.$$

Отсюда для четной целой функции $g \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ экспоненциального типа не выше 1 и произвольных $x > 0$ вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |g(kx)| \leq \frac{c_{\tau}(x)}{x^2} \int_0^{\infty} |g(x)| x^2 dx = \frac{c_{\tau}(x)}{x^2} \|g\|, \quad c_{\tau}(x) = 2 \max(2x^{-1}, \tau). \quad (4.2)$$

Для четной целой функции $g \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ экспоненциального типа не выше 1 справедлива квадратурная формула [22], [23]

$$\int_0^{\infty} g(x) x^2 dx = (2\pi)^3 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 g(2\pi k), \quad (4.3)$$

причем ряд (4.3) сходится абсолютно.

ЛЕММА 4.1. Если $r \in \mathbb{N}$, $f \in K_{1/2}$, $\theta(F_r(f)) < \infty$, то $f \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{f}(x) \geq 0$, $\text{supp } \tilde{f} \subset [0, 1]$ и для всех $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) = \sum_{s_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_r=0}^{\infty} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} a_2^{s_2} \cdots a_r^{s_r} F_r(2^{s_2} \cdots r^{s_r} x, f). \quad (4.4)$$

Ряд (4.4) сходится абсолютно при $x > 0$ и равномерно при $x \geq \delta > 0$, а также сходится в $L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(x) = F_r(x, f)$. При выполнении условий леммы $F(x) \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ [20].

При $x = 0$ имеем $F(0) = (1 - \sum_{s=2}^r a_s) f(0)$ и согласно (3.2), (4.1) ряд (4.4), рассматриваемый как повторный в порядке возрастания индекса, сходится к $f(0)$:

$$\sum_{s_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_r=0}^{\infty} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} a_2^{s_2} \cdots a_r^{s_r} F(0) = \left(1 - \sum_{s=2}^r a_s\right)^{-1} F(0) = f(0).$$

Согласно (3.2), (4.1) и (4.2) при $\tau = r$ ряд (4.4) сходится абсолютно при $x > 0$ (равномерно при $x \geq \delta > 0$):

$$\begin{aligned} & \sum_{s_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_r=0}^{\infty} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} |a_2|^{s_2} \cdots |a_r|^{s_r} |F(2^{s_2} \cdots r^{s_r} x)| \\ & \leq \frac{c_r(x)}{x^2} \sum_{s_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_r=0}^{\infty} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} \left(\frac{|a_2|}{2^2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{|a_r|}{r^2}\right)^{s_r} \|F\| \leq \frac{3c_r(x)}{x^2} \|F\|. \end{aligned}$$

Согласно (3.1) справедливо равенство

$$f(x) = F(x) + \sum_{s=2}^r a_s f(sx).$$

Индукцией по N выводим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{s_2+\dots+s_r=s} \frac{s!}{s_2! \dots s_r!} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r} F(2^{s_2} \dots r^{s_r} x) \\ &\quad + \sum_{s_2+\dots+s_r=N} \frac{N!}{s_2! \dots s_r!} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r} f(2^{s_2} \dots r^{s_r} x) \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} A_s(x) + B_N(x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ряд $\sum_{s=0}^{\infty} A_s(x)$ является группировкой ряда (4.4), поэтому он сходится абсолютно при $x > 0$. Так как

$$\int_{\mathbb{R}_+} |F(2^{s_2} \dots r^{s_r} x)| x^2 dx = (2^{s_2} \dots r^{s_r})^{-3} \int_{\mathbb{R}_+} |F(x)| x^2 dx = (2^{s_2} \dots r^{s_r})^{-3} \|F\|,$$

согласно (4.1) он сходится в $L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|A_s\| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s_2+\dots+s_r=s} \frac{s!}{s_2! \dots s_r!} \left(\frac{|a_2|}{2^2}\right)^{s_2} \dots \left(\frac{|a_r|}{r^2}\right)^{s_r} \|F\| \leq 3\|F\|.$$

Аналогично доказывается сходимость в $L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ ряда (4.4).

Последовательность $B_N(x)$ фундаментальна в $L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$, поэтому $f \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$. Согласно (3.2) и (4.2) при $\tau = 1$ для $x > 0$ и $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |B_N(x)| &= \left| \sum_{s_2+\dots+s_r=N} \frac{N!}{s_2! \dots s_r!} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r} f(2^{s_2} \dots r^{s_r} x) \right| \\ &\leq \frac{c_1(x)}{x^2} \|f\| \sum_{s_2+\dots+s_r=N} \frac{N!}{s_2! \dots s_r!} \left(\frac{|a_2|}{2^2}\right)^{s_2} \dots \left(\frac{|a_r|}{r^2}\right)^{s_r} \leq \frac{c_1(x)}{x^2} \|f\| \left(\frac{2}{3}\right)^N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (4.4) для всех $x > 0$ абсолютно сходится к $f(x)$.

По теореме Пэли–Винера [24] $\text{supp } \tilde{f} \subset [0, 1]$ и для всех $x \geq 0$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \tilde{f}(t) j_{1/2}(xt) dt = \int_0^1 j_{1/2}(xt) d\mu(t),$$

поэтому по теореме о единственности меры (см., например, [13]) $d\mu(t) = \sqrt{2/\pi} \tilde{f}(t) dt$ и $\tilde{f}(t) \geq 0$. Лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 4.2. Если $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ – четная целая функция экспоненциального типа не выше 1, то

$$\int_0^\infty F_r(x, f) x^2 dx = \sum_{n=1}^\infty \rho_n F_r(2\pi n, f), \quad (4.6)$$

причем ряд (4.6) сходится абсолютно и для $n \in \mathbb{N}$

$$0 < c_1(r) n^2 \leq \rho_n \leq c_2(r) n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1), (3.2), (4.3), (4.4)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty F_r(x, f) x^2 dx \\
 &= - \sum_{s=1}^r a_s \int_0^\infty f(sx) x^2 dx = - \sum_{s=1}^r \frac{a_s}{s^3} \int_0^\infty f(x) x^2 dx \\
 &= a(r) \sum_{k=1}^\infty k^2 \sum_{s_2=0}^\infty \cdots \sum_{s_r=0}^\infty \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} a_2^{s_2} \cdots a_r^{s_r} F_r(2\pi k 2^{s_2} \cdots r^{s_r}, f) \\
 &= a(r) \sum_{n=1}^\infty n^2 F_r(2\pi n, f) \sum_{k 2^{s_2} \cdots r^{s_r} = n} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} \left(\frac{a_2}{2^2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{a_r}{r^2}\right)^{s_r} \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \rho_n F_r(2\pi n, f), \quad a(r) = -(2\pi)^3 \sum_{s=1}^r \frac{a_s}{s^3} > 0. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Положим

$$J_n = \sum_{k 2^{s_2} \cdots r^{s_r} = n} \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} \left(\frac{a_2}{2^2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{a_r}{r^2}\right)^{s_r}.$$

Отметим, что представление $k 2^{s_2} \cdots r^{s_r} = n$ верно при $k = n$, $s_2 = \cdots = s_r = 0$.

Пусть сначала $r = 2$. Тогда $a_2 = 1/4$,

$$1 \leq J_n = \sum_{k 2^{s_2} = n} \left(\frac{a_2}{4}\right)^{s_2} \leq \sum_{s=0}^\infty 16^{-s} \leq 2$$

и $a(r)n^2 \leq \rho_n = a(r)J_n n^2 \leq 2a(r)n^2$.

Далее считаем $r \geq 3$. Так как в силу (3.2), (4.1)

$$J_n \leq \sum_{s_2=0}^\infty \cdots \sum_{s_r=0}^\infty \frac{(s_2 + \cdots + s_r)!}{s_2! \cdots s_r!} \left(\frac{|a_2|}{2^2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{|a_r|}{r^2}\right)^{s_r} \leq \left(1 - \sum_{s=2}^r \frac{|a_s|}{s^2}\right)^{-1} \leq 3,$$

$F_r(x, f) \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$, то ряд (4.7) сходится абсолютно и $\rho_n \leq 3a(r)n^2$.

Пусть $t = [(r-1)/2]$, $\tau = [r/2]$,

$$\sigma_1 = \sum_{s=1}^\tau \frac{|a_{2s}|}{(2s)^2}, \quad \sigma_2 = \sum_{s=1}^t \frac{|a_{2s+1}|}{(2s+1)^2}.$$

Справедливы оценки

$$\sigma_1 \leq \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{(2s)^2} = \frac{\pi^2}{24}, \quad \sigma_2 \leq \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{(2s+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1. \tag{4.8}$$

Так как $a_{2j} > 0$, $j = 1, \dots, \tau$, $a_{2i+1} < 0$, $i = 1, \dots, t$, то применяя (4.1), (4.8), получим

$$\begin{aligned}
 J_n &\geq 1 - \sum_{l=0}^\infty \sum_{s_3 + \cdots + s_{2t+1} = 2l+1} \frac{1}{s_3! \cdots s_{2t+1}!} \left(\frac{|a_3|}{3^2}\right)^{s_3} \cdots \left(\frac{|a_{2t+1}|}{(2t+1)^2}\right)^{s_{2t+1}} \\
 &\quad \times \sum_{s_2=0}^\infty \cdots \sum_{s_{2\tau}=0}^\infty \frac{(s_2 + \cdots + s_{2\tau} + 2l+1)!}{s_2! \cdots s_{2\tau}!} \left(\frac{a_2}{2^2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{a_{2\tau}}{(2\tau)^2}\right)^{s_{2\tau}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\sigma_1)^{2l+2}} \sum_{s_3+\dots+s_{2l+1}=2l+1} \frac{(2l+1)!}{s_3! \dots s_{2l+1}!} \left(\frac{|a_3|}{3^2}\right)^{s_3} \dots \left(\frac{|a_{2l+1}|}{(2l+1)^2}\right)^{s_{2l+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{1-\sigma_1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_2}{1-\sigma_1}\right)^{2l+1} = 1 - \frac{\sigma_2}{(1-\sigma_1)^2 - \sigma_2^2} \geq 1 - \frac{3/2 - 12/\pi^2}{2 - \pi^2/6} \geq 0.1.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $r \geq 3$ выполнено $\rho_n \geq 0, 1a(r)n^2$. Лемма 4.2 доказана.

Для функции $f_\theta(x) = f(\theta x)$, $\theta \in (0, 1]$, $F_r(x, f_\theta) = F_r(\theta x, f)$. Применяя лемму 4.2, получим следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. Если $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$ – четная целая функция экспоненциального типа не выше 1, $\theta \in (0, 1]$, то

$$\int_0^\infty F_r(x, f) x^2 dx = \theta^3 \sum_{n=1}^\infty \rho_n F_r(2\pi\theta n, f). \quad (4.9)$$

Теперь мы можем в обобщенной задаче Логана получить нижнюю оценку. Пусть для некоторых $\epsilon > 0$ и функции $f \in K_{1/2} \cap L_{1,1/2}(\mathbb{R}_+)$

$$f(x) \leq 0, \quad x \geq (1-\epsilon)2\pi. \quad (4.10)$$

Так как по лемме 4.1 $\tilde{f}(0) \geq 0$, применяя (4.9), (4.10), для $\theta \in [1-\epsilon, 1]$ получим

$$0 \leq - \sum_{s=1}^r \frac{a_s}{s^3} \int_0^\infty f(x) x^2 dx = \int_0^\infty F_r(x, f) x^2 dx = \theta^3 \sum_{n=1}^\infty \rho_n F_r(2\pi\theta n, f) \leq 0.$$

Отсюда для $\theta \in [1-\epsilon, 1]$ $F_r(2\pi\theta, f) = 0$, а по лемме 4.1 и $f(2\pi\theta) = 0$. Из аналитичности f вытекает, что $f \equiv 0$, что противоречит условию $f(0) = 1$. Значит, $\Lambda_r(K_{1/2}) \geq 2\pi$. Нижняя оценка получена.

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.4. Если $r \in \mathbb{N}$, то

$$\Lambda_r(K_{1/2}) = 2\pi.$$

Из теорем 3.1, 4.4 вытекают теоремы 1.1, 2.2.

5. Обобщенная задача Логана при $\lambda \neq 1/2$. Пусть $\lambda \geq -1/2$, $q_{\lambda,1} < q_{\lambda,2} < \dots < q_{\lambda,s} < \dots$ – положительные нули функции Бесселя $J_\lambda(x)$,

$$E_N = \min\{|2q_{\lambda,k} - q_{\lambda,s}| : k, s \geq N\}.$$

Известна следующая асимптотика нулей функции Бесселя [25; с. 557]:

$$q_{\lambda,s} = \beta - \frac{4\lambda^2 - 1}{8\beta} + O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad \beta = \left(s + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right)\pi. \quad (5.1)$$

ЛЕММА 5.1. Если $\lambda \neq 1/2$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$

$$\{q_{\lambda,s}\}_{s=N}^\infty \cap \{2q_{\lambda,s}\}_{s=N}^\infty = \emptyset. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (5.2) эквивалентно неравенству $E_N > 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

Если $\lambda \neq 2m + 1/2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то $\lambda/2 - 1/4$ не является целым и согласно (5.1)

$$2q_{\lambda,k} - q_{\lambda,s} = 2k - s + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{k}\right) + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

поэтому $E_N > 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

Если $\lambda = 2m + 1/2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то согласно (5.1)

$$2q_{\lambda,k} - q_{\lambda,s} = 2k - s + m - \frac{(4\lambda^2 - 1)(2s - k + m)}{8\pi(k + m)(s + m)} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) + O\left(\frac{1}{s^3}\right).$$

Разбирая случаи $2k - s + m \neq 0$ и $2k - s + m = 0$, опять приходим к заключению, что $E_N > 0$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Лемма 5.1 доказана.

Рассмотрим обобщенную задачу Логана для функций $f \in K_\lambda$ при $\lambda \neq 1/2$, $r = 2$, $F_2(x, f) = f(x) - f(2x)/4$. Из (4.5)

$$f(x) = \sum_{s=0}^{N-1} 4^{-s} F_2(2^s x, f) + 4^{-N} f(2^N x),$$

поэтому для всех $x \geq 0$

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} 4^{-s} F_2(2^s x, f), \quad (5.3)$$

причем ряд сходится абсолютно, равномерно и в $L_{1,\lambda}(\mathbb{R}_+)$. Впервые равенство (5.3) появилось в [15]. Из него вытекает, что $\theta(f) \leq \theta(F_2(f))$. Если $\theta(F_2(f)) = 2q_{\lambda,1} = 2q_\lambda$, то $\theta(f) \leq 2q_\lambda$. Единственной такой функцией $f^* \in K_\lambda$ [26; с. 110] является функция

$$f^*(x) = \frac{j_\lambda^2(x/2)}{1 - (x/2q_\lambda)^2}.$$

Согласно (5.2) для нее $\theta(F_2(f^*)) = \infty$. Следовательно, для любой функции $f \in K_\lambda$ $\theta(F_2(f)) > 2q_\lambda$, поэтому при $\lambda \neq 1/2$ $\Lambda_2(K_\lambda) > 2q_\lambda = \Lambda_1(K_\lambda)$.

Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА 5.2. Если $\lambda \neq 1/2$, то

$$\Lambda_2(K_\lambda) > \Lambda_1(K_\lambda).$$

Из теорем 3.1, 5.2 вытекают теоремы 1.2, 2.3.

6. Заключение. Почему в обобщенной задаче Логана различаются случаи $\lambda = 1/2$ и $\lambda \neq 1/2$? Это связано с арифметическими свойствами нулей функций Бесселя.

При $\lambda = 1/2$ $q_{\lambda,s} = \pi s$ и для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\{kq_{\lambda,s}\}_{s=1}^{\infty} \subset \{q_{\lambda,s}\}_{s=1}^{\infty}.$$

На этом свойстве нулей функции $J_{1/2}(x)$ основано доказательство теоремы 4.4. Для $\lambda \neq 1/2$ доказательство теоремы 5.2 основано на свойстве нулей (5.2).

Мы предполагаем, что для нулей функций Бесселя справедливы более сильные утверждения.

ГИПОТЕЗА 1. При $\lambda \neq 1/2$

$$\{q_{\lambda,s}\}_{s=1}^{\infty} \cap \{2q_{\lambda,s}\}_{s=1}^{\infty} = \emptyset.$$

ГИПОТЕЗА 2. При $\lambda \neq \pm 1/2$ для любых $s \neq l$ $q_{\lambda,s}/q_{\lambda,l} \notin \mathbb{Q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Rösler, “Dunkl operators. Theory and applications”, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Lecture Notes in Math., **1817**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 93–135.
- [2] M. Rösler, “A positive radial product formula for the Dunkl kernel”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:6 (2003), 2413–2438.
- [3] Ха Тхи Минь Хуе, “О связи многомерных и одномерных констант Джексона в пространствах L_2 со степенными весами”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2012, № 6, 114–123.
- [4] А. В. Иванов, В. И. Иванов, Ха Тхи Минь Хуе, “Обобщенная константа Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2013, № 3, 74–90.
- [5] В. И. Иванов, Ха Тхи Минь Хуе, “Обобщенное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **20**, 2014, 109–118.
- [6] С. Н. Васильев, “Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **16**, 2010, 93–99.
- [7] Д. В. Горбачев, “Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2 -неравенстве Джексона–Стечкина”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **20**, 2014, 83–91.
- [8] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [9] V. V. Arestov, N. I. Chernykh, “On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials”, *Approximation and Functions Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43.
- [10] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187.
- [11] Е. Е. Бердышева, “Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **66**:3 (1999), 336–350.
- [12] А. В. Иванов, “Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2010, № 1, 26–44.
- [13] А. В. Иванов, “Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 29–58.
- [14] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 338–348.
- [15] Д. В. Горбачев, С. А. Странковский, “Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа”, *Матем. заметки*, **80**:5 (2006), 712–717.
- [16] V. V. Arestov, A. G. Babenko, “On the optimal point in Jackson’s inequality in $L_2(-\infty, \infty)$ with the second modulus of continuity”, *East J. Approx.*, **10**:1-2 (2004), 201–214.
- [17] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970.
- [18] Ха Тхи Минь Хуе, “Обобщенное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2014, № 1, 63–82.
- [19] B. F. Logan, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**:2 (1983), 249–253.

- [20] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальный аргумент в обобщенном неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля и обобщенная задача Логана”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2014, № 1, 22–36.
- [21] M. Plancherel, G. Pólya, “Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples”, *Comment. Math. Helv.*, **9** (1937), 224–248.
- [22] C. Frappier, P. Oliver, “A quadrature formula involving zeros of Bessel functions”, *Math. Comp.*, **60**:201 (1993), 303–316.
- [23] G. R. Grozev, Q. I. Rahman, “A quadrature formulae with zeros of Bessel functions as nodes”, *Math. Comp.*, **64**:210 (1995), 715–725.
- [24] M. de Jeu, “Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:10 (2006), 4225–4250.
- [25] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.
- [26] Д. В. Горбачев, *Экстремальные задачи теории функций и теории приближений и их приложения*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Екатеринбург, 2006.

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступило

16.06.2014

А. В. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: d_bringer@mail.ru