Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Рамазанов, Формулы для рациональных интерполяций и остатков, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 762–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:39:22

Формулы для рациональных интерполяций и остатков

А. К. Рамазанов

В работе рассмотрены вопросы существования интерполяционных рациональных функций в виде подходящих дробей непрерывной дроби Тиле, а также получено выражение остатка для таких рациональных интерполяций. Эти вопросы сходны с многоточечными аппроксимациями Паде. В качестве предельного случая получено выражение остатка для диагональных аппроксимаций Паде в нуле, а также достаточно простое выражение для точного значения остатка в случае функции $\sqrt{1+z}$.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10536

1. Введение. Пусть функция $f(z)$ определена на системе попарно различных узлов $z_0, z_1, \dots$. Тогда ее значения в этих узлах назовем *обратными разностями нулевого порядка* и обозначим их через $f^-(z_k) = f(z_k)$, $k = 0, 1, \dots$. Обратные разности первого и более высокого порядков определим аналогично с [1] по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} f^-(z_k, z_m) &= \frac{z_m - z_k}{f^-(z_m) - f^-(z_k)}, \\ f^-(z_k, z_m, z_n) &= \frac{z_n - z_m}{f^-(z_k, z_n) - f^-(z_k, z_m)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f^-(z_k, z_m, \dots, z_s, z_n, z_l) &= \frac{z_l - z_n}{f^-(z_k, z_m, \dots, z_s, z_l) - f^-(z_k, z_m, \dots, z_s, z_n)}. \end{aligned}$$

Из определения обратных разностей следует, что они симметричны относительно последних двух аргументов z_n и z_l . Легко привести примеры функций, когда свойство симметрии обратных разностей относительно остальных аргументов нарушается.

Следует отметить, что в [2] (см., например, также [3], [4]) обратные разности $\rho_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ определяются несколько иначе. При необходимости легко можно перейти от обратных разностей одного вида к другому их виду, а именно

$$\begin{aligned} f^-(x_0) &= \rho_0(x_0), \\ f^-(x_0, x_1) &= \rho_1(x_0, x_1), \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00952).

$$f^-(x_0, x_1, \dots, x_n) = \rho_n(x_0, x_1, \dots, x_n) - \rho_{n-2}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

но в изучаемых ниже вопросах более естественным образом подходит приводимое выше определение обратных разностей.

Рассмотрим следующую задачу: для попарно различных узлов $z_0, z_1, \dots, z_n$, $n = 0, 1, \dots$, и заданных в них значений $y_0, y_1, \dots, y_n$ найти рациональную функцию в виде непрерывной дроби

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_1}{b_2} + \dots + \frac{z - z_{n-1}}{b_n} \quad (1)$$

с константами $b_0, b_1, \dots, b_n$, для которой выполняются равенства

$$\frac{P_n(z_\nu)}{Q_n(z_\nu)} = y_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Ясно, что рациональная функция $P_n(z)/Q_n(z)$ является подходящей дробью n -го порядка непрерывной дроби Тиле

$$b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_1}{b_2} + \dots$$

2. Рациональные интерполяции и остатки. В работе рассмотрены вопросы существования интерполяционных рациональных функций в виде подходящих дробей непрерывной дроби Тиле, а также получено выражение остатка для таких рациональных интерполяций. Эти вопросы сходны с многоточечными аппроксимациями Паде. В качестве предельного случая получено выражение остатка для диагональных аппроксимаций Паде в нуле, а также достаточно простое выражение для точного значения остатка в случае функции $\sqrt{1+z}$.

Следующее утверждение дает необходимое условие существования такой интерполяционной рациональной функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t_0, t_1, \dots, t_n$, $n = 0, 1, \dots$, — заданная система попарно различных узлов, в которых определена функция $f(z)$. Если для рациональной функции $R(z)$ с $2 \deg(R) \leq n$ выполняются равенства

$$R(t_\nu) = f(t_\nu), \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \quad (3)$$

то существует такая перестановка $z_0, z_1, \dots, z_n$ узлов $t_0, t_1, \dots, t_n$, что выполняется равенство

$$R(z) = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_1}{b_2} + \dots + \frac{z - z_{k-1}}{b_k}, \quad (4)$$

в котором $k \leq n$, значения $b_j = f^-(z_0, z_1, \dots, z_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$, и

$$f^-(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, t_j) = f^-(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k)$$

для всех, возможно, оставшихся $t_j \neq z_m$, $m = 0, 1, \dots, k$; более того, при $m = 1, 2, \dots, k-1$ для

$$S_m(z) = b_m + \frac{z - z_m}{b_{m+1}} + \frac{z - z_{m+1}}{b_{m+2}} + \dots + \frac{z - z_{k-1}}{b_k}$$

выполняется неравенство

$$S_m(z_{m-1}) \neq 0. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточность условий (4) и (5) для существования интерполяционной рациональной функции в виде подходящей дроби непрерывной дроби Тиле отмечается, например, у Джоунса и Трона (см. [1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n)$, то возьмем $z_j = t_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, и получим требуемое разложение в виде

$$R(z) = b_0 \quad \text{с} \quad b_0 = f^-(z_0) = f(z_0).$$

В противном случае возьмем $z_0 = t_0$, а через z_1 обозначим любое t_j такое, что $f(z_0) \neq f(t_j)$. Тогда существует отличная от нуля обратная разность

$$f^-(z_0, z_1) = \frac{z_1 - z_0}{f(z_1) - f(z_0)}.$$

Если получится тождество

$$R(z) \equiv f(z_0) + \frac{z - z_0}{f^-(z_0, z_1)},$$

то это и будет искомым разложением вида (4). В противном случае среди оставшихся после выбора z_0, z_1 узлов t_j возьмем такой z_2 , что $f^-(z_0, z_2) \neq f^-(z_0, z_1)$. Тогда существует отличная от нуля обратная разность

$$f^-(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_2 - z_1}{f^-(z_0, z_2) - f^-(z_0, z_1)}.$$

Если она приводит к тождеству

$$R(z) \equiv f(z_0) + \frac{z - z_0}{f^-(z_0, z_1)} + \frac{z - z_1}{f^-(z_0, z_1, z_2)},$$

то оно и будет разложением вида (4); в противном случае продолжим этот процесс аналогично предыдущему шагу.

В результате через некоторое конечное число $k \leq n$ шагов мы придем к разложению $R(x)$ в виде (4). Дело в том, что в силу условия (3) имеем равенство

$$R^-(z_0, z_1, \dots, z_j) = f^-(z_0, z_1, \dots, z_j)$$

при всех $j = 0, 1, \dots, k$, а также при $j = k$ и замене z_k на любой узел $t_m \notin \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$; тогда равенство (4) с $b_j = R^-(z_0, z_1, \dots, z_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$, очевидно, также имеет место (в силу совпадения двух рациональных функций $R(x)$ и

$$R(z_0) + \frac{z - z_0}{R^-(z_0, z_1)} + \dots + \frac{z - z_{k-1}}{R^-(z_0, z_1, \dots, z_k)}$$

в достаточном числе точек – во всех узлах; их число $n + 1 \geq 2 \deg(R) + 1$).

Для доказательства условия (5) заметим, что

$$S_m(z) = b_m + \frac{z - z_m}{S_{m+1}(z)}, \quad m = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Используя эти равенства и определение обратных разностей рациональной функции $R(z)$, по индукции легко устанавливаются равенства

$$\frac{R^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z) - R^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z_{m-1})}{z - z_{m-1}} = \frac{1}{S_m(z)}, \quad m = 1, 2, \dots, k-1,$$

причем по построению обратная разность $R^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z)$ представляет собой некоторую рациональную функцию, непрерывную в точке z_{m-1} . Тогда производная функции $R^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z)$ в точке z_{m-1} конечна, а значит, $S_m(z_{m-1}) \neq 0$.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко показать, что условие существования всех обратных разностей $f^-(z_0, z_1, \dots, z_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, не гарантирует существования для $f(z)$ интерполяционной рациональной функции в виде непрерывной дроби (1).

Действительно, пусть x_0, x_1, x_2 – попарно различные действительные числа и пусть $f(x)$ – некоторая конечная функция такая, что $f(x_0) \neq f(x_1) = f(x_2)$. Тогда легко показать, что

$$f^-(x_0, x_1) \neq 0, \quad f^-(x_0, x_1, x_2) = f(x_1) - f(x_0) \neq 0.$$

При этом рациональная функция

$$r(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{f^-(x_0, x_1)} + \frac{x - x_1}{f^-(x_0, x_1, x_2)}$$

является интерполяционной в узлах x_1 и x_2 , но не является таковой в узле x_0 . В самом деле, после тождественных преобразований (доопределив $r(x)$ в точке x_0 по непрерывности) получим $r(x) \equiv f(x_1) \neq f(x_0)$.

Заметим также, что в этом примере условие (5) не выполняется:

$$f^-(x_0, x_1) + \frac{x_0 - x_1}{f^-(x_0, x_1, x_2)} = 0.$$

Всюду ниже считаем, как обычно, значение произведения $\prod_{\nu=k}^m a_\nu(z)$ условно равным 1, если $m < k$.

Следующее утверждение дает выражение остатка от замены функции ее интерполяционной рациональной функцией в виде подходящей дроби непрерывной дроби Тиле. В случае аналитических функций эта задача решается, как известно, с помощью интегральной формулы Коши.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(z)$ определена в попарно различных узлах $z_0, z_1, \dots, z_n$, $n = 0, 1, \dots$, и в точке z , отличной от узлов, и для рациональной функции $R(z) = P_k(z)/Q_k(z)$ с $2 \deg(R) \leq n$ вида (4) выполняются равенства (3). Тогда выполняется равенство

$$f(z) - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} = \frac{\prod_{\nu=0}^k (z - z_\nu)}{f^-(z_0, z) \sum_{m=0}^k (-1)^m \prod_{\nu=m+1}^k (z - z_\nu)} \times \frac{1}{\prod_{\nu=1}^m f^-(z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}, z) f^-(z_0, z_1, \dots, z_\nu, z)}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости

$$b_j = f^-(z_0, z_1, \dots, z_j), \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad k \leq n,$$

и при $m = 0, 1, \dots, k$ рассмотрим два вида подходящих дробей, а именно

$$\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \dots + \frac{z - z_{m-1}}{b_m}, \quad (7)$$

$$\frac{A_{m+1}(z)}{B_{m+1}(z)} = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \dots + \frac{z - z_{m-1}}{b_m} + \frac{z - z_m}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)}. \quad (8)$$

Из определения обратных разностей легко увидеть, что при всех $m = 0, 1, \dots, k$ выполняется равенство

$$\frac{A_{m+1}(z)}{B_{m+1}(z)} = f(z).$$

С другой стороны, по фундаментальным тождествам для числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывных дробей (7) и (8) при $m = 1, 2, \dots, k$ имеем

$$\begin{aligned} A_{m+1}(z) &= f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)P_m(z) + (z - z_m)P_{m-1}(z), \\ B_{m+1}(z) &= f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)Q_m(z) + (z - z_m)Q_{m-1}(z). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом предыдущего равенства, получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)P_m(z) + (z - z_m)P_{m-1}(z)}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)Q_m(z) + (z - z_m)Q_{m-1}(z)}, \\ f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z) &= -\frac{(z - z_m)f(z)Q_{m-1}(z) - (z - z_m)P_{m-1}(z)}{f(z)Q_m(z) - P_m(z)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $m = 1, 2, \dots, k$ имеем

$$\frac{f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}}{f(z) - \frac{P_{m-1}(z)}{Q_{m-1}(z)}} = -\frac{z - z_m}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)} \cdot \frac{Q_{m-1}(z)}{Q_m(z)}. \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} &= \frac{f(z) - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}}{f(z) - \frac{P_{k-1}(z)}{Q_{k-1}(z)}} \cdot \frac{f(z) - \frac{P_{k-1}(z)}{Q_{k-1}(z)}}{f(z) - \frac{P_{k-2}(z)}{Q_{k-2}(z)}} \dots \frac{f(z) - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}}{f(z) - \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}} \cdot \left(f(z) - \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \right) \\ &= (-1)^k \frac{(z - z_k)(z - z_{k-1}) \dots (z - z_1)}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_k, z)f^-(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z) \dots f^-(z_0, z_1, z)} \\ &\quad \times (f(z) - f(z_0)) \cdot \frac{Q_{k-1}(z)}{Q_k(z)} \cdot \frac{Q_{k-2}(z)}{Q_{k-1}(z)} \dots \frac{Q_0(z)}{Q_1(z)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(z) - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} = (-1)^k \frac{(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_k)}{f^-(z_0, z)f^-(z_0, z_1, z) \dots f^-(z_0, z_1, \dots, z_k, z)} \cdot \frac{1}{Q_k(z)}. \quad (10)$$

Из (8) следует, что $P_m(z)/Q_m(z)$ и $f(z) = A_{m+1}(z)/B_{m+1}(z)$ являются подходящими дробями порядков m и $m+1$ соответственно непрерывной дроби (8). Поэтому

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{A_{m+1}(z)}{B_{m+1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = (-1)^m \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m)}{B_{m+1}(z)Q_m(z)}. \quad (11)$$

Сравнивая равенства (10) и (11), при $m = 0, 1, \dots, k$ получим

$$B_{m+1}(z) = f^-(z_0, z)f^-(z_0, z_1, z) \cdots f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z). \quad (12)$$

Далее, из равенств

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m)Q_{m-1}(z) + (z - z_{m-1})Q_{m-2}(z), \\ B_m(z) &= f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z)Q_{m-1}(z) + (z - z_{m-1})Q_{m-2}(z), \end{aligned}$$

почленно вычитая, находим

$$Q_m(z) = B_m(z) - (f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z) - f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m))Q_{m-1}(z),$$

т.е.

$$Q_m(z) = B_m(z) - \frac{z - z_m}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)} Q_{m-1}(z).$$

Умножая обе части последнего равенства на $B_{m+1}(z)$ и учитывая равенство (12), получим

$$B_{m+1}(z)Q_m(z) = B_{m+1}(z)B_m(z) - (z - z_m)B_m(z)Q_{m-1}(z). \quad (13)$$

Последовательно применив равенство (13) при $m = k, k-1, \dots, 1$, находим

$$\begin{aligned} B_{k+1}(z)Q_k(z) &= B_{k+1}(z)B_k(z) - (z - z_k)B_k(z)B_{k-1}(z) + (z - z_k)(z - z_{k-1})B_{k-1}(z)B_{k-2}(z) - \cdots \\ &\quad + (-1)^k(z - z_k)(z - z_{k-1}) \cdots (z - z_1)B_1(z)Q_0(z), \end{aligned}$$

причем $Q_0(z) = 1$. Отсюда и из равенства (11) получим

$$\begin{aligned} \left(f(z) - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}\right)^{-1} &= (-1)^k \frac{B_{k+1}(z)Q_k(z)}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_k)} \\ &= (-1)^k \frac{B_{k+1}(z)B_k(z)}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_k)} \\ &\quad + (-1)^{k-1} \frac{B_k(z)B_{k-1}(z)}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{k-1})} + \cdots + \frac{B_1(z)}{z - z_0}. \quad (14) \end{aligned}$$

Преобразуем теперь слагаемые в правой части равенства (14). В силу равенства (12) имеем при $m = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} &\frac{B_{m+1}(z)B_m(z)}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m)} \\ &= \frac{(f^-(z_0, z)f^-(z_0, z_1, z) \cdots f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z))^2 f^-(z_0, z_1, \dots, z_m, z)}{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m)} \end{aligned}$$

$$= \frac{f^-(z_0, z) \prod_{\nu=1}^m f^-(z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}, z) f^-(z_0, z_1, \dots, z_{\nu}, z)}{\prod_{\nu=0}^m (z - z_{\nu})}$$

и

$$\frac{B_1(z)}{z - z_0} = \frac{f^-(z_0, z)}{z - z_0}.$$

Для завершения доказательства остается подставить полученные значения в (14). Теорема 2 доказана.

3. Приложения к аппроксимациям Паде. Рассмотрим теперь случай, когда все узлы интерполирования совпадают между собой.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z = 0$ комплексной плоскости и пусть для произвольных $z_0, z_1, \dots, z_n$ из этой окрестности определена обратная разность $f^-(z_0, z_1, \dots, z_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Для краткости введем обозначения предела и повторных пределов следующих видов:

$$\begin{aligned} Lf^-(0, 0, \dots, 0, z_k, \dots, z_n) &= \lim_{z_{k-1} \rightarrow 0} \lim_{z_{k-2} \rightarrow 0} \dots \lim_{z_0 \rightarrow 0} f^-(z_0, z_1, \dots, z_n), \\ f_n^- &= Lf^-(0, 0, \dots, 0) = \lim_{z_n \rightarrow 0} \lim_{z_{n-1} \rightarrow 0} \dots \lim_{z_0 \rightarrow 0} f^-(z_0, z_1, \dots, z_n), \\ f_n^-(z) &= Lf^-(0, 0, \dots, 0, z) = \lim_{z_{n-1} \rightarrow 0} \lim_{z_{n-2} \rightarrow 0} \dots \lim_{z_0 \rightarrow 0} f^-(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z) \end{aligned}$$

(z – произвольная точка из рассматриваемой окрестности нуля, $f_0^-(z) = f(z)$).

Значит, при каждом n ($n = 0, 1, \dots$) выполняется равенство

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_n^-(z) = f_n^-,$$

а поэтому при условии существования $f_n^- \neq 0$ существует $\lim_{z \rightarrow 0} f_n^-(z) \neq 0$.

В принятых выше обозначениях имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть для функции $f(z)$, определенной в некоторой окрестности G нуля $z = 0$, существуют отличные от нуля предельные значения обратных разностей в нуле $f_0^-, f_1^-, \dots, f_n^-, \dots$ и пусть $P_n(z)/Q_n(z)$ – подходящая дробь порядка n ($n = 0, 1, \dots$) непрерывной дроби

$$f_0^- + \frac{z}{f_1^-} + \frac{z}{f_2^-} + \dots + \frac{z}{f_n^-} + \dots \quad (15)$$

Тогда при каждом n , $n = 0, 1, \dots$, в каждой точке $z \in G$, в которой существует отличное от нуля значение $f_{n+1}^-(z)$, выполняется равенство

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{z^{n+1}}{f_1^-(z) \sum_{m=0}^n (-1)^m z^{n-m} \prod_{\nu=1}^m f_{\nu}^-(z) f_{\nu+1}^-(z)}. \quad (16)$$

Непосредственно из равенства (16) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3 выполняется соотношение эквивалентности

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \sim (-1)^n \frac{f(0)}{\prod_{\nu=0}^n f_{\nu}^- f_{\nu+1}^-} z^{n+1}, \quad z \rightarrow 0. \quad (17)$$

Отметим также, что при любом $m = 0, 1, \dots$ у подходящей дроби $P_{2m}(z)/Q_{2m}(z)$ порядка $2m$ непрерывной дроби (15) числитель $P_{2m}(z)$ и знаменатель $Q_{2m}(z)$ – полиномы относительно z степени m , а у подходящей дроби $P_{2m+1}(z)/Q_{2m+1}(z)$ порядка $2m + 1$ числитель $P_{2m+1}(z)$ – полином степени $m + 1$, а знаменатель $Q_{2m+1}(z)$ – полином степени m .

Следовательно, из соотношения (17) вытекает, что последовательности $P_{2m}(z)/Q_{2m}(z)$ и $P_{2m+1}(z)/Q_{2m+1}(z)$ подходящих дробей четных и нечетных порядков непрерывной дроби (15) в условиях теоремы 3 представляют собой соответственно диагональную $\pi_{m,m}(z; f)$ и наддиагональную $\pi_{m+1,m}(z; f)$ последовательности аппроксимаций Паде функции $f(z)$ относительно точки $z = 0$; при этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_{m,m}(z; f) &\sim \frac{f(0)}{\prod_{\nu=0}^{2m} f_{\nu}^{-} f_{\nu+1}^{-}} z^{2m+1}, & z \rightarrow 0, \\ f(z) - \pi_{m+1,m}(z; f) &\sim -\frac{f(0)}{\prod_{\nu=0}^{2m+1} f_{\nu}^{-} f_{\nu+1}^{-}} z^{2m+2}, & z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если определить обратные производные как обычно (см., например, [5]), полагая

$$\begin{aligned} r_0 f(x) &= f(x), & r f(x) &= r_1 f(x) = \frac{1}{f'(x)}, \\ r_n f(x) &= n r r_{n-1} f(x) + r_{n-2} f(x), & n &= 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

то из соотношений между обратными разностями легко вытекают равенства

$$f_0^{-}(0) = r_0 f(0) = f(0), \quad f_n^{-} = n r r_{n-1} f(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Значит, теорему 3 можно формулировать и в терминах обратных производных, точнее, значений $n r r_{n-1} f(0)$ вместо f_n^{-} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для произвольного m ($m = 0, 1, \dots, n$) возьмем попарно различные и отличные от нуля точки $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ и z из области G . Тогда равенство (6) при $k = n$ можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= \frac{\prod_{\nu=0}^n (z - z_{\nu})}{f^{-}(z_0, z) \sum_{m=0}^n (-1)^m \prod_{\nu=m+1}^n (z - z_{\nu})} \\ &\times \frac{1}{\prod_{\nu=1}^m f^{-}(z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}, z) f^{-}(z_0, z_1, \dots, z_{\nu}, z)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Переходя в равенстве (18) к повторному пределу последовательно при $z_0 \rightarrow 0, z_1 \rightarrow 0, \dots, z_n \rightarrow 0$, получим (для новой подходящей дроби $P_n(z)/Q_n(z)$ мы сохраняем прежнее обозначение) требуемое в теореме 3 равенство (16).

4. Примеры. В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим регулярную в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменную z с исключенным лучом $-\infty < \operatorname{Re} z \leq -1$ ветвь функции $f(z) = \sqrt{1+z}$ с $f(0) = 1$ и различные комплексные числа $z_0, z_1, \dots, z_n$, не принадлежащие лучу $(-\infty, -1] \subset \mathbb{C}$.

Используя определение обратных разностей $f^{-}(z_0, z_1, \dots, z_k)$, приведенное выше, легко найти

$$f^{-}(z_m) = f(z_m) = \sqrt{1+z_m}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

$$\begin{aligned}
f^-(z_k, z_m) &= \frac{z_m - z_k}{f^-(z_m) - f^-(z_k)} = \frac{z_m - z_k}{\sqrt{1+z_m} - \sqrt{1+z_k}} \\
&= \sqrt{1+z_m} + \sqrt{1+z_k}, \quad k \neq m, \quad k, m = 1, 2, \dots, n, \\
f^-(z_0, z_1, z_2) &= \frac{z_2 - z_1}{f^-(z_0, z_2) - f^-(z_0, z_1)} \\
&= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1+z_2} + \sqrt{1+z_0} - (\sqrt{1+z_1} + \sqrt{1+z_0})} \\
&= \sqrt{1+z_2} + \sqrt{1+z_1}, \dots, \\
f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m) &= \frac{z_m - z_{m-1}}{f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z_m) - f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-2}, z_{m-1})} \\
&= \sqrt{1+z_m} + \sqrt{1+z_{m-1}}, \\
f^-(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z) &= \sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_{m-1}}, \quad m = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Подставляя теперь в равенство (6) найденные значения обратных разностей, получим

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\prod_{\nu=0}^n (z - z_\nu)}{Q},$$

где

$$\begin{aligned}
Q &:= (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_0}) \left(\prod_{\nu=1}^n (z - z_\nu) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^n (-1)^m \prod_{\nu=m+1}^n (z - z_\nu) \prod_{\nu=1}^m (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_{\nu-1}})(\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_\nu}) \right) \\
&= (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_0}) \prod_{\nu=1}^n (z - z_\nu) \\
&\quad + \sum_{m=1}^n (-1)^m (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_m}) \prod_{\nu=m+1}^n (z - z_\nu) \prod_{\nu=0}^{m-1} (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_\nu})^2.
\end{aligned}$$

Значит, если $z \notin (-\infty, -1] \subset \mathbb{C}$, то выполняется равенство

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+z} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= \frac{\prod_{\nu=0}^n (z - z_\nu)}{\sum_{m=0}^n (-1)^m (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_m})} \\
&\quad \times \frac{1}{\prod_{\nu=m+1}^n (z - z_\nu) \prod_{\nu=0}^{m-1} (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_\nu})^2}; \quad (19)
\end{aligned}$$

здесь считаем, как обычно, значения произведения $\prod_{\nu=m+1}^n (z - z_\nu)$ при $m+1 > n$ и произведения $\prod_{\nu=0}^{m-1} (\sqrt{1+z} + \sqrt{1+z_\nu})^2$ при $m-1 < 0$ условно равными 1.

Если применить теорему 3 в качестве примера снова к регулярной в окрестности нуля ветви функции $f(z) = \sqrt{1+z}$ с $f(0) = 1$, то из равенства (19), что то же, из равенства (16) получим при любом комплексном z , не принадлежащем лучу $(-\infty, -1]$, равенство

$$\sqrt{1+z} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{z^{n+1}}{\sum_{m=0}^n (-1)^m z^{n-m} (1 + \sqrt{1+z})^{2m+1}};$$

при этом имеет место следующее соотношение эквивалентности:

$$\sqrt{1+z} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \sim (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}} z^{n+1}, \quad z \rightarrow 0;$$

здесь $P_n(z)/Q_n(z)$ – подходящая дробь порядка n , $n = 0, 1, \dots$, непрерывной дроби

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + \dots + \frac{z}{2} + \dots.$$

Значит, для аппроксимаций Паде функции $f(z) = \sqrt{1+z}$ относительно точки $z = 0$ для любого $m = 0, 1, \dots$ и любой точки $z \in \mathbb{C}$, не принадлежащей лучу $(-\infty; -1]$, выполняется равенство

$$\sqrt{1+z} - \pi_{m,m}(z; \sqrt{1+\zeta}) = \frac{z^{2m+1}}{\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k z^{2m-k} (1 + \sqrt{1+z})^{2k+1}}.$$

Пусть α – произвольное нецелое число и $f(z) = (1+z)^\alpha$ – регулярная в окрестности точки $z = 0$ ветвь с $f(0) = 1$. Тогда легко подсчитать, что $f_0^- f_1^- = 1/\alpha$ и при $k = 1, 2, \dots$ имеем равенства

$$f_{2k-1}^- f_{2k}^- = \frac{2(2k-1)}{k-\alpha}, \quad f_{2k}^- f_{2k+1}^- = \frac{2(2k+1)}{k+\alpha}.$$

Следовательно, применив (17), при $m = 1, 2, \dots$ получим соотношение

$$\begin{aligned} & (1+z)^\alpha - \pi_{m,m}(z; (1+\zeta)^\alpha) \\ & \sim \frac{\alpha(m!)^2}{2^{2m}(2m-1)!!(2m+1)!!} \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) \cdot z^{2m+1}, \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(ср. с [6], где рассмотрен случай $(1+z)^\alpha$ и получено асимптотическое равенство при $m \rightarrow \infty$ другим путем).

Аналогичное соотношение получаем и для $(m+1, m)$ -аппроксимаций Паде этой же функции:

$$\begin{aligned} & (1+z)^\alpha - \pi_{m+1,m}(z; (1+\zeta)^\alpha) \\ & \sim -\frac{\alpha(m+1-\alpha)(m!)^2}{2^{2m+1}((2m+1)!!)^2} \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) \cdot z^{2m+2} \quad (z \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Применим теперь теорему 3 к функции $f(z) = e^z$. Для нее легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} f_0^- &= 1, \\ f_{2k}^- &= (-1)^k 2, \quad k = 1, \dots, \\ f_{2k+1}^- &= (-1)^k (2k+1), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если теперь через $P_n(z)/Q_n(z)$ обозначить подходящую дробь порядка n , $n = 0, 1, \dots$, соответствующей непрерывной дроби

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z}{-2} + \frac{z}{-3} + \dots + \frac{z}{(-1)^k 2} + \frac{z}{(-1)^k (2k+1)} + \dots,$$

то по соотношению (17) получим

$$e^z - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \sim (-1)^n \frac{1}{\prod_{\nu=0}^n f_{\nu}^{-} f_{\nu+1}^{-}} z^{n+1} \quad (z \rightarrow 0).$$

Отсюда для (m, m) - и $(m+1, m)$ -аппроксимаций Паде функции e^z относительно точки $z = 0$ имеем соотношения:

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{m,m}(z; e^{\zeta}) &\sim (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(2m-1)!!(2m+1)!!} z^{2m+1}, & z \rightarrow 0, \\ e^z - \pi_{m+1,m}(z; e^{\zeta}) &\sim (-1)^{m+1} \frac{1}{2^{2m+1}((2m+1)!!)^2} z^{2m+2}, & z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(ср. с [7], где получено асимптотическое равенство при $m \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ другим путем).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] У. Джоунс, В. Трон, *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*, Мир, М., 1985.
- [2] T. N. Thiele, “Bemärkninger om periodiske Kjædebrøkers Konvergens”, *Zeuthen Tidsskr.* (4), **3** (1879).
- [3] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде. Ч. 1. Основы теории. Ч. 2. Обобщения и приложения*, Мир, М., 1986.
- [4] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы*, Наука, М., 1970.
- [5] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Grundlehren Math. Wiss., **13**, Springer, Berlin, 1924.
- [6] В. К. Дзядык, Л. И. Филозоф, “О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций”, *Матем. сб.*, **107**:3 (1978), 347–363.
- [7] Y. L. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*, Math. Sci. Eng., **53**, Academic Press, New York, London, 1969.

А. К. Рамазанов

Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

E-mail: akramazanov@mail.ru

Поступило

14.02.2013

Исправленный вариант

20.09.2013