Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бердников, А. М. Райгородский, О хроматическом числе евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 790–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:40:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О хроматическом числе евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями

А. В. Бердников, А. М. Райгородский

1. Введение. Хроматическим числом $\chi(\mathbb{R}^n; a_1, \dots, a_k)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с k запрещенными расстояниями $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+$ называется минимальное количество цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы расстояние между любыми двумя одноцветными точками не было равно ни одному из чисел $a_1, \dots, a_k$, т.е.

$$\chi(\mathbb{R}^n; a_1, \dots, a_k) = \min\{\chi \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n = \Omega_1 \sqcup \dots \sqcup \Omega_\chi, \\ \forall i \in \{1, \dots, \chi\} \forall x, y \in \Omega_i \quad |x - y| \notin \{a_1, \dots, a_k\}\}.$$

Задача нахождения хроматического числа при $k = 1$ и $n = 2$ была поставлена Э. Нелсоном и Г. Хадвигером на рубеже 40-х и 50-х годов XX века. Большое число работ [1]–[5] посвящено исследованию числа

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k} \chi(\mathbb{R}^n; a_1, \dots, a_k).$$

В частности, существуют асимптотические оценки числа $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$ при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$. В 2000 г. Райгородским была опубликована [6] оценка

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (1, 239 \dots + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (1)$$

(т.е. существует бесконечно малая последовательность действительных чисел $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, для которой при любом натуральном n выполнено неравенство $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (1, 239 \dots + \delta_n)^n$).

В 2009 г. Горская, Митричева, Протасов и Райгородский опубликовали [7] способ нахождения нижних асимптотических оценок величины $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$ вида

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) \geq (\zeta_k + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

при любом натуральном k .

В данной работе описывается способ получения новых нижних асимптотических оценок величины $\chi(\mathbb{R}^n; 1, a)$.

2. Метод получения новых оценок. Хроматическим числом графа $G = (V, E)$ называется наименьшее количество цветов, в которые можно так раскрасить вершины графа, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром. Множество вершин $U \subseteq V$ называется *независимым множеством* графа G , если между вершинами из этого множества нет ни одного ребра. Мощность наибольшего независимого множества графа G называется *числом независимости* этого графа и обозначается $\alpha(G)$. Если $\alpha(G)$ конечно, хроматическое число графа G удобно оценивать снизу с помощью неравенства $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$.

Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_k$ – различные положительные числа. Введем обозначение $G(V; a_1, \dots, a_k)$ для графа на вершинах из множества V , в котором инцидентны те и только те пары вершин, расстояние между которыми равно одному из чисел $a_1, \dots, a_k$, т.е.

$$G(V; a_1, \dots, a_k) = (V, E), \quad \text{где} \quad E = \{\{x, y\} \subseteq V : |x - y| \in \{a_1, \dots, a_k\}\}$$

(такие графы называются *дистанционными*). Для любого $V \subseteq \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n; a_1, \dots, a_k) \geq \chi(G(V; a_1, \dots, a_k)), \quad (2)$$

поэтому дистанционные графы используются при оценке хроматического числа пространства.

Хроматические числа конечных дистанционных графов обладают следующим свойством.

ЛЕММА. Пусть V – конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$; $a_1, \dots, a_{2k}$ – различные положительные числа. Определим графы $G, G_1, \dots, G_k$ следующим образом:

$$G = G(V; a_1, \dots, a_{2k}),$$

и

$$G_1 = G(V; a_1, a_2),$$

$$G_2 = G(V; a_3, a_4),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$G_k = G(V; a_{2k-1}, a_{2k}).$$

Тогда $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2) \cdots \chi(G_k) \geq |V|/\alpha(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества $V_1, \dots, V_k \subseteq V$: пусть V_1 – наибольшее независимое множество графа G_1 , и пусть V_i – наибольшее независимое множество графа $G_i|_{V_{i-1}}$, $i = 2, \dots, k$. Заметим, что для каждого i расстояние между любой парой вершин из V_i не равно ни одному из чисел $a_1, \dots, a_{2i}$. Отсюда следует, что $|V_k| \leq \alpha(G)$.

Теперь мы можем произвести необходимую оценку произведения хроматических чисел графов $G_1, \dots, G_k$:

$$\begin{aligned} \chi(G_1) \cdot \chi(G_2) \cdots \chi(G_k) &\geq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2|_{V_1}) \cdots \chi(G_k|_{V_{k-1}}) \geq \frac{|V|}{\alpha(G_1)} \frac{|V_1|}{\alpha(G_2|_{V_1})} \cdots \frac{|V_{k-1}|}{\alpha(G_k|_{V_{k-1}})} \\ &= \frac{|V|}{|V_1|} \frac{|V_1|}{|V_2|} \cdots \frac{|V_{k-1}|}{|V_k|} = \frac{|V|}{|V_k|} \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $a_1, \dots, a_{2k}$ – набор различных положительных чисел. Если для некоторого действительного числа $\zeta_{2k} > 1$ существует последовательность графов $\{G_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} G_n &= G(V_n; a_1, \dots, a_{2k}), \quad V_n \subset \mathbb{R}^n, \quad |V_n| < \infty, \\ \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} &\geq (\zeta_{2k} + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

то найдутся число $i \in \{1, \dots, k\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, для которых выполнено асимптотическое неравенство

$$\chi(G(V_{n_j}; a_{2i-1}, a_{2i})) \geq (\sqrt[k]{\zeta_{2k}} + o(1))^{n_j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Применяя лемму, получаем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $i \in \{1, \dots, k\}$, что

$$\chi(G(V_n; a_{2i-1}, a_{2i})) \geq \sqrt[k]{\frac{|V_n|}{\alpha(G_n)}}. \quad (4)$$

Очевидно, для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$ найдется бесконечно много чисел n , для которых выполняется неравенство (4). Это означает, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, для которой при любом j выполнено неравенство

$$\chi(G(V_{n_j}; a_{2i-1}, a_{2i})) \geq \sqrt[k]{\frac{|V_{n_j}|}{\alpha(G_{n_j})}}.$$

Учитывая формулу (3), получаем требуемую оценку:

$$\chi(G(V_{n_j}; a_{2i-1}, a_{2i})) \geq (\zeta_{2k} + o(1))^{n_j/k} = (\sqrt[k]{\zeta_{2k}} + o(1))^{n_j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если выполняется условие теоремы, в силу неравенства (2) мы можем утверждать, что среди пар $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2k-1}, a_{2k}\}$ существует пара $\{a_{2i-1}, a_{2i}\}$, для которой найдется бесконечный набор размерностей $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ ($n_{j+1} > n_j$), в которых выполнено асимптотическое неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^{n_j}; a_{2i-1}, a_{2i}) \geq (\sqrt[k]{\zeta_{2k}} + o(1))^{n_j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это и есть наша новая оценка.

3. Применение метода. В статье Горской, Митричевой, Протасова и Райгородского [7] описан метод нахождения наиболее оптимальных чисел ζ_k , для которых существует последовательность графов $\{G_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям

$$G_n = (V_n; \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{k}), \quad V_n \subset \mathbb{R}^n, \quad |V_n| < \infty, \\ \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} \geq (\zeta_k + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, кроме того, вычислены значения ζ_k при малых k .

Итак, чтобы получить новую оценку с помощью метода, описанного в настоящей работе, мы разбиваем множество $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2k}\}$ на произвольные пары $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2k-1}, a_{2k}\}$. Согласно теореме из предыдущего раздела, среди чисел

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad \dots, \quad b_k = \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}$$

есть такое число b_i , что для него найдется последовательность размерностей $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, где $n_{j+1} > n_j$, в которых выполнено асимптотическое неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^{n_j}; 1, b_i) \geq (\sqrt[k]{\zeta_{2k}} + o(1))^{n_j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Результаты, которые удается получить для $k = 2, 3$, перечислены в таблице (оптимальные значения для ζ_k взяты из вышеупомянутой статьи [7]).

Отметим, что в таблице нет наборов чисел $\{b_1, \dots, b_k\}$, содержащих число $b_i = \sqrt{2}$, так как известна [4] оценка

$$\chi(\mathbb{R}^n; 1, \sqrt{2}) \geq (1.465 \dots + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, наш метод в таких случаях дает тривиальный результат.

ТАБЛИЦА

k	ζ_{2k}	$\sqrt[k]{\zeta_{2k}}$	$b_1, \dots, b_k$
2	1.848...	1.359...	$2, \sqrt{3/2}$
3	2.165...	1.293...	$\sqrt{3}, \sqrt{5/2}, \sqrt{3/2}$ $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5/2}$ $2, \sqrt{3}, \sqrt{5/3}$ $\sqrt{5}, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}$ $\sqrt{5}, \sqrt{3}, 2/\sqrt{3}$ $\sqrt{6}, \sqrt{3/2}, \sqrt{5/2}$ $\sqrt{6}, \sqrt{5/2}, 2/\sqrt{3}$

Результаты, которые получаются для $k = 4$, не включены в таблицу, поскольку их количество довольно велико (больше сорока).

Кроме того, наилучшее известное значение ζ_{10} равно $2.691\dots$; следовательно, выполняется неравенство $\sqrt[5]{\zeta_{10}} \leq 1.239\dots$. Но в силу неравенства (1) для любого $a \in \mathbb{R}_+$ мы имеем оценку

$$\chi(\mathbb{R}^n; 1, a) \geq \chi(\mathbb{R}^n; 1) = \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (1.239\dots + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

поэтому наш метод при $k = 5$ (и больших значениях) уже дает лишь тривиальные результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146. [2] А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, **408**:5 (2006), 601–604. [3] Н. Г. Моцевитин, А. М. Райгородский, *Матем. заметки*, **81**:5 (2007), 733–743. [4] И. М. Шитова, *Докл. РАН*, **413**:2 (2007), 178–180. [5] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142. [6] А. М. Райгородский, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148. [7] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22.

А. В. Бердников

Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.

Поступило

29.05.2014

А. М. Райгородский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: mraigor@yandex.ru