Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. С. Мышаков, Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 794–798

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:11:00

Аналог теоремы Валирона–Гольдберга при ограничении на усредненную считающую функцию множества корней

Ф. С. Мышаков

1. Введение. Сто лет назад Валирон [1] рассмотрел следующую задачу. Имеется целая функция f конечного нецелого порядка. Задана “достаточно регулярная” $n_f(R)$ – количество корней f в круге $|z| \leq R$. Требуется найти возможно лучшую асимптотическую оценку сверху величины $\ln M(f, R)$, где

$$M(f, R) = \max_{|z| \leq R} |f(z)|.$$

Эта задача в “первом приближении” была решена самим Валироном в [1], а позже Гольдберг [2] дал строгое доказательство этого результата и установил его неумлучшаемость. Дальнейшее продвижение в этой тематике было недавно получено Поповым [3]. В данной статье решена аналогичная задача, в которой задана мажоранта усредненной считающей функции множества ненулевых корней $f(z)$:

$$N_f(R) = \int_0^R \left(\frac{n_f^0(x)}{x} \right) dx,$$

где $n_f^0(x) = n_f(x) - m$, m – кратность корня $f(z)$ в точке $z = 0$.

Величина $N_f(R)$ более тесно, чем $n_f(R)$, связана с асимптотическим поведением логарифма модуля функции f . Согласно формуле Йенсена

$$N_f(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - m \ln R - \ln \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right|$$

при больших R с точностью $O(\ln R)$ совпадает со средним логарифма модуля $f(z)$ на окружности $|z| = R$. В случае $f(0) = 1$ указанное среднее есть в точности $N_f(R)$. Поэтому задача оценки сверху $\ln M(f, R)$ через $N_f(R)$ фактически является задачей оценки сверху максимума функции $\ln |f(Re^{i\varphi})|$ на отрезке $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ через ее среднее на этом отрезке и выглядит нереальной. Но специфика асимптотического поведения логарифма модуля целой функции нецелого порядка такова, что оценка сверху $\ln M(f, R)$ (с некоторым не зависящим от R множителем) через достаточно регулярную мажоранту функции $N_f(R)$ при всех достаточно больших R уже оказывается возможной.

Напомним несколько определений и теорему о факторизации целой функции конечного нецелого порядка [4; (гл. 1)].

Уточненным порядком называется произвольная функция $\rho(r)$, определенная и дифференцируемая на луче $R_0 < r < +\infty$ (число R_0 свое для каждой такой функции) и обладающая следующими свойствами:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho'(r)r \ln r = 0. \quad (1)$$

Верхней плотностью множества корней функции f относительно уточненного порядка $\rho(r)$ называется величина

$$D_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} n_f(r).$$

Усредненной верхней плотностью множества корней функции f относительно уточненного порядка $\rho(r)$ называется величина

$$D_{\rho(r)}^*(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} N_f(r). \quad (2)$$

Известно неулучшаемое с обеих сторон двойное неравенство [4]

$$\rho D_{\rho(r)}^* \leq D_{\rho(r)} \leq e \rho D_{\rho(r)}^*, \quad \text{где } \rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r). \quad (3)$$

Как известно, любая целая функция f нецелого порядка имеет бесконечно много корней; через $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ обозначим множество ее корней, отличных от точки $z = 0$, упорядоченных по неубыванию модулей. Каждый корень стоит в последовательности Λ_f столько раз, какова его кратность. Через f_Λ обозначим каноническое произведение по ненулевым корням целой функции f порядка ρ :

$$f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \text{где } p = [\rho], \quad (4)$$

$$E_0(w) = 1 - w, \quad E_p(w) = (1 - w) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Согласно теореме Адамара сама целая функция f допускает представление

$$f(z) = z^m \exp(\mathcal{P}(z)) f_\Lambda(z), \quad (5)$$

где m – кратность нуля в точке $z = 0$ (множитель z^m отсутствует, если $f(0) \neq 0$), $\mathcal{P}$ – некоторый многочлен степени $\leq p$.

Важную роль в статье играет функция $\mathcal{M}_p(r) = \ln \max_{|w|=r} |E_p(w)|$, исследованная Данжуа [5]. Валирон [1] ввел функцию

$$S(\rho) = \int_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) = \rho \int_0^{+\infty} r^{-\rho-1} \mathcal{M}_p(r) dr, \quad \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad p = [\rho], \quad (6)$$

и доказал, опираясь на теорему А. Данжуа [5] о поведении функции $d\mathcal{M}_p(r)/dr$, сходимость этого несобственного интеграла.

Сформулируем теорему Валирона–Гольдберга.

ТЕОРЕМА А [1], [2]. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, f – произвольная целая функция порядка ρ , множество корней которой имеет конечную верхнюю плотность относительно этого уточненного порядка. Тогда f имеет конечный тип при порядке $\rho(r)$ и справедливо неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq S(\rho) D_{\rho(r)}(f). \quad (7)$$

С другой стороны, существует функция f , имеющая положительный тип при порядке $\rho(r)$, для которой неравенство (7) обращается в равенство.

Этот результат перенесен автором на случай, когда задана усредненная верхняя плотность множества корней.

ТЕОРЕМА 1. В условиях теоремы А справедливо неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq \rho S(\rho) D_{\rho(r)}^*(f). \quad (8)$$

и существует функция f , для которой неравенство (8) обращается в равенство.

Оценка сверху (8) не следует из (7), поскольку согласно (3) D оценивается через ρD^* не сверху, а снизу. Но зато из (3), (7), (8) видно, что если для некоторой функции f неравенство (7) обращается в равенство, то для этой же функции обращается в равенство и неравенство (8).

Неравенство (8) было известно ранее (см. [6; гл. 5, § 3], [7]) при ограничении $0 < \rho < 1$ и лишь в случае $\rho(r) \equiv r$. При этих значениях ρ функция $S(\rho)$ допускает простое выражение: $S(\rho) = \pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)$, но при $\rho > 1$ функция $S(\rho)$ не элементарна. В общем случае теорема 1, по-видимому, является новой.

В статье доказывается более детальный результат. Предполагается, что усредненная считающая функция множества корней допускает оценку сверху

$$N_f(R) \leq r^{\rho(r)} + O(r^a), \quad 0 \leq a < \rho. \quad (9)$$

и из нее выводится асимптотическая оценка сверху $\ln M(f, r)$ с двумя неулучшаемыми слагаемыми.

2. Основные результаты. Сначала рассмотрим уточненные порядки $\rho(r)$, отличающиеся “правильностью” поведения при $r \rightarrow +\infty$. Из определения (1) следует, что если $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho$, то функция $l(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ является медленно меняющейся [8] и справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0. \quad (10)$$

Потребуем, чтобы уточненный порядок удовлетворял следующим условиям:

- 1) функция $l(r)$ монотонна,
- 2) функция $w_l(r) = rl'(r)/l(r)$ также монотонна (она может быть либо положительной, либо отрицательной) и медленно меняется на бесконечности.

Эти условия выполняются, в частности для функций

$$\begin{aligned} l(r) &= \exp(a(\ln r)^b), & a, b \in \mathbb{R}, \quad b < 1, \\ l(r) &= (\ln r)^a (\ln \ln r)^b, & a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть задан уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, удовлетворяющий сформулированным выше условиям 1), 2). Если для усредненной считающей функции множества корней целой функции f порядка ρ выполняется асимптотическая оценка сверху (9), то

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)} (\rho S(\rho) + (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Если для усредненной считающей функции $N(r)$ возрастающей последовательности положительных чисел $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$, выполняется двусторонняя асимптотическая оценка

$$r^{\rho(r)} + O(r^a) \leq N(r) = O(r^\tau), \quad r \rightarrow +\infty,$$

в которой $\tau < [\rho] + 1$, то найдутся числовые последовательности $\varphi_n \in [\pi, \pi)$ и $R_k \rightarrow +\infty$ такие, что для логарифма максимума модуля на окружностях $|z| = R_k$ любой целой функции F , множество всех корней которой есть $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, справедлива асимптотическая оценка снизу

$$\ln M(F, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} (\rho S(\rho) + (\rho S'(\rho) + S(\rho))w_l(R_k) + o(w_l(R_k))), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Теперь рассмотрим произвольный уточненный порядок $\rho(r)$. В этом общем случае от функции l ничего не требуется, кроме выполнения предельного соотношения (10). Возьмем произвольную положительную невозрастающую на некотором луче $(r_0, +\infty)$ функцию $w(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} w(r) = 0$. Введем класс $\mathcal{L}(w)$, состоящий по определению из всех таких медленно меняющихся и дифференцируемых на $(r_0, +\infty)$ функций l , что верно неравенство $|w_l(r)| \leq w(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения класса $\mathcal{L}(w)$ следует, что каков бы ни был уточненный порядок $\rho(r) \rightarrow +\infty$, порождаемая им по формуле $l(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ медленно меняющаяся функция принадлежит одному из классов $\mathcal{L}(w)$, причем функцию w можно взять медленно меняющейся.

Обозначим

$$\begin{aligned} S_1(\rho) &= \int_0^{+\infty} |\ln r| r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r), \\ S_0(\rho) &= \int_0^1 r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) - \int_1^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r), \quad p = [\rho]. \end{aligned} \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w: (r_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – произвольная невозрастающая медленно меняющаяся на бесконечности функция, $\lim_{r \rightarrow +\infty} w(r) = 0$, $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок такой, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)/\mathbb{N}$, $l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. Тогда для логарифма максимума модуля целой функции порядка ρ , усредненная считающая функция корней которой удовлетворяет ограничению (9), справедлива асимптотическая оценка сверху

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)} (\rho S(\rho) + (\rho S_1(\rho) + S_0(\rho))w(R) + o(w(R))), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

Изложим идеи доказательства теорем 2, 3 (теорема 1 несложно выводится из теоремы 3). Из представления видно, что теоремы 2, 3 достаточно доказать для канонических произведений (4). Имеем

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R}{|\lambda_n|}\right),$$

а в [7] доказано, что всегда можно так подобрать аргументы корней λ_n , что на некоторой последовательности окружностей $|z| = R_k$ разность величин

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R_k}{|\lambda_n|}\right)$$

будет $R_k^{\max(p, a) + \varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ при $k \rightarrow \infty$.

После этого остается только найти неухудшаемую по порядку асимптотическую оценку сверху суммы

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{x}\right) dn_\Lambda(x) = \int_0^{+\infty} n_\Lambda(x) d\mathcal{M}_p\left(\frac{r}{x}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} n_\Lambda\left(\frac{R}{t}\right) \mathcal{M}'_p(t) dt = \int_0^{+\infty} N_\Lambda\left(\frac{R}{t}\right) d(t\mathcal{M}'_p(t)). \end{aligned}$$

Автором доказано возрастание функции $t\mathcal{M}'_p(t)$. Вследствие этого из (9) находим

$$\int_0^{+\infty} N_\Lambda\left(\frac{R}{t}\right) d(t\mathcal{M}'_p(t)) \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{R}{t}\right)^{\rho(R/t)} d(t\mathcal{M}'_p(t)) + O\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{R}{t}\right)^a d(t\mathcal{M}'_p(t))\right).$$

Заключительная часть доказательства состоит в исследовании асимптотического поведения интеграла

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{R}{t}\right)^\rho l\left(\frac{R}{t}\right) d(t\mathcal{M}'_p(t)). \quad (16)$$

Главный член его асимптотики выделяется сравнительно просто, а самая большая трудность в работе – нахождение второго члена асимптотики интеграла (16). Это удастся сделать, если функция l отличается “регулярным” поведением. В общем случае получена асимптотическая оценка сверху второго члена на классах медленно меняющихся функций l и доказана точность этой оценки по порядку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Valiron, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), **5** (1913), 117–257. [2] А. А. Гольдберг, *Матем. сб.*, **58**:3 (1962), 289–334. [3] А. Ю. Попов, *Матем. сб.*, **204**:5 (2013), 67–108. [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956. [5] A. Denjoy, *J. Math.* (6), **6** (1910), 1–136. [6] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970. [7] Б. Н. Хабибуллин, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158. [8] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.

Ф. С. Мышаков

E-mail: mysfed@rambler.ru

Поступило

16.06.2014