Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Калита, Локальные свойства решений эллиптических систем высокого порядка с двойной нелинейностью, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 314–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:58:59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Е. А. Калита

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, заданы нелинейные эллиптические операторы

$$\mathcal{A}u = (-\operatorname{div})^m A(x, D^m u), \quad \mathcal{B}u = (-\operatorname{div})^l B(x, D^l u)$$

с естественным энергетическим пространством W_p^m и W_q^l соответственно, $m > l$, $1 \leq p < q$. Здесь u – вектор-функция размерности $N \geq 1$, вектор-функции A и B размерности $n^m N$ и $n^l N$ соответственно удовлетворяют стандартным структурным условиям

$$A(x, \xi) \xi \geq \mu_1 |\xi|^p, \quad |A(x, \xi)| \leq \mu_2 |\xi|^{p-1}, \quad (1)$$

$$B(x, \eta) \eta \geq \nu_1 |\eta|^q, \quad |B(x, \eta)| \leq \nu_2 |\eta|^{q-1}. \quad (2)$$

В работе изучается поведение решений системы

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}u = 0 \quad (3)$$

в окрестности изолированной особой точки $0 \in \Omega$, рассматриваются только случаи $q = 2$ или $p = 2$.

Для нелинейных эллиптических уравнений и систем высокого порядка вида $\mathcal{A}u = f(x)$ хорошо известны контрпримеры, которые показывают, что в пространстве, произвольно близком к естественному энергетическому (например, в шкалах Лебега или Морри), может не быть правильной зависимости решения от правой части. Правильная зависимость известна в шкалах $W_s^m(\Omega)$ или $W_p^m(\Omega; |x|^a)$ только на достаточно малых интервалах $s \in (p, p + \varepsilon)$ или $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ зависит от модуля эллиптичности μ_2/μ_1 . Добавление коэрцитивного оператора меньшего порядка несколько меняет ситуацию. Для уравнения высокого порядка вида (3) при $l = 1$ и условии $q > mp$ в [1] установлена гёльдеровость решений класса $W_p^m \cap W_q^1$.

В случае $l = 0$ влияние младших членов на свойства решений для уравнения второго порядка ($m = 1$) рассматривалось в огромном количестве работ. Отметим [2], где исследовался предельный порядок регулярности решения при антикоэрцитивных младших членах, и [3], [4], где исследовался возможный порядок изолированной особенности и условия несуществования особенностей при коэрцитивных младших членах. Уравнения и системы высокого порядка с $l = 0$ рассматривались в [5], [6].

В гильбертовом случае ($p = 2$) для систем вида $\mathcal{A}u = f(x)$ величина интервала таких a , для которых решение правильно зависит от правой части в пространстве $W_2^m(\Omega; |x|^a)$, может быть эффективно оценена через модуль эллиптичности системы. Соответствующая техника была предложена Кордесом [7] для недивергентного уравнения второго порядка. В теории регулярности решений дивергентных систем произвольного порядка она развита в [8], для сингулярных решений – в [6]. В негильбертовом случае подобные результаты отсутствуют. В данной работе методы [6] распространяются на системы вида (3) с $q = 2$ или $p = 2$.

Введем обозначения

$$a_* = -n + (m-l) \frac{pq}{q-p}, \quad U(R) = \int_{R < |x| < 2R} (|D^m u|^p + |D^l u|^q) dx,$$

$$a(K) = \left((n-2)^2 + \frac{4\lambda_j}{1-K} \right)^{1/2} - \left(\frac{4K\lambda_j}{1-K} \right)^{1/2}, \quad K_{j-1} \leq K \leq K_j,$$

$$K_0 = 0, \quad K_j = \frac{(\lambda_{j+1}^{1/2} + \lambda_j^{1/2})^2}{(n-2)^2 + (\lambda_{j+1}^{1/2} - \lambda_j^{1/2})^2}, \quad \lambda_j = j(j+n-2), \quad j = 1, 2, \dots$$

Отметим, что $a(K)$ монотонно убывает на интервале $(0, 1)$, $a(0) = n$, $a(1) = 0$. Величина $a(K)$ возникает как корень уравнения $\|D\Delta^{-1} \operatorname{div}; L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)\| = K^{-1/2}$, где $D\Delta^{-1} \operatorname{div}$ – сингулярный интегральный оператор с символом $(\zeta_i \zeta_j |\zeta|^{-2})_{i,j=1,\dots,n}$, действующий на вектор-функциях размерности n . Через c будем обозначать различные несущественные положительные константы. Предположим, что $0 \in \Omega$, и рассмотрим решения системы (3) с изолированной особенностью в точке 0.

1. Случай $q = 2$. Предположим, что функция B удовлетворяет условию: существуют $K_B < 1$ и $\varkappa > 0$ такие, что

$$|\eta - \varkappa B(x, \eta)|^2 \leq K_B |\eta|^2, \quad (4)$$

которое эквивалентно условию (2), причем $K_B \leq 1 - \nu_1^2/\nu_2^2$. Условие (4) предпочтительнее тем, что далее существенна точная величина K_B . Положим $a_B = a(K_B^{1/l})$. Обозначим $F = \{n - 2j : j = 1, \dots, l\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_* < a_B$, $a_B \notin F$, $a_* \neq -a_B$, $b = \max\{a_*, -a_B\} \notin F$. Тогда для решения $u \in (W_p^m \cap W_2^l)_{\operatorname{loc}}(\Omega \setminus \{0\})$ системы (3) в $\Omega \setminus \{0\}$ справедливо одно из следующих утверждений (при $R \rightarrow 0$):

- 1) $R^{a_B} U(R) \geq c$;
- 2) $c_1 \leq R^{n-2j} U(R) \leq c_2$ при некотором $j = 1, \dots, l$, $b < n - 2j < a_B$;
- 3) $R^b U(R) \leq c$.

Если $b < n - 2l$, то в случае 3) особенность устранима.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $a_B \in F$, то вместо утверждения 1) выполнено $R^{a_B} U(R) \geq c |\ln R|^{-3}$; если $b \in F$, или $a_* = -a_B$, или $a_* = -a_B \in F$, то в 3) оценка ослабляется на некоторую степень $|\ln R|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть Φ – фундаментальное решение полилапласиана $\Delta^l \Phi = \delta$. Тогда производная $D^{l-j} \Phi$ удовлетворяет оценке из утверждения 2).

Смысл теоремы 1 в том, что на интервале $a \in (-a_B, a_B)$ шкалы пространств $W_2^l(\Omega; |x|^a)$ оператор $\mathcal{B}$ ведет себя правильно: решение может иметь изолированную особенность только такого порядка, как сингулярное решение полилапласиана. Оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ведет себя локально как оператор $\mathcal{B}$ на интервале $(a_*, +\infty)$ шкалы $(W_p^m \cap W_2^l)(\Omega; |x|^a)$. Теорема 1, по существу, утверждает, что оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ведет себя правильно на пересечении указанных интервалов.

Пусть $W_{2,a}^l$, $a \in (-n, 0)$, – пространство Морри с нормой

$$\sup_{y, R} \left(R^a \int_{|x-y| < R} |D^l u(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \|u; L_2(\Omega)\|.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_* < 0$, $a_* \neq -a_B$, $u \in (W_p^m \cap W_2^l)_{\operatorname{loc}}(\Omega)$ – решение системы (3) в Ω . Тогда $u \in W_{2,b,\operatorname{loc}}^l(\Omega)$, $b = \max\{a_*, -a_B\}$.

Ввиду вложения пространств Морри в пространства Гёльдера отсюда следуют условия гладкости решения до порядка $2l - m$ (если $m < 2l$) в терминах ограничений на p и K_B .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\gamma > \max\{0, l - n/2\}$ нецелое,

$$\gamma \leq l - (m - l) \frac{p}{2 - p}, \quad 2\gamma \leq 2l - n + a_B \quad (5)$$

и хотя бы одно из неравенств (5) является строгим. Тогда решения системы (3) класса $(W_p^m \cap W_2^l)_{\text{loc}}(\Omega)$ принадлежат $C_{\text{loc}}^\gamma(\Omega)$.

2. Случай $p = 2$. Предположим, что функция A удовлетворяет условию: существуют $K_A < 1$ и $\varkappa > 0$ такие, что

$$|\xi - \varkappa A(x, \xi)|^2 \leq K_A |\xi|^2,$$

которое эквивалентно условию (1), причем $K_A \leq 1 - \mu_1^2/\mu_2^2$. Положим $a_A = a(K_A^{1/m})$. Обозначим $F = \{n - 2j : j = 1, \dots, m\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a_* > -a_A$, $-a_A \notin F$, $a_* \neq a_A$, $b = \min\{a_*, a_A\} \notin F$. Тогда для решения $u \in (W_2^m \cap W_q^l)_{\text{loc}}(\Omega \setminus \{0\})$ системы (3) в $\Omega \setminus \{0\}$ справедливо одно из следующих утверждений (при $R \rightarrow 0$):

- 1) $R^b U(R) \geq c$;
- 2) $c_1 \leq R^{n-2j} U(R) \leq c_2$ при некотором $j = 1, \dots, m$, $-a_A < n - 2j < b$;
- 3) $R^{-a_A} U(R) \leq c$.

Если $-a_A < n - 2m$, то в случае 3) особенность устранима.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При нарушении условий $-a_A \notin F$, или $a_* \neq a_A$, или $b \notin F$ оценка в утверждениях 3) или 1) ослабляется на некоторую степень $|\ln R|$.

Отметим, что теорема 3 представляет интерес при $a_* < 0$, так как при $a_* \geq 0$ оператор $\mathcal{B}$ подчинен $\mathcal{A}$ по Соболеву.

Укажем два случая ($p = 2, l = 0$ и $p = 2, l = 1$), когда удается получить двусторонние оценки решения с поведением энергии $U(R) \sim R^{-a_*}$. Обозначения используются те же, что и в п. 2.

3. Случай $l = 0, p = 2$. Если $l = 0$, то $\mathcal{B}u = B(x, u)$, и согласно условиям (2) интервал правильного поведения $\mathcal{B}$ в шкале $L_q(\Omega; |x|^a)$ — вся ось $a \in (-\infty, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a_* \in (-a_A, a_A)$, $-a_A \notin F$, $a_* \notin F$. Тогда для решения $u \in (W_2^m \cap L_q)_{\text{loc}}(\Omega \setminus \{0\})$ системы (3) в $\Omega \setminus \{0\}$ справедливо одно из следующих утверждений (при $R \rightarrow 0$):

- 1) $c_1 \leq R^{a_*} U(R) \leq c_2$;
- 2) $c_1 \leq R^{n-2j} U(R) \leq c_2$ при некотором $j = 1, \dots, m$, $-a_A < n - 2j < a_*$;
- 3) $R^{-a_A} U(R) \leq c$.

Отметим, что если $a_* \leq 0$, то решение (3) не может иметь изолированных особых точек в смысле справедливости интегрального тождества с пробными функциями из $\dot{W}_2^m \cap L_q$. Близкое к теореме 4 утверждение получено в [6] (оценки неточны на R^ε).

4. Случай $l = 1, p = 2$. При $l = 1$ и произвольном q нетрудно получить некоторые (вообще говоря, далекие от точных) оценки интервала шкалы, на котором оператор $\mathcal{B}$ ведет себя правильно. При $q < n$ положим $a_+ = (n - q)/(q\nu_2/\nu_1 - 1)$, $a_- = (q - n)/(q\nu_2/\nu_1 + 1)$; при $q > n$ — наоборот (так что $a_- < 0 < a_+$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a_* \in (-a_A, a_A) \cap (a_-, a_+)$, $-a_A \notin F$, $a_* \notin F$. Тогда для решения $u \in (W_2^m \cap W_q^1)_{\text{loc}}(\Omega \setminus \{0\})$ системы (3) в $\Omega \setminus \{0\}$ справедливо одно из следующих утверждений (при $R \rightarrow 0$):

- 1) $R^{a_+} U(R) \geq c$;
- 2) $c_1 \leq R^{a_*} U(R) \leq c_2$;
- 3) $c_1 \leq R^{n-2j} U(R) \leq c_2$ при некотором $j = 1, \dots, m$, $-a_A < n - 2j < a_*$;
- 4) $R^{-a_A} U(R) \leq c$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрыпник И. В. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1104–1119. 2. Похожаев С. И. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 3–16. 3. Veron L. // Nonlinear Anal. 1981. V. 5. № 3. P. 225–242. 4. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 3. С. 346–360. 5. Bernis F. // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 106. № 3. P. 217–241. 6. Калита Е. А. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 117–143. 7. Cordes H. O. // Math. Ann. 1956. V. 131. № 3. P. 287–312. 8. Koshelev A. I., Chelkak S. I. Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems. Leipzig: Teubner, 1985.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк
E-mail: math@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
04.02.97
Исправленный вариант
11.02.98