Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Режим насыщения многочленов Мейкснера и дискретное ядро Бесселя, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 147–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:20:35

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Режим насыщения многочленов Мейкснера и дискретное ядро Бесселя

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

1. Введение. Пусть $\{M_n(\tilde{x})\}$ – последовательность многочленов Мейкснера [1], ортогональных в $l^2(\mathbb{Z}_+, W)$ с дискретным весом

$$W := W_{\beta, \sigma}(\tilde{x}) := \frac{\Gamma(\beta + \tilde{x})}{\tilde{x}!} \sigma^{\tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+, \quad \beta > 0, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (1)$$

Спецификой многочленов, ортогональных относительно дискретного веса, является то, что между двумя последовательными узлами меры ортогональности может находиться не более одного нуля. Область, в которой между любыми соседними нулями многочлена имеется лишь один узел, называют *зоной насыщения*.

В настоящей заметке мы исследуем многочлены M_N с параметрами β_N и σ_N веса (1), зависящими от N так, чтобы *все нули* многочлена Мейкснера M_N располагались в зоне насыщения, т.е. по одному нулю в каждом промежутке между узлами меры ортогональности:

$$\tilde{x}_{N,k} : M_N(\tilde{x}_{N,k}) = 0 \implies \tilde{x}_{N,k} \in (k-1, k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Современный интерес к многочленам Мейкснера связан с их появлением в некоторых детерминантных точечных процессах теории случайных матриц и теории представлений (см., например, [2]). Одним из результатов этой заметки (см. ниже следствие из теоремы 2) является описание предельного поведения в режиме насыщения (2) ядер Кристоффеля–Дарбу для многочленов Мейкснера с помощью дискретного ядра Бесселя, появившегося ранее в работах Бородина, Окунькова, Ольшанского [3], [4] и Йохансона [5].

2. Зависимость параметров веса от N . Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{W_{\beta(N), \sigma(N)}\}_{N \in \mathbb{N}}$ – последовательность весов (1), параметры которых имеют следующую зависимость от N при $N \rightarrow \infty$:

$$\frac{\beta}{N} \rightarrow \tau, \quad \tau \geq 0, \quad \frac{1}{\sigma} \sim \lambda N^2, \quad \lambda > (1 + \tau)\lambda^*, \quad \lambda^* := \frac{4}{s_*^2} = 0.69 \dots, \quad (3)$$

где s_* есть минимальный нуль функции Бесселя $J_0(s_*) = 0$.

Тогда нули $\{\tilde{x}_{N,k}\}_{k=1}^N$ многочлена Мейкснера M_N , ортогонального относительно веса $W_{\beta(N), \sigma(N)}$, удовлетворяют (2) для достаточно больших N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2) равносильно $x_{N,N} < N$. Из перемежаемости нулей соседних ортогональных многочленов следует, что на любом $[A, \infty)$ количество корней у соседних многочленов отличается не более чем на единицу. Поэтому $x_{N,N} < N$ равносильно $M_k(N) > 0$ для $k = 1, \dots, N$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00025).

DOI: 10.4213/mzm10540

Положим для начала $\tau := 0$ и убедимся, что $c(N)$ растет как N^2 . Из рекуррентных соотношений для многочленов Мейкснера (см. [6])

$$M_{n+1} = [(c-1)\tilde{x} - (c+1)n - b - 1]M_n - cn(n+b)M_{n-1}, \quad c := \frac{1}{\sigma}, \quad b := \beta - 1, \quad (4)$$

взятых в точке $x := N$, имеем для $M_k := M_k(N)$

$$\frac{M_{N-1}}{M_{N-2}} = ((c-1)N - (c+1)(N-2) - b - 1) - c(N-2)(N-2+b) \frac{M_{N-3}}{M_{N-2}}.$$

Если $M_{N-3}, M_{N-2}, M_{N-1}, M_N > 0$, то

$$\frac{M_{N-1}}{M_{N-2}} < ((c-1)N - (c+1)(N-2) - b - 1).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{M_{N-1}}{M_{N-2}} &= \frac{c(N-1)(N-2+b)}{(c-1)N - (c+1)(N-1) - b - 1 - M_N/M_{N-1}} \\ &> \frac{c(N-1)(N-1+b)}{(c-1)N - (c+1)(N-1) - b - 1}, \end{aligned}$$

где

$$(c-1)N - (c+1)(N-1) - b - 1 > 0.$$

Исключив отношение M_{N-1}/M_{N-2} , получим $c > c^* \sim N^2/2$. Поэтому $c \sim \lambda N^2$.

Для определения λ^* воспользуемся явным видом многочленов Мейкснера (см. [6])

$$M_N(N) = (b+1) {}_2F_1(-N, -N; b+1; 1-c) = (b+1)_N \sum_{k=0}^N \frac{(-N)_k (-N)_k}{(b+1)_k (1)_k} (1-c)^k.$$

Вынесем множителем последнее слагаемое и сменим порядок суммирования:

$$M_N(N) = N!(1-c)^N \sum_{k=0}^N \frac{(N+1-k)_k (N+b+2-k)_k}{k! k!} (1-c)^{-k}.$$

Теперь, если $c-1 \sim \lambda N^2$, а b остается ограниченным, то сумма имеет предел

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{-k}}{(k!)^2} = J_0\left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Критическое значение λ^* , разграничивающее случаи $M_N(N) > 0$ и $M_N(N) < 0$, есть корень уравнения $J_0(2/\sqrt{\lambda}) = 0$, который больше $1/2$. Такой корень единственный, он выражается через минимальный нуль функции Бесселя.

Теперь пусть $b(N) \sim \tau N$, $\tau > 0$. Тогда предел суммы будет

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\tau}{-\lambda}\right)^k \frac{1}{(k!)^2} = J_0\left(2\sqrt{\frac{1+\tau}{\lambda}}\right).$$

Теорема доказана.

3. Базисные функции и асимптотика многочленов. Сформулируем результат об асимптотике многочленов Мейкснера при условии зависимости весовых параметров (1) от номера многочлена, как в теореме 1. Ниже, для упрощения получающихся выражений,

мы в (3) положим $\tau = 0$, т. е. параметр β от номера многочлена не зависит. Более того, фиксируем в (1) параметр $\beta = 1$, $c = 1/\sigma$ и в рекуррентном соотношении (4), определяющем многочлены Мейкснера, мы произведем сдвиг переменной:

$$x := \tilde{x} + \frac{1}{c-1} \implies M_{n+1} = [(c-1)x - (c+1)n]M_n - cn^2 M_{n-1}. \quad (5)$$

Далее, вводим зависимость M_n от параметра N , полагая $c = s^2 N^2$, $s \in K \in \mathbb{R}_+$. Для получения асимптотики мы следуем методу, предложенному в [7], [8] и примененному в [7], [9] для M_n с фиксированным параметром c . Нас будут интересовать два асимптотических режима для M_n :

- 1) при $x \notin [0, N]$, $n \in [0, N + \mathcal{O}(1)]$;
- 2) при $x = N + \mathcal{O}(1)$, $n = N + \mathcal{O}(1)$.

В режиме 1) находим базисные решения $\Pi(x, n, N)$ разностных уравнений (5), переписанных в матричном виде. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы перехода, дискриминант характеристического уравнения D и его корни $n_{1,2}^*$ равны

$$\lambda_{1,2} = (s^2 N^2 - 1)x - (s^2 N^2 + 1)n \pm \sqrt{D},$$

$$D = (s^2 N^2 - 1)(s^2(x - n)^2 N^2 - (x + n)^2), \quad n_1^* = x \frac{sN - 1}{sN + 1}, \quad n_2^* = x \frac{sN + 1}{sN - 1}.$$

Заметим, что $|n_1^* - n_2^*| \sim 4x/(sN) = \mathcal{O}(1)$. Процедура работы [7] (пункт 2.4.3), дает разложение $\ln \Pi$ по дополнительному параметру u

$$\ln \Pi = \underbrace{\left(\frac{x}{u} + \frac{1}{2} + \frac{1}{s^2 N^2 - 1} \right)}_{\text{не зависит от } n} \ln(s^2 N^2(x - n) + x + n - \sqrt{D})$$

$$+ \left(\frac{n}{u} - \frac{1}{2} \right) \ln(s^2 N^2(x - n) - x - n + \sqrt{D}) - \frac{n(1 + \ln 2)}{u} - \frac{1}{4} \ln D + \mathcal{O}(u^2),$$

где нужно положить $u = 1$, с соответствующей оценкой отбрасываемых членов, убывающей если $1/|x - n| = o(N^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Разложения полиномов по старшим степеням имеет вид

$$\ln M_n = n \ln((s^2 N^2 - 1)x) - \frac{n(n-1)(s^2 N^2 + 1)}{2x(s^2 N^2 - 1)} + \dots$$

Сравнивая разложения базисного вектора $\Pi(n)$ и многочлена Мейкснера M_{n-1} , находим нормировку для $\Pi(n)$ (коэффициент “сшивки”)

$$k_0 = \ln M_{n-1} - \ln \Pi = - \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{s^2 N^2 - 1} \right) \ln(2x) + \frac{1}{2} \ln 2 + \mathcal{O}(x^{-4}). \quad (6)$$

Теперь режим 2) – переходная зона $x \approx N$, $n \approx N$. Здесь локальные переменные (y, t) : $x = N + y$, $n = N + t$. Для нахождения в режиме 2) базисного решения $Q_n(x)$ выделим множитель $(sN^2)^n$ в рекуррентном соотношении (5). Коэффициенты полученного соотношения имеют вид: $1, -s(y - t) + \mathcal{O}(1/N), 1 + \mathcal{O}(1/N)$. При $n \rightarrow \infty$ получается в качестве предела дискретная система

$$f_{t+1} - s(y - t)f_t + f_{t-1} = 0.$$

Ее решения записываются через функции Бесселя. Учет последующих членов разложения рекуррентных коэффициентов (при $1/N$, и т. д.) дает

$$Q_n(x) = (sN^2)^n \left[j(0) + \frac{j(2) - 2s(y+1)j(1)}{s^2 N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right].$$

где использовалось обозначение $j(k)$ для следующего выражения:

$$j(k) = J_{y-t+k} \left(\frac{2}{s} \right) = J_{x-n+k} \left(\frac{2}{s} \right). \quad (7)$$

Второе базисное решение получается заменой в выражении (7) функции Бесселя J на функцию Бесселя Y . Сравнением разложений Π и Q_{n-1} при $t \sim 1$, $y \sim N^{1/3}$, можно убедиться, что многочленам Мейкснера соответствует именно (7). При этом, t сокращается, и мы получаем

$$k_1 = \ln Q_{n-1} - \ln \Pi = -N(\ln(2sN^2) - 1) - y(1 + \ln(2sN^2)) - \ln N \\ - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{y(y+1)}{N} - \frac{s^2 + 12}{12s^2N} + \frac{y^3}{3N^2} + \frac{y^2}{2N^2} + \mathcal{O}(N^{-4/3}). \quad (8)$$

Комбинируя (8) с (6), имеем для коэффициента “сшивки” в режиме 2)

$$\frac{k_0(N+y, N)}{k_1(y, N)} = \sqrt{2\pi N} e^{-N} (sN)^{N+y} \exp \left(\frac{y(y+1)}{2N} + \frac{1}{12N} + \frac{1}{s^2N} + o(N^{-1}) \right) \\ = s^{N+y} (N+y)! \exp \left(\frac{1}{s^2N} + o(N^{-1}) \right).$$

Подитоживая, получаем следующий результат

ТЕОРЕМА 2. Пусть параметры веса Мейкснера равны $b = 0$, $c = s^2N^2$, где $s \in \Delta \subseteq \mathbb{R}_+$. Тогда

1) для $n < N - N^\varepsilon$, $\text{dist}(x, [0; N]) > N^\varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 1)$, верна асимптотика

$$M_{n-1}(x) = k_0(x, N) \Pi(x, n, N) \\ = (s^2N^2(x-n) - x - n + \sqrt{D})^{n-1/2} \\ \times \left(\frac{s^2N^2(x-n) + x + n - \sqrt{D}}{2x} \right)^{x+1/2+1/(s^2N^2-1)} \\ \times (2e)^{-n} \sqrt[4]{\frac{4}{D}} \exp(\mathcal{O}(|x|^{-1}) + \mathcal{O}(|n|^{-1}));$$

2) для области $|n - N| < N^\varepsilon$, $|y| < N^\varepsilon$, где $y := x - N$, верна асимптотическая формула с обозначениями (7), (8)

$$M_{n-1}(N+y) = \frac{k_0(N+y, N)}{k_1(y, N)} (sN^2)^{n-1} \left[j(1) + \frac{j(3) - 2s(y+1)j(2)}{s^2N} + \mathcal{O}(N^{2\varepsilon-2}) \right].$$

Отметим, что режим 2) описывает положение крайних (справа) нулей M_N .

4. Предельное ядро. Теперь мы можем сформулировать следствие пункта 2) теоремы 2 об асимптотике ядра Кристоффеля–Дарбу

$$K_{n-1}(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_j(x)M_j(y)}{\|M_j\|^2} = C_n \frac{M_n(x)M_{n-1}(y) - M_n(y)M_{n-1}(x)}{x-y},$$

где $C_n := (|\mu|(c-1)c^{n-1}(n-1)!^2)^{-1}$, а $|\mu|$ – масса меры Мейкснера (1).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $|x - N| = \mathcal{O}(1)$, $|y - N| = \mathcal{O}(1)$, $|n - N| = \mathcal{O}(1)$. Тогда

$$K_{n-1}(x, y) = \tilde{C}_n(x, y) \left[\Im_{x-n, y-n} \left(\frac{2}{s} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N} \right) \right] \exp \left(\frac{2}{s^2N} + o(N^{-1}) \right),$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n(x, y) &:= \frac{sN^{2n}}{|\mu|(s^2N^2 - 1)} \frac{s^x x!}{(n-1)!} \frac{s^y y!}{(n-1)!}, \\ \mathfrak{J}_{x-n, y-n}(\xi) &:= \frac{J_{x-n}(\xi)J_{y-n+1}(\xi) - J_{y-n}(\xi)J_{x-n+1}(\xi)}{x-y}.\end{aligned}\quad (9)$$

Дискретное ядро Бесселя (9) (см. [3]–[5]), как и классическое синус-ядро, непрерывные ядра Эйри и Бесселя, отражает локальную универсальность случайных детерминантных точечных процессов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Meixner, *J. London Math. Soc.*, **9** (1934), 6–13. [2] A. Borodin, G. Olshanskii, *Mosc. Math. J.*, **6**:4 (2006), 629–655. [3] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanskii, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 481–515. [4] A. Borodin, *Internat. Math. Res. Notices*, **9** (2000), 467–494. [5] K. Johansson, *Ann. of Math.* (2), **153**:1 (2001), 259–296. [6] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Math. Appl., **13**, Gordon and Breach Sci. Publ., New York, 1978. [7] Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 111–158. [8] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **205**:12 (2014), 17–40. [9] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Тр. ММО, **73**, МЦНМО, М., 2012, 87–132.

А. И. Аптекарев

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступило

18.08.2014

Д. Н. Туляков

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: dntulyakov@gmail.com