Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Об отсутствии кратного перемешивания
и централизаторе сохраняющих меру действий, *Матем.
заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:15:37

Об отсутствии кратного перемешивания и централизаторе сохраняющих меру действий

С. В. Тихонов

Преобразованиями в работе называются обратимые сохраняющие меру отображения единичного отрезка в себя. Такие преобразования являются основным предметом изучения абстрактной теории динамических систем.

Непрерывным действием топологической группы G называется набор преобразований $T = \{T^g\}_{g \in G}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

- 1) $T^h T^g = T^{hg}$ для всех $g, h \in G$;
- 2) для любых измеримых множеств A и B отображение $g \mapsto \mu(T^g A \cap B)$ непрерывно.

Последовательность преобразований $\{T_i\}$ называется *перемешивающей*, если для любых измеримых множеств A, B имеем

$$\mu(T_i A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

при $i \rightarrow \infty$.

Преобразование (или действие) T называется *перемешивающим*, если последовательность $\{T^{g_i}\}$ перемешивает, как только g_i стремится к бесконечности. Последнее означает, что последовательность $\{g_i\}$ имеет только конечное число членов в любом компакте.

Аналогично, перемешивающее действие называется *двукратно перемешивающим*, если для любых перемешивающих последовательностей $\{T_i\}$, $\{S_i\}$, $\{T_i^{-1}S_i\}$ его элементов и любых множеств A, B, C имеем

$$\mu(T_i A \cap S_i B \cap C) \rightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C)$$

при $i \rightarrow \infty$.

В дальнейшем все рассматриваемые последовательности $\{T_i\}$, $\{S_i\}$, $\{T_i^{-1}S_i\}$ предполагаются перемешивающими.

Свойство двукратного перемешивания введено Рохлиным. В работе [1] он указал один из классов преобразований, для которого двукратное перемешивание следует из обычного перемешивания.

На данный момент найдены и другие классы преобразований (и действий), обладающие таким свойством. Обзор результатов на эту тему, полученных разными авторами, можно найти в [2].

До сих пор неизвестно, существуют ли перемешивающие преобразования, не перемешивающие двукратно. Этот вопрос называется *проблемой Рохлина о кратном перемешивании*.

О действиях групп известно больше. Для некоторых групп из перемешивания следует двукратное перемешивание, для других групп это не так. В частности, для групп $\mathbb{Z}^d$ при $d > 1$ имеются контрпримеры.

Все они в том или ином смысле основаны на рассуждениях Ледрапье [3].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (Трехточечный пример Ледрапье). *Существует перемешивающее действие L двумерной решетки $\mathbb{Z}^2$ и множество A , $\mu(A) = 1/2$, такие, что*

$$\mu(L^{(2^k, 0)} A \cap L^{(0, 2^k)} A \cap A) = 0 \quad (1)$$

для любого натурального k .

Таким образом, L перемешивает, но не перемешивает дважды.

DOI: 10.4213/mzm10541

Отметим, что согласно результатам [4], [5] типичное перемешивающее действие группы $\mathbb{Z}^d$ перемешивает дважды, т.е. пример Ледрапье является “исключением из правил”.

В настоящей работе изучаются действия произвольной топологической абелевой группы, имеющие тот же предел, что и в примере Ледрапье. Дадим соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действие топологической группы имеет L -предел, если существуют последовательности¹ $\{T_i\}$, $\{S_i\}$ и множество A , $\mu(A) = 1/2$, такие, что

$$\mu(T_i A \cap S_i A \cap A) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Действия, обладающие L -пределом, назовем L -системами. В частности, L -системой является упомянутый выше пример Ледрапье.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть задана произвольная L -система и преобразование U , коммутирующее с элементами последовательностей $\{T_i\}$, $\{S_i\}$, $\{T_i^{-1} S_i\}$. Тогда мера $\mu(UA \cap A)$ равна либо $1/2$ либо $1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся тем, что при i , стремящемся к бесконечности, имеют место сходимости

$$T_i A \rightarrow (S_i A \triangle A) = (S_i A \cap \bar{A}) \cup (S_i \bar{A} \cap A), \quad (3)$$

$$S_i A \cap A \rightarrow T_i \bar{A} \cap A. \quad (4)$$

Обозначим меру $\mu(UA \cap A)$ через x . Вычисление x основано на оценке различными способами выражений $\mu(UT_i A \cap S_i A \cap A)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и будем использовать обозначение $a \stackrel{\varepsilon}{\sim} b$, если модуль разности между числами a и b меньше ε .

Тогда при достаточно большом i по формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \mu(UT_i A \cap S_i A \cap A) &\stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(US_i A \cap U\bar{A} \cap S_i A \cap A) + \mu(US_i \bar{A} \cap UA \cap S_i A \cap A) \\ &= \mu(S_i(UA \cap A) \cap (U\bar{A} \cap A)) + \mu(S_i(U\bar{A} \cap A) \cap (UA \cap A)) \\ &\stackrel{2\varepsilon}{\approx} 2\mu(UA \cap A)\mu(U\bar{A} \cap A) = x(1 - 2x). \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя формулу (4), имеем

$$\mu(T_i UA \cap S_i A \cap A) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(T_i UA \cap T_i \bar{A} \cap A) \stackrel{\varepsilon}{\sim} \mu(UA \cap \bar{A})\mu(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right) \stackrel{5\varepsilon}{\approx} 2x \left(\frac{1}{2} - x \right).$$

В силу произвольности ε заключаем, что

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right) = 2x \left(\frac{1}{2} - x \right).$$

Значит, есть только два варианта: $x = 1/2$ и $x = 1/4$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое перемешивающее преобразование, коммутирующее с L -системой, имеет лебеговскую компоненту в спектре.

¹Напомним, что эти последовательности предполагаются перемешивающими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – рассматриваемое преобразование. Взяв в качестве U любое множество из набора $\{V^k A\}_{k \in \mathbb{Z}}$, получаем, что

$$\mu(V^k A \cap A) = \frac{1}{4},$$

что является достаточным условием для наличия лебеговской компоненты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Это следствие связано с несколькими известными результатами в эргодической теории. Перемешивающее, но не перемешивающее дважды действие имеет нетривиальное самоприсоединение. Согласно работе Рыжикова [6] любое перемешивающее преобразование из его централизатора обладает тем же самоприсоединением. Результаты статьи Оста [7] гарантируют, что это преобразование имеет абсолютно непрерывную компоненту в спектре. Мы доказываем, что имеется лебеговская компонента, но для более узкого класса действий – для L -систем.

К. Шмидт доказал, что централизатор примера Ледрапье тривиален (сообщение на конференции в Варвике). Аналог этого результата для L -систем не верен. В частности, квадрат примера Ледрапье имеет нетривиальный централизатор.

Утверждение 2 имеет ряд следствий для действий различных групп.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Потоки (т.е. действия группы $\mathbb{R}$) не обладают L -пределом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и у нас есть поток L с таким пределом. Так как $\mu(L^\alpha A \cap A)$ – непрерывная функция от α , принимающая значение $1/2$ в нуле и стремящаяся к $1/4$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то можно выбрать такое α , что

$$\mu(L^\alpha A \cap A) = \frac{3}{8},$$

что противоречит утверждению 2.

Следствие 2 имеет естественное обобщение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть некоторое перемешивающее действие произвольной группы коммутирует со слабо перемешивающим потоком P . Тогда оно не обладает L -пределом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем случае, для любого множества A , $\mu(A) = 1/2$, в потоке P найдется элемент U такой, что

$$\mu(UA \cap A) = \frac{3}{8},$$

значит, по утверждению 2 не существует L -предела с множеством A .

СЛЕДСТВИЕ 4. *Многомерные потоки (т.е. действия группы $\mathbb{R}^d$) не имеют L -предела.*

Действительно, в централизаторе каждого такого действия имелся бы (одномерный) поток, что противоречит предыдущему следствию.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Действие из утверждения 1 не вкладывается в действие плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такое действие имело бы L -предел, что противоречит предыдущему следствию.

Обобщения. Некоторая модификация рассуждений утверждения 2 позволяет доказать следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть действие произвольной группы обладает L -пределом. Пусть также преобразования U и V коммутируют с последовательностями $\{T_i\}$, $\{S_i\}$, $\{T_i^{-1}S_i\}$, а множества UA , VA и A различны.

Тогда мера

$$\mu(UA \cap VA \cap A)$$

может принимать только значения 0 или $1/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является обобщением теоремы 1.1 из [8].

СЛЕДСТВИЕ 6. Преобразование не может иметь L -предел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что преобразование Q имеет L -предел. Тогда для некоторых i, j имеем

$$A = Q^i A \triangle Q^j A.$$

Для перемешивающего преобразования это невозможно, см., например, [9].

СЛЕДСТВИЕ 7. Для перемешивающего действия группы $\mathbb{Z}^d$ (или $\mathbb{R}^d$) наличие L -предела эквивалентно условию (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мера

$$\mu(T_i A \cap S_i A \cap A)$$

стремится к нулю, следовательно, согласно утверждению 3 она равна 0 с некоторого момента. Осталось заметить, что из равенства

$$\mu(T_i A \cap S_i A \cap A) = 0$$

следует равенство

$$\mu(T_i^{2^k} A \cap S_i^{2^k} A \cap A) = 0$$

для любого натурального k .

Еще одна вариация L -систем состоит в замене предельного отношения (2) на соотношение

$$\mu(T_i A \cap S_i A \cap A) \rightarrow \Delta. \quad (5)$$

Такие пределы будем называть L_Δ -пределами.

СЛЕДСТВИЕ 8. При любом достаточно малом Δ перемешивающий поток (многомерный или одномерный) не обладает L_Δ -пределом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Анализ доказательства утверждения 2 показывает, что при достаточно малом Δ мера $\mu(UA \cap A)$ мало отличается от $1/4$ или $1/2$. Однако для любого множества A меры $1/2$ существует преобразование U , коммутирующее с многомерным потоком и такое, что

$$\mu(UA \cap A) = \frac{3}{8},$$

противоречие.

Результаты данной работы позволяют также исследовать асимметрию в L -системах в смысле работ [10] и [11].

Автор выражает благодарность А. М. Стёпину, Ж.-П. Тувено и К. Шмидту и особенно В. В. Рыжикову за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Рохлин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:4 (1949), 329–340. [2] В. В. Рыжиков, *Матем. сб.*, **183**:3 (1992), 133–160. [3] F. Ledrappier, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **287**:7 (1978), A561–A563. [4] С. В. Тихонов, *Матем. заметки*, **95**:2 (2014), 282–299. [5] С. В. Тихонов, *УМН*, **67**:4 (2012), 187–188. [6] В. В. Рыжиков, *УМН*, **44**:1 (1989), 205–206. [7] B. Host, *Israel J. Math.*, **76**:3 (1991), 289–298. [8] L. Arenas-Carmona, D. Berend, V. Bergelson, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:2 (2008), 339–365. [9] T. de la Rue, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **37**:4 (2006), 503–521. [10] И. С. Ярославцев, *Матем. заметки*, **95**:3 (2014), 479–480. [11] В. В. Рыжиков, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 432–439.

С. В. Тихонов

Российский экономический университет

им. Г. В. Плеханова, г. Москва

E-mail: tikhonovc@mail.ru

Поступило

30.07.2014

Исправленный вариант

03.10.2014