Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Р. Гадильшин, Краевые задачи для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим и дельта-образным потенциалами, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 842–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:36:21

Краевые задачи для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим и дельта-образным потенциалами

Т. Р. Гадильшин

В работе рассматриваются краевые задачи на отрезке $[a, b]$ для уравнения Шрёдингера с потенциалом в виде суммы $q(x, \mu^{-1}x) + \varepsilon^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$, где $q(x, \zeta)$ является 1-периодической по ζ функцией, $Q(\xi)$ есть финитная функция, $0 \in (a, b)$, μ, ε – малые положительные параметры. На основе комбинации метода усреднения и метода согласования асимптотических разложений построены решения этих краевых задач с точностью до $O(\varepsilon + \mu)$.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10542

1. Постановка задачи и формулировка основного утверждения. Рассматривается краевая задача

$$\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon} u_{\mu, \varepsilon} := \frac{d^2 u_{\mu, \varepsilon}}{dx^2} + \left(q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + \varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) u_{\mu, \varepsilon} = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (a, b), \quad (1.1)$$

$$l_a u_{\mu, \varepsilon} := h_a u_{\mu, \varepsilon}(a) - H_a u'_{\mu, \varepsilon}(a) = 0 \quad l_b u_{\mu, \varepsilon} := h_b u_{\mu, \varepsilon}(b) + H_b u'_{\mu, \varepsilon}(b) = 0,$$

$q(x, \zeta)$, $f(x, \zeta)$ – 1-периодические по ζ функции из $C^{2,0}([a, b] \times (-\infty, \infty))$, $a < 0 < b$, $Q(\xi) \in C_0(-\infty, \infty)$, $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$.

Здесь и всюду далее

$$q(x, \zeta) < 0, \quad Q(\xi) \leq 0, \quad h_a, h_b, H_a, H_b \geq 0, \quad h_a + H_a > 0, \quad h_b + H_b > 0.$$

Хорошо известно (см., например, [1; гл. 7, § 26]), что в этом случае краевая задача (1.1) однозначно разрешима в $C^2[a, b]$.

В случае отсутствия дельта-образного потенциала ($Q \equiv 0$) асимптотика решения краевой задачи (1.1) строится методом усреднения (см., например, [2]–[4]). В случае же, наоборот, отсутствия быстрых осцилляций (т.е. когда q, f не зависят от μ) асимптотики решений подобной задачи были исследованы в [5] методом сращиваемых разложений [6].

В настоящей работе на основе комбинации метода усреднения и метода согласования асимптотических разложений [7] исследуется случай, когда присутствует как быстроосциллирующий, так и дельта-образный потенциалы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №15-01-07920).

Обозначим

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) d\xi,$$

а для 1-периодических по ζ функций $g(x, \zeta)$ положим

$$[g](x) := \int_0^1 g(x, \zeta) d\zeta.$$

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для решения $u_{\mu, \varepsilon}(x)$ краевой задачи (1.1) справедливо равенство*

$$\|u_{\mu, \varepsilon} - U\|_{C[a, b]} = O(\mu + \varepsilon),$$

где

$$U(x) = U_0(x) + A \begin{cases} y_-(x), & x \in [a, 0], \\ y_+(x), & x \in (0, b], \end{cases} \quad (1.2)$$

$$A = -\frac{U_0(0)\langle Q \rangle}{y'_+(0) - y'_-(0) + \langle Q \rangle}, \quad (1.3)$$

а $U_0(x)$, $y_{\pm}(x)$ – решения краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_0}{dx^2} + [q](x)U_0 &= [f](x), & x \in (a, b), & \quad l_a U_0 = l_b U_0 = 0, \\ \frac{d^2 y_-}{dx^2} + [q](x)y_- &= 0, & x \in (a, 0), & \quad l_a y_- = 0, \quad y_-(0) = 1, \\ \frac{d^2 y_+}{dx^2} + [q](x)y_+ &= 0, & x \in (0, b), & \quad l_b y_+ = 0, \quad y_+(0) = 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Так как, очевидно, что $[q](x), [f](x) \in C^2[a, b]$ и $[q](x) < 0$, то эти краевые задачи однозначно разрешимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть (см. также замечание 2 ниже), что функция U , определяемая равенствами (1.2), (1.3), является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} + [q](x)U &= [f](x), & x \in (a, 0) \cup (0, b), & \quad l_a U = l_b U = 0, \\ U'(+0) - U'(-0) &= -\langle Q \rangle U(0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В свою очередь, для последней краевой задачи используется и следующая запись (см., например, [8], [9], а также содержащийся в этих работах и в [10] обзор литературы):

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + [q]U - \langle Q \rangle \delta U = [f], \quad l_a U = l_b U = 0,$$

где δ – функция Дирака.

2. Предварительные сведения и оценки. В [1; гл. 7, § 26] показана справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{q}, F \in C[a, b]$, $\hat{q}(x) \leq -\gamma < 0$. Тогда для решения краевой задачи

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \hat{q}z = F, \quad x \in (a, b), \quad l_a z = B_a, \quad l_b z = B_b$$

справедлива следующая оценка:

$$\|z\|_{C[a,b]} \leq M(\|F\|_{C[a,b]} + |B_a| + |B_b|),$$

где M – некоторая положительная постоянная.

ЛЕММА 2. Пусть $\tilde{F}, q_\mu \in C[c, d]$, причем, справедлива равномерная по μ оценка

$$-\infty < -\gamma_1 \leq q_\mu(x) \leq -\gamma < 0.$$

Тогда для решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{z}_\mu}{dx^2} + q_\mu \tilde{z}_\mu &= \tilde{F}, \quad x \in (c, d), \\ l_c \tilde{z}_\mu &:= h_c \tilde{z}(c) - H_c \tilde{z}'(c) = \tilde{B}_c, \quad l_d \tilde{z}_\mu := h_d \tilde{z}(d) + H_d \tilde{z}'(d) = \tilde{B}_d, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $h_c, h_d, H_c, H_d \geq 0$, $h_c + H_c > 0$, $h_d + H_d > 0$, справедлива равномерная по μ оценка

$$\|\tilde{z}_\mu\|_{C^2[c,d]} \leq C(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q_\mu(x) \leq -\gamma < 0$, то, умножая (2.1) на $\tilde{z}_\mu(x)$ и интегрируя по частям на $[c, d]$, в силу оценок $\|\tilde{z}\|_{C^1[c,d]} \leq \tilde{C}_l \|\tilde{z}\|_{W_2^{l+1}[c,d]}$ (см., например, [11; гл. III, § 6]) и $\|\tilde{z}\|_{L_1[c,d]} \leq \sqrt{d-c} \|\tilde{z}\|_{L_2[c,d]}$ последовательно получаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_\mu\|_{W_2^1[c,d]}^2 &\leq C_1(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} \|\tilde{z}_\mu\|_{L_1[c,d]} + (|\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|) \|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]}), \\ &\leq C_2(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|) \|\tilde{z}_\mu\|_{W_2^1[c,d]}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]} \leq C_3(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|). \quad (2.4)$$

Так как $q_\mu(x)$ – равномерно ограниченная по μ функция, то в силу уравнения из (2.1) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_\mu''\|_{C[c,d]} &\leq C_4(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + \|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]}), \\ \|\tilde{z}_\mu''\|_{L_2[c,d]}^2 &\leq C_5(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} \|\tilde{z}_\mu''\|_{L_1[c,d]} + \|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]} \|\tilde{z}_\mu''\|_{L_1[c,d]}) \\ &\leq C_6(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + \|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]}) \|\tilde{z}_\mu''\|_{L_2[c,d]}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из этого неравенства и оценок (2.3) и (2.4) следует, что

$$\|\tilde{z}_\mu\|_{W_2^2[c,d]} \leq C_7(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d| + \|\tilde{z}_\mu\|_{C[c,d]}) \leq C_8(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|).$$

А так как $\|\tilde{z}\|_{C^1[c,d]} \leq \tilde{C}_1 \|\tilde{z}\|_{W_2^2[c,d]}$, то, следовательно, справедливо неравенство

$$\|\tilde{z}_\mu\|_{C^1[c,d]} \leq C_9(\|\tilde{F}\|_{C[c,d]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d|).$$

И, наконец, из этого неравенства и (2.5) вытекает равномерная оценка (2.2).

Из метода усреднения (см., например, [1; гл. 10, § 36], [2; гл. 2, § 3], [4; гл. 2, § 7.1]) вытекает следующее утверждение, справедливость которого легко подтверждается и непосредственной проверкой.

ЛЕММА 3. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, функции $q(x, \zeta), F(x, \zeta) \in C^{2,0}([c, d] \times (-\infty, \infty))$ являются 1-периодическими по ζ , функция $z(x)$ является решением уравнения

$$\mathcal{L}z := \frac{d^2 z}{dx^2} + [q](x)z = [F](x), \quad x \in (c, d), \quad (2.6)$$

1-периодическая по ζ функция $z_2(x, \zeta) \in C^2([c, d] \times (-\infty, \infty))$ определяется равенством

$$z_2(x, \zeta) = \int_0^\zeta \left(\int_0^\eta (F(x, \tau) - [F](x) + ([q](x) - q(x, \tau))z(x)) d\tau + b(x) \right) d\eta,$$

где

$$b(x) = - \int_0^1 \int_0^\eta (F(x, \tau) - [F](x) + ([q](x) - q(x, \tau))z(x)) d\tau d\eta.$$

Тогда функция $z^\mu(x) \in C^2[c, d]$, определяемая равенством

$$z^\mu(x) = z(x) + \mu^2 z_2\left(x, \frac{x}{\mu}\right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}^\mu z^\mu := \frac{d^2 z^\mu}{dx^2} + q\left(x, \frac{x}{\mu}\right)z^\mu = F\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + \mu g_\mu\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (c, d),$$

где 1-периодическая по ζ функция $g_\mu(x, \zeta) \in C([c, d] \times (-\infty, \infty))$ определяется равенством

$$g_\mu(x, \zeta) = 2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial \zeta}(x, \zeta) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x, \zeta) \right) z_2(x, \zeta).$$

Из утверждения леммы, в частности, следует, что

$$\|z^\mu - z\|_{C^1[c, d]} + \|\mu g^\mu\|_{C[c, d]} = O(\mu), \quad g^\mu(x) := g_\mu\left(x, \frac{x}{\mu}\right). \quad (2.7)$$

ЛЕММА 4. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, функции $q(x, \zeta)$ и $F(x, \zeta)$ являются 1-периодическими по ζ функциями из $C^{2,0}([c, d] \times (-\infty, \infty))$, функция $z(x)$ является решением краевой задачи (2.6),

$$l_c z = B_c, \quad l_d z = B_d,$$

где $h_c, h_d, H_c, H_d \geq 0$, $h_c + H_c > 0$, $h_d + H_d > 0$.

Тогда для решения краевой задачи

$$\mathcal{L}^\mu z_\mu = F\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (c, d), \quad l_c z_\mu = B_c, \quad l_d z_\mu = B_d$$

справедливо равенство

$$\|z_\mu - z\|_{C^1[c, d]} = O(\mu). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 и (2.7) функция

$$\tilde{z}_\mu(x) = z_\mu(x) - z^\mu(x)$$

удовлетворяет условиям леммы 2 при $\|\tilde{F}\|_{C[a,b]} + |\tilde{B}_c| + |\tilde{B}_d| = O(\mu)$. Следовательно,

$$\|z_\mu - z^\mu\|_{C^2[c,d]} = O(\mu)$$

в силу оценки (2.2). Отсюда и из (2.7) вытекает равенство (2.8).

Из утверждения этой леммы вытекает

ЛЕММА 5. Для решений краевых задач (1.4),

$$\mathcal{L}^\mu U_{\mu,0} = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (a, b), \quad l_a U_{\mu,0} = l_b U_{\mu,0} = 0, \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\mu y_{\mu,-} &= 0, & x \in (a, 0), & \quad l_a y_{\mu,-} = 0, \quad y_{\mu,-}(0) = 1, \\ \mathcal{L}^\mu y_{\mu,+} &= 0, & x \in (0, b), & \quad l_b y_{\mu,+} = 0, \quad y_{\mu,+}(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

справедливо равенство

$$\|U_{\mu,0} - U_0\|_{C^1[a,b]} + \|y_{\mu,-} - y_-\|_{C^1[a,0]} + \|y_{\mu,+} - y_+\|_{C^1[0,b]} = O(\mu). \quad (2.11)$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что

$$U_{\mu,0}(0) \rightarrow U_0(0), \quad (y_{\mu,\pm})'(0) \rightarrow y'_\pm(0), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

3. Построение формального приближения решения методом согласования асимптотических разложений. Так как носитель функции $Q(x/\varepsilon)$ лежит в окрестности нуля порядка ε , то $\mathcal{L}_{\mu,\varepsilon} = \mathcal{L}^\mu$ вне этой окрестности. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [7], вне окрестности нуля внешнее асимптотическое приближение решения краевой задачи (1.1) будем искать в виде

$$U_\mu(x) = U_{\mu,0}(x) + A_\mu \begin{cases} y_{\mu,-}(x), & x \in [a, 0], \\ y_{\mu,+}(x), & x \in (0, b], \end{cases} \quad (3.1)$$

где $U_\mu(x)$, $y_{\mu,\pm}(x)$ – решения краевых задач (2.9), (2.10), а A_μ – пока произвольная (неизвестная) постоянная. В силу условий этих краевых задач

$$\mathcal{L}^\mu U_\mu = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right), \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \quad l_a U_\mu = l_b U_\mu = 0, \quad (3.2)$$

причем,

$$U_\mu \in C[a, b] \cap C^2[a, 0] \cap C^2[0, b]. \quad (3.3)$$

Здесь и всюду далее в записи (3.3) не предполагается совпадение пределов слева и справа в нуле первой производной функции $U_\mu(x)$. Но, с другой стороны, из (3.3) в силу уравнения из (2.9) следует, что

$$U''_\mu(+0) = -q(0, 0)U_\mu(0) - f(0, 0) = U''_\mu(-0). \quad (3.4)$$

Разлагая функцию $U_\mu(x)$ в ряд Тейлора в нуле:

$$U_\mu(x) = U_{\mu,0}(0) + A_\mu + \begin{cases} (U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,-}(0))x + O(x^2), & x < 0, \\ (U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,+}(0))x + O(x^2), & x > 0, \end{cases}$$

и переходя к *внутренней* переменной $\xi = x/\varepsilon$, получаем, что

$$U_\mu(x) = U_{\mu,0}(0) + A_\mu + \begin{cases} \varepsilon(U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,-}(0))\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), & \xi < 0, \\ \varepsilon(U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,+}(0))\xi + O(\varepsilon^2\xi^2), & \xi > 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из равенств (3.5) и метода согласования асимптотических разложений следует, что в окрестности нуля приближение следует искать в виде

$$V_\mu(\xi, \varepsilon) = v_{0,\mu}(\xi) + \varepsilon v_{1,\mu}(\xi), \quad (3.6)$$

требуя от $v_{j,\mu}(\xi)$ следующего поведения на бесконечности:

$$v_{0,\mu}(\xi) \sim U_{\mu,0}(0) + A_\mu, \quad \xi \rightarrow \mp\infty. \quad (3.7)$$

$$v_{1,\mu}(\xi) \sim \begin{cases} (U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,-}(0))\xi, & \xi \rightarrow -\infty, \\ (U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,+}(0))\xi, & \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.8)$$

Выпишем уравнения на коэффициенты $v_{j,\mu}(\xi)$. Так как $d^2/dx^2 = \varepsilon^{-2} d^2/d\xi^2$, то в силу (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu,\varepsilon} V_\mu\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= \varepsilon^{-2} \frac{d^2 v_{0,\mu}}{d\xi^2} + \varepsilon^{-1} \left(\frac{d^2 v_{1,\mu}}{d\xi^2} + Q(\xi) v_{0,\mu}(\xi) \right) \\ &\quad + q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) v_{0,\mu}(\xi) + Q(\xi) v_{1,\mu}(\xi) + \varepsilon q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) v_{1,\mu}(\xi). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

ЛЕММА 6. Если функции $v_{j,\mu}(\xi)$ являются решениями уравнений

$$\frac{d^2 v_{0,\mu}}{d\xi^2} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2 v_{1,\mu}}{d\xi^2} = -Q(\xi) v_{0,\mu}(\xi), \quad (3.10)$$

то справедливо равенство

$$\mathcal{L}_{\mu,\varepsilon} V_\mu\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) v_{0,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_{1,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) v_{1,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.11)$$

Очевидно, что функция

$$v_{0,\mu}(\xi) \equiv U_\mu(0) = U_{\mu,0}(0) + A_\mu \quad (3.12)$$

является решением уравнения (3.9) с асимптотикой (3.7).

Подставляя (3.12) в правую часть уравнения (3.10), получаем, что функция

$$v_{1,\mu}(\xi) = -U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^t Q(\tau) d\tau dt + c_\mu \xi = -U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\xi} Q(\tau) \int_{\tau}^{\xi} dt d\tau + c_\mu \xi \quad (3.13)$$

является решением этого уравнения при любых числах c_μ и

$$v_{1,\mu}(\xi) = \begin{cases} c_\mu \xi, & \xi \rightarrow -\infty, \\ (c_\mu - (U_{\mu,0}(0) + A_\mu)\langle Q \rangle)\xi + C_\mu, & \xi \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

где

$$C_\mu = U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tau Q(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Приравнивая в (3.14) и (3.8) коэффициенты при $\xi \rightarrow \mp\infty$, получаем систему уравнений для c_μ и A_μ :

$$c_\mu = U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,-}(0) = U'_\mu(-0), \quad (3.16)$$

$$c_\mu - (U_{\mu,0}(0) + A_\mu)\langle Q \rangle = U'_{\mu,0}(0) + A_\mu y'_{\mu,+}(0) = U'_\mu(+0). \quad (3.17)$$

Отсюда находим, что

$$A_\mu = -\frac{U_{\mu,0}(0)\langle Q \rangle}{y'_{\mu,+}(0) - y'_{\mu,-}(0) + \langle Q \rangle}. \quad (3.18)$$

Заметим, что интегрируя по частям левые части равенств

$$\int_a^0 y_{\mu,-}(x) \mathcal{L}^\mu y_{\mu,-}(x) dx = 0, \quad \int_0^b y_{\mu,+}(x) \mathcal{L}^\mu y_{\mu,+}(x) dx = 0,$$

в силу граничных условий для $y_{\mu,\mp}(x)$ получаем, что $\pm y'_{\mu,\mp}(0) > 0$. И, следовательно, знаменатель в (3.18) отличен от нуля.

Таким образом, выбрав A_μ и c_μ в соответствии с (3.18) и (3.16), во-первых, окончательно определили $U_\mu(x)$ и $v_{i,\mu}(\xi)$ из (3.1), (3.12) и (3.13), а во-вторых, добились равенств (3.7) и (3.8).

Более того, так как $Q(\tau) \in C_0(-\infty, \infty)$, то из (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17) вытекает, что

$$v_{1,\mu}(\xi) \equiv \begin{cases} U'_\mu(-0)\xi & \text{при } \xi \text{ левее } \operatorname{supp} Q(\xi), \\ U'_\mu(+0)\xi + C_\mu & \text{при } \xi \text{ правее } \operatorname{supp} Q(\xi). \end{cases} \quad (3.19)$$

4. Доказательство теоремы 1. Из равенств (3.18), (2.12) и (1.3) вытекает, что

$$A_\mu = A + O(\mu). \quad (4.1)$$

Отсюда и из (3.1), (1.2) и (2.11) получаем, что

$$\|U_\mu - U\|_{C[a,b]} = O(\mu), \quad (4.2)$$

$$\|U_\mu - U\|_{C^1[a,0]} + \|U_\mu - U\|_{C^1[0,b]} = O(\mu). \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вычитая (3.16) из (3.17), учитывая (3.12) и переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, в силу (4.3) получаем равенство (1.5).

Обозначим

$$\tilde{v}_{1,\mu}(\xi) := \begin{cases} v_{1,\mu}(\xi) - U'_\mu(-0)\xi, & \xi < 0, \\ v_{1,\mu}(\xi) - U'_\mu(+0)\xi, & \xi > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Тогда из (3.19) и (3.15) следует, что

$$\tilde{v}_{1,\mu}(\xi) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \text{ левее } \operatorname{supp} Q(\xi), \\ U_\mu(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tau Q(\tau) d\tau & \text{при } \xi \text{ правее } \operatorname{supp} Q(\xi). \end{cases} \quad (4.5)$$

Далее, в силу (3.13), (3.16), (2.11) и (4.1) следует, что

$$\|\tilde{v}_{1,\mu}\|_{C(\operatorname{supp} Q(\xi))} = O(1).$$

Отсюда и из (4.5) и (4.2) получаем, что

$$\|\tilde{v}_{1,\mu}\|_{C(-\infty, \infty)} = O(1), \quad l_a \tilde{v}_{1,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0, \quad l_b \tilde{v}_{1,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = O(1). \quad (4.6)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2,\mu}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^t v_{1,\mu}(\tau) Q(\tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^{\xi} v_{1,\mu}(\tau) Q(\tau) \int_{\tau}^{\xi} dt d\tau \\ &= \xi \int_{-\infty}^{\xi} v_{1,\mu}(\tau) Q(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\xi} \tau v_{1,\mu}(\tau) Q(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда, так как $Q(\tau) \in C_0(-\infty, \infty)$, то

$$\|\tilde{v}_{2,\mu}\|_{C[\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b]} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \|\tilde{v}_{2,\mu}\|_{C[\operatorname{supp} Q(\xi)]} = O(1), \quad (4.8)$$

$$l_a \tilde{v}_{2,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0, \quad l_b \tilde{v}_{2,\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{-1}) \quad (4.9)$$

равномерно по μ в силу определения (4.7) и равенств (3.13), (3.16), (2.11), (4.1) и (4.2).

Сумму внешнего и внутреннего приближений, из которой вычтены согласованные члены, обозначим

$$Z_\mu(x, \xi, \varepsilon) := U_\mu(x) + V_\mu(\xi, \varepsilon) - \left(U_\mu(0) + \begin{cases} U'_\mu(-0)x, & x \leq 0, \\ U'_\mu(+0)x, & x > 0 \end{cases} \right). \quad (4.10)$$

Так как $V_\mu(\xi, \varepsilon) \in C^2(-\infty, \infty)$ в силу (3.6), (3.12) и (3.13), то из (3.3) и (3.4) следует, что

$$Z_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \in C^2[a, b]. \quad (4.11)$$

В силу (4.10), (3.6), (3.12) и (4.4) имеем

$$Z_\mu(x, \xi, \varepsilon) = U_\mu(x) + \varepsilon \tilde{v}_{1,\mu}(\xi).$$

Отсюда и из равенств (4.6) вытекает, что

$$l_a Z_\mu = 0, \quad l_b Z_\mu = O(\varepsilon) \quad (4.12)$$

равномерно по μ и

$$Z_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = U_\mu(x) + O(\varepsilon) \quad (4.13)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ .

Из определения (4.10), уравнения из (3.2) и равенств (3.11), (3.12) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu, \varepsilon} Z_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \\ = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_{1, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon q\left(x, \frac{x}{\mu}\right) \tilde{v}_{1, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) I_\mu(x), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$I_\mu(x) = U_\mu(x) - U_\mu(0) - \begin{cases} U'_\mu(-0)x, & x \leq 0, \\ U'_\mu(+0)x, & x > 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Так как $|U_\mu(0)| \leq C$, где постоянная C не зависит от μ в силу (4.2), то из (3.2) и леммы 2 следует, что

$$\|U_\mu\|_{C^2[a, 0]} + \|U_\mu\|_{C^2[0, b]} \leq C_1,$$

где постоянная C_1 не зависит от μ . Следовательно, с учетом (4.15) получаем, что $I_\mu(x) = O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ . Поэтому, так как носитель функции $Q(x/\varepsilon)$ лежит в окрестности нуля порядка ε , то

$$\varepsilon^{-1} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) I_\mu(x) = O(\varepsilon)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ . Из (4.14), (4.6) и последнего равенства вытекает равенство

$$\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon} Z_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_{1, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \quad (4.16)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ .

Слагаемое $Q(x/\varepsilon) v_{1, \mu}(x/\varepsilon) = Q(\xi) v_{1, \mu}(\xi)$ в правой части равенства (4.16) является невязкой порядка $O(1)$. Избавимся от нее. Функция $\tilde{v}_{2, \mu}$, определенная равенством (4.7), очевидно, является решением уравнения

$$\frac{d^2 \tilde{v}_{2, \mu}}{d\xi^2} = Q(\xi) v_{1, \mu}(\xi). \quad (4.17)$$

В силу (4.17), (4.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}\left(\varepsilon^2 \tilde{v}_{2, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) &= Q(\xi) v_{1, \mu}(\xi) + \varepsilon^2 q(x, \xi) \tilde{v}_{2, \mu}(\xi) + \varepsilon Q(\xi) \tilde{v}_{2, \mu}(\xi) \\ &= Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_{1, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.18)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ .

Обозначим

$$W_\mu(x, \varepsilon) := Z_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - \varepsilon^2 \tilde{v}_{2, \mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$W_\mu\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \in C^2[a, b]$$

в силу (4.11), (4.7) и

$$\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon} W_\mu(x, \varepsilon) = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right) + O(\varepsilon), \quad (4.19)$$

$$W_\mu(x, \varepsilon) = U_\mu(x) + O(\varepsilon) \quad (4.20)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ в силу (4.16), (4.18) и (4.13), (4.8), соответственно, а

$$l_a W_\mu = O(\varepsilon), \quad l_b W_\mu = O(\varepsilon) \quad (4.21)$$

равномерно по μ в силу (4.12) и (4.9).

Из (1.1) и (4.19), (4.21) следует, что

$$\mathcal{L}_{\mu, \varepsilon}(u_{\mu, \varepsilon} - W_\mu) = O(\varepsilon)$$

по норме $C[a, b]$ равномерно по μ и

$$l_a(u_{\mu, \varepsilon} - W_\mu) = O(\varepsilon), \quad l_b(u_{\mu, \varepsilon} - W_\mu) = O(\varepsilon)$$

равномерно по μ . Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\|u_{\mu, \varepsilon} - W_\mu\|_{C[a, b]} = O(\varepsilon)$$

равномерно по μ . Из последнего равенства и равенства (4.20) получаем, что

$$\|u_{\mu, \varepsilon} - U_\mu\|_{C[a, b]} = O(\varepsilon)$$

равномерно по μ . И, наконец, отсюда и из (4.2) вытекает справедливость утверждения теоремы 1.

Автор выражает признательность А. М. Савчуку, Г. А. Чечкину и Ф. Гестеи за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М., 2009.
- [2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984.
- [3] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990.
- [4] А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике*, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2004.
- [5] Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник, Т. С. Соболева, “О собственных колебаниях струны с присоединенной массой”, *Сиб. матем. журн.*, **29**:5 (1988), 71–91.
- [6] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области*, Изд-во Тбилисск. ун-та, Тбилиси, 1981.

- [7] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [8] С. Альбеверлио, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991.
- [9] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, W. Kirch, “On point interactions one dimension”, *J. Operator Theory*, **12**:1 (1984), 101–126.
- [10] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912.
- [11] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976.

Т. Р. Гадыльшин

Уфимский государственный авиационный

технический университет

E-mail: gtimr@yandex.ru

Поступило

10.07.2014

Исправленный вариант

10.02.2015