Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Медет Нурсултанов, Спектральные свойства оператора Шрёдингера с δ -распределением, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 256–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:13:29

Спектральные свойства оператора Шрёдингера с δ -распределением

Медет Нурсултанов

Для одномерного оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями получены двусторонние оценки функции распределения собственных чисел и критерий дискретности спектра в терминах функции Отелбаева. Доказан критерий принадлежности резольвенты рассматриваемого оператора классу $\mathfrak{S}_p$.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, полуограниченность снизу функции распределения собственных чисел, дискретность, точечные взаимодействия.

DOI: 10.4213/mzm10543

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность положительных чисел, а $T = \{t_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset (0, +\infty)$ – возрастающая последовательность такая, что $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим оператор

$$L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (1.1)$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ с областью определения

$$D(L_0) = \left\{ y \in W_2^1(\mathbb{R}_+) : y'(0) = 0, y \in W_2^2(\mathbb{R}_+ \setminus T), \sum_{i=1}^{+\infty} c_i |y(t_i)|^2 < +\infty, \right. \\ \left. y'(t_i + 0) - y'(t_i - 0) = c_i y(t_i), i \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.2)$$

Данный оператор является симметрическим положительно определенным оператором с квадратичной формой

$$(L_0 y, y) = \int_{\mathbb{R}_+} |y'(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i |y(t_i)|^2.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 4080/ГФ-4).

Обозначим через L его самосопряженное расширение. Этот оператор ассоциируется с дифференциальным выражением вида

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \delta(x - t_i). \quad (1.3)$$

Подобные операторы возникали при изучении движения нейтронов в жидких средах [1] и в других задачах [2]. В работе [3] было дано математическое толкование точечных взаимодействий в рамках теории расширения абстрактных операторов.

Спектральные свойства оператора L изучались в работах [4]–[14]. Так в [5] и [10] были получены критерии дискретности спектра в терминах якобиевых матриц. В [10] показано, что если $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ полуограниченная снизу последовательность вещественных чисел и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k - t_{k-1}) = 0, \quad (1.4)$$

то свойства самосопряженности, полуограниченности снизу и дискретности спектра оператора L эквивалентны соответствующим свойствам матрицы M_L вида

$$M_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1^2} \left(c_1 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) & \frac{1}{r_1 r_2 d_2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{r_1 r_2 d_2} & \frac{1}{r_2^2} \left(c_2 + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} \right) & \frac{1}{r_2 r_3 d_3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{r_2 r_3 d_3} & \frac{1}{r_3^2} \left(c_3 + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} \right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $d_n = t_n - t_{n-1}$, $r_n = \sqrt{d_n + d_{n+1}}$. Отметим, что условие (1.4) является необходимым для дискретности спектра оператора L .

В случае, когда $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность положительных чисел, в работе [9] получен критерий дискретности молчановского типа, т.е. спектр оператора L будет дискретным тогда и только тогда, когда для любого $d > 0$ имеет место

$$\sum_{t_k \in [x, x+d]} c_k \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Отметим также работу [15], где рассматривается оператор с δ -взаимодействиями в многомерном случае.

В данной работе получены двусторонние оценки функции распределения собственных чисел и как следствие, критерии дискретности спектра в терминах функции Отелбаева, а также доказан критерий принадлежности оператора L^{-1} пространству $\mathfrak{S}_p$.

Методы доказательства основных результатов связаны с работами Отелбаева [16], [17].

2. Функция Отелбаева. Пусть $T = \{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $C = \{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательности, введенные ранее. Для потенциала

$$q(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \delta(x - t_k)$$

определим функцию

$$q^*(x) = q_L^*(x) := \inf_{d>0} \left\{ d^{-2} : \sum_{t_k \in \Delta(d,x)} c_k \leq d^{-1} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\Delta(d, x) = [x - d/2, x + d/2]$, $x \in \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 1. *Функция $q^*(x)$, определенная равенством (2.1), положительна и непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathbb{R}_+$. При достаточно малом $d > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{t_k \in \Delta(d,x)} c_k \leq d^{-1},$$

следовательно, $q^*(x) > 0$.

Рассмотрим функцию

$$g(x, d) = \sum_{t_k \in \Delta(d,x)} c_k - \frac{1}{d},$$

здесь $d > 0$, $x \geq 0$. Обозначим

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{q^*(x)}}.$$

В силу положительности $q^*(x)$ достаточно доказать непрерывность функции $d(x)$. Заметим, что $g(x, d) < 0$ при $d < d(x)$ и $g(x, d) > 0$ при $d > d(x)$. Легко видеть, что $g(x, d)$ монотонно возрастает по переменной d и непрерывна вне множества

$$G = \left\{ (x, d) : x \pm \frac{d}{2} = t_k, k = 1, 2, \dots \right\}$$

как функция двух переменных.

Пусть $\varepsilon > 0$, $x_0 > 0$. Очевидно, что существует $0 < b < \min(\varepsilon, d(x_0))$ такое, что $(x_0, d(x_0) - b)$, $(x_0, d(x_0) + b)$ являются точками непрерывности функции g . Причем, $g(x_0, d(x_0) - b) < 0$, $g(x_0, d(x_0) + b) > 0$. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что $g(x, d(x_0) - b) < 0$, $g(x, d(x_0) + b) > 0$ для $x \in \Delta(2\delta, x_0)$. Но тогда

$$d(x_0) - b \leq d(x) \leq d(x_0) + b.$$

Откуда следует

$$|d(x) - d(x_0)| < b \leq \varepsilon,$$

тем самым утверждение доказано.

ЛЕММА 2. *Пусть $d > 0$, $z \in \mathbb{R}_+$. Если $\sqrt{q^*(z)} \leq 1/(2d)$, то для любого $x \in \Delta(d, z)$ верно неравенство*

$$\sqrt{q^*(x)} \leq \frac{1}{d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы и определения q^* имеем

$$\frac{1}{2d} \geq \sqrt{q^*(z)} \geq \sum_{t_k \in \Delta(1/\sqrt{q^*(z)}, z)} c_k.$$

В силу положительности c_k верна оценка

$$\sum_{t_k \in \Delta(1/\sqrt{q^*(z)}, z)} c_k \geq \sum_{t_k \in \Delta(2d, z)} c_k.$$

Таким образом, для $x \in \Delta(d, z)$ получим неравенство

$$\sum_{t_k \in \Delta(d, x)} c_k \leq \sum_{t_k \in \Delta(2d, z)} c_k \leq \frac{1}{2d} \leq \frac{1}{d},$$

которое завершает доказательство леммы.

3. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3. Пусть A – самосопряженный неотрицательный оператор. Тогда количество собственных чисел оператора A , меньших λ , равно максимальной размерности подпространства $G \subseteq D(A)$, на котором $(Au, u) < \lambda(u, u)$, $u \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 3 легко вытекает из принципа минимакса (см. [18]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция распределения собственных чисел $N(\lambda)$ оператора A определяется как количество собственных чисел, меньших λ , с учетом их кратности.

Отметим, что функция $N(\lambda)$ может принимать значение $+\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A и B – самосопряженные неотрицательные операторы такие, что $A \leq B$. Тогда для $\lambda > 0$

$$N_A(\lambda) \geq N_B(\lambda).$$

Пусть Δ – отрезок, $A(\Delta)$ – множество абсолютно сходящихся тригонометрических рядов $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i(2\pi/|\Delta|)kx}$, где $|\Delta|$ – длина отрезка. Далее, $A(\Delta)$ есть линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{A(\Delta)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|.$$

ЛЕММА 4. Имеет место вложение $W_2^1(\Delta) \hookrightarrow A(\Delta)$.

ЛЕММА 5. Пусть оператор L определен соотношениями (1.1), (1.2), число $d > 0$ такое, что $id \neq t_l$, где $i, l \in \mathbb{N}$. Обозначим через L_i оператор на $\Delta^i = [(i-1)d, id]$, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и с областью определения

$$D(L_i) = \{y \in W_2^1[(i-1)d, id] : y'((i-1)d) = y'(id) = 0, y \in W_2^2([(i-1)d, id] \setminus T), \\ y'(t_l + 0) - y'(t_l - 0) = c_l y(t_l), t_l \in \Delta^i\}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$N(\lambda) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\lambda),$$

где $N(\lambda)$ и $N_i(\lambda)$ – функции распределения собственных чисел операторов L и L_i соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda > 0$ и $N(\lambda) = m$. Тогда существует линейно независимая ортогональная система собственных функций $y_1, y_2, \dots, y_m$, соответствующих собственным значениям $\lambda_i < \lambda$, где $i = 1, \dots, m$. Тогда для любой линейной комбинации $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$ имеет место неравенство

$$(Ly, y) < \lambda(y, y). \quad (3.1)$$

Далее, для $1 \leq k \leq m$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} (L_i y_k, y_k)_{\Delta^i} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\int_{\Delta^i} |y'_k(x)|^2 dx + \sum_{t_j \in \Delta^i} c_j |y_k(t_j)|^2 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} |y'_k(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j |y_k(t_j)|^2 = (Ly_k, y_k) < \lambda(y_k, y_k) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} |y_k(x)|^2 dx = \lambda \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\Delta^i} |y_k(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(y_k, y_k)_{\Delta^i}. \end{aligned}$$

То есть верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (L_i y_k, y_k)_{\Delta^i} < \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(y_k, y_k)_{\Delta^i}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

Откуда получаем, что для y_1 найдется i_1 такое, что $y_1|_{\Delta^{i_1}}$ не равно тождественно нулю¹ и выполняется неравенство

$$(L_{i_1} y_1, y_1)_{\Delta^{i_1}} < \lambda(y_1, y_1)_{\Delta^{i_1}}.$$

Тогда из леммы 3 следует, что $\sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\lambda) \geq N_{i_1}(\lambda) \geq 1$. Теперь если $y_1|_{\Delta^{i_1}}$ линейно зависим с $y_j|_{\Delta^{i_1}}$ для некоторых $j > 1$, т.е. $y_j = \alpha_j y_1$ на Δ^{i_1} , то переходим к новой системе, где y_j заменим на $y_j - \alpha_j y_1$. Заметим, что полученная система линейно независима, для ее элементов выполнено неравенство (3.2) и при $j > 1$ функция $y_j|_{\Delta^{i_1}}$ либо линейно независима с $y_1|_{\Delta^{i_1}}$ либо тождественно равна нулю. Аналогично из (3.2) для y_2 найдется i_2 такое, что $y_2|_{\Delta^{i_2}}$ не равно тождественно нулю и выполняется неравенство

$$(L_{i_2} y_2, y_2)_{\Delta^{i_2}} < \lambda(y_2, y_2)_{\Delta^{i_2}}.$$

Если отрезки Δ^{i_1} и Δ^{i_2} совпадают, то $y_2|_{\Delta^{i_2}}$ и $y_1|_{\Delta^{i_2}}$ линейно независимы. То есть получаем, что $N_{i_1}(\lambda) \geq 2$ при $i_1 = i_2$ и $N_{i_1}(\lambda) + N_{i_2}(\lambda) \geq 2$ при $i_1 \neq i_2$, откуда

¹ $y|_{\Delta}$ – сужение функции y на множество Δ .

следует, что $\sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\lambda) \geq 2$. Аналогично, если $y_2|_{\Delta^{i_2}}$ и $y_j|_{\Delta^{i_2}}$ линейно зависимы для некоторых $j > 2$, т.е. $y_j = \beta_j y_2$ на Δ^{i_2} , то переходим к новой системе, где y_j заменим на $y_j - \beta_j y_2$. Повторяя этот процесс, получим

$$\sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\lambda) \geq m = N(\lambda).$$

4. Оценки функций распределения $N(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N(\lambda)$ – функция распределения собственных чисел оператора L . Тогда имеет место неравенство²

$$N(\lambda) \leq \pi \sqrt{\lambda} \operatorname{mes}\{x : q^*(x) \leq \pi^2 \lambda\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda > 0$; разобьем $\mathbb{R}_+$ на отрезки длины $d = 2/(\pi\sqrt{\lambda})$. Не уменьшая общности, можем считать, что $\{kd\}_{k=1}^{+\infty} \cap T = \emptyset$. Обозначим через L_k операторы на $\Delta^k = [(k-1)d, kd]$, порожденные дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, с краевым условием $y'((k-1)d) = y'(kd) = 0$ и областью определения

$$D(L_k) = \{y \in W_2^1[(k-1)d, kd] : y'((k-1)d) = y'(kd) = 0, y \in W_2^2(\Delta^k \setminus T), \\ y'(t_j + 0) - y'(t_j - 0) = c_j y(t_j), t_j \in \Delta^k\}.$$

Согласно лемме 5 имеем

$$N(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} N_k(\lambda).$$

Рассмотрим те функции $y \in D(L_k)$, для которых имеет место оценка

$$\int_{\Delta^k} |y'(x)|^2 dx \leq \lambda \int_{\Delta^k} |y(x)|^2 dx. \quad (4.1)$$

Если окажется, что множество функций из $D(L_k)$, удовлетворяющих условию (4.1), пусто, т.е.

$$(L_k y, y)_{\Delta^k} \geq \int_{\Delta^k} |y'(x)|^2 dx > \lambda \int_{\Delta^k} |y(x)|^2 dx = \lambda(y, y)_{\Delta^k},$$

то в этом случае $N_k(\lambda) = 0$. Поэтому мы будем рассматривать только те индексы m , для которых множество функции $y \in D(L_m)$, удовлетворяющих условию (4.1), не пусто. Разложим y в ряд Фурье. Тогда согласно лемме 4 имеем

$$y(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varphi_j(x),$$

где $x \in \Delta^m$, $\varphi_j(x) = 1/\sqrt{d} e^{i(2\pi j/d)x}$. Из равенства Парсеваля и (4.1) получим

$$(2\pi d^{-1})^2 \sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 = \int_{\Delta^k} |y'(x)|^2 dx \leq \left(\frac{\pi}{2} d\right)^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2.$$

²Из леммы 1 следует, что функция q^* измерима.

Следовательно,

$$(\pi^4 - 1) \sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \leq |a_0|^2. \quad (4.2)$$

Тогда из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\sum_{k \neq 0} |a_k| \leq \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq (\pi^4 - 1)^{1/2} \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq |a_0|. \quad (4.3)$$

Теперь оценим снизу $\sum_{t_j \in \Delta_m} c_j |y(t_j)|^2$:

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 \geq \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) \min_{t_j \in \Delta^m} |y(t_j)|^2 = \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) \min_{t_j \in \Delta^m} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{\sqrt{d}} e^{i(2\pi n/d)t_j} \right|^2.$$

Учитывая (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 &\geq \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) \left(|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \right)^2 \frac{1}{d} \\ &\geq \frac{1}{d} \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) \left(|a_0|^2 - 2|a_0| \sum_{k \neq 0} |a_k| \right). \end{aligned}$$

Опять применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 &\geq \frac{1}{d} \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) |a_0| \left(|a_0| - 2 \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \neq 0} k^{-2} \right)^{1/2} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) |a_0| \left(|a_0| - 2 \left(\sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \right)^{1/2} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (4.2), получим

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 \geq \frac{1}{d} \left(\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \right) |a_0| \left(|a_0| - 2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi^4 - 1}} |a_0| \right).$$

Если

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \geq d^{-1},$$

то имеем

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 \geq |a_0|^2 d^{-2} \left(1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}(\pi^4 - 1)} \right) = \lambda |a_0|^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}(\pi^4 - 1)} \right).$$

Тогда из последнего неравенства получим

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 > \lambda |a_0|^2.$$

Следовательно,

$$(L_m y, y) = \int_{\Delta^m} |y'|^2 + \sum_{t_j \in \Delta^m} c_j |y(t_j)|^2 \geq \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2 \sum_{k \neq 0} |a_k|^2 + \lambda |a_0|^2 > \lambda(y, y),$$

т.е. $N_m(\lambda) = 0$, как только

$$\sum_{t_j \in \Delta^m} c_j \geq d^{-1}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$N(\lambda) \leq \sum_{\sum_{t_j \in \Delta^k} c_j \leq d^{-1}} N_k(\lambda).$$

С другой стороны, собственные числа оператора $\tilde{L}_k y = -y''(x)$, $x \in \Delta^k$, с крайевыми условиями $y'((k-1)d) = y'(kd) = 0$ равны $((2\pi k)/d)^2$, $k = 0, 1, \dots$. Отсюда с учетом того, что $((2\pi k)/d)^2 > \lambda$, $k = 1, 2, \dots$, вытекает, что $\tilde{N}_k(\lambda) = 1$.

Из следствия 1 получаем, что $N_k(\lambda) \leq \tilde{N}_k(\lambda)$. Откуда следует неравенство

$$N(\lambda) \leq \sum_{\sum_{t_j \in \Delta^k} c_j \leq d^{-1}} \tilde{N}_k(\lambda) \leq \sum_{\sum_{t_j \in \Delta^k} c_j \leq d^{-1}} 1.$$

Обозначим $\tilde{\Delta}^k = [(k-1)d + d/4, kd - d/4]$. Тогда верны оценки

$$\sum_{t_j \in \tilde{\Delta}^k} c_j \leq \sum_{t_j \in \Delta^k} c_j \leq \frac{2}{d}.$$

Следовательно, получаем, что для любого $z \in \tilde{\Delta}^k$ имеет место неравенство

$$q^*(z) \leq \left(\frac{2}{d}\right)^2.$$

Таким образом,

$$1 = \frac{2}{d} \text{mes}(\tilde{\Delta}^k) \leq \frac{2}{d} \text{mes}\left\{x \in \Delta^k : q^*(x) \leq \left(\frac{d}{2}\right)^{-2}\right\}.$$

То есть верно

$$N(\lambda) \leq \frac{2}{d} \sum \text{mes}\left\{x \in \Delta^k : q^*(x) \leq \left(\frac{d}{2}\right)^{-2}\right\} \leq \frac{2}{d} \text{mes}\left\{x \in R : q^*(x) \leq \left(\frac{d}{2}\right)^{-2}\right\}.$$

Принимая во внимание, что $d = 2/(\pi\sqrt{\lambda})$, получаем нужное неравенство:

$$N(\lambda) \leq \pi\sqrt{\lambda} \text{mes}\{x : q^*(x) \leq \pi^2\lambda\}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $z > 0$, $d > 0$, $\Delta = [z, z + d]$. Если $\xi \in \Delta$ такое, что $1/(2d) \geq \sqrt{q^*(\xi)}$. Тогда найдется функция $w \in D(L)$ такая, что $\text{supp}(w) \subset \Delta$, и удовлетворяющая неравенству

$$(Lw, w) \leq 4(\pi^2 + 1)d^{-2}(w, w). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы и определения функции q^* имеем

$$\frac{1}{2d} \geq \sqrt{q^*(\xi)} \geq \sum_{t_k \in \Delta(1/\sqrt{q^*(\xi)}, \xi)} c_k \geq \sum_{t_k \in \Delta} c_k. \quad (4.5)$$

Рассмотрим следующую функцию w :

$$w(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{2\pi(x-z)}{d} + \int_z^x \varphi(s) ds, & x \in [z, z+d], \\ 0, & x \notin [z, z+d], \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ строится следующим образом. Пусть $\{t_i\}_{i=q+1}^{q+k} \subset T$ — точки, принадлежащие отрезку Δ . Переобозначим их через $\{s_i\}_{i=1}^k$ и положим $s_0 = z$, $s_{k+1} = z + d$, $\Delta_i = [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{c}_i = c_{q+i}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда положим $\varphi(x)$ равным 0 на Δ_1 . Теперь определим $\varphi(x)$ на Δ_i , $i = 2, \dots, k+1$:

- 1) $\varphi(x)$ линейна на Δ_i ;
- 2) $\varphi(s_i + 0) = \varphi(s_i - 0) + \tilde{c}_{i-1}(1 - \cos 2\pi(s_{i-1} - z)/d)$;
- 3) $\varphi((s_i + s_{i+1})/2) = 0$.

Очевидно, что $\int_z^{s_i} \varphi(s) ds = 0$ при $i = 0, 1, \dots, k+1$. Легко видеть, что $w \in D(L)$. Из определения φ видно, что

$$|\varphi(x)| \leq 2 \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i = 2 \sum_{t_i \in \Delta} c_i. \quad (4.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (Lw, w) &= \int_{\Delta} \left(\frac{2\pi}{d} \sin \frac{2\pi(x+z)}{d} + \varphi(x) \right)^2 dx + \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i w^2(s_i) \\ &\leq 2 \int_{\Delta} \left(\left(\frac{2\pi}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi(x+z)}{d} \right) dx + 2 \left(\sum_{i=1}^k \tilde{c}_i \right)^2 d + 4 \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i. \end{aligned}$$

Учитывая (4.5), получим

$$(Lw, w) \leq \left(\frac{2\pi}{d} \right)^2 d + 2d^{-1} + 2d^{-1} = \frac{4}{d}(\pi^2 + 1). \quad (4.7)$$

Теперь оценим

$$\begin{aligned} \sqrt{(w, w)} &= \left(\int_{\Delta} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\Delta} \left(1 - \cos \frac{2\pi(x-z)}{d} + \int_z^x \varphi(s) ds \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\geq \left(\int_{\Delta} \left(1 - \cos \frac{2\pi(x-z)}{d} \right)^2 dx \right)^{1/2} - \left(\int_{\Delta} \left(\int_z^x \varphi(s) ds \right)^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Но из (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Delta} \left(\int_z^x \varphi(s) ds \right)^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^k \tilde{c}_i \right)^2 (x-z)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2d} \left(\int_{\Delta} (x-z)^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{12} d \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя это в (4.8), получим

$$(w, w) \geq \left(\sqrt{\frac{3d}{2}} - \sqrt{\frac{d}{12}} \right)^2 > d.$$

Откуда с учетом (4.7) получаем требуемое

$$(Lw, w) \leq 4(\pi^2 + 1)d^{-2}(w, w).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N(\lambda)$ – функция распределения оператора L . Тогда имеет место оценка

$$N(\lambda) \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\pi^2 + 1}} \text{mes} \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq \frac{\lambda}{16(\pi^2 + 1)} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda > 0$; разобьем I на отрезки Δ_i длины $d = 1/\sqrt{\lambda}$. Тогда из леммы 6 следует, что для всех отрезков, имеющих непустое пересечение с множеством $\{x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq d^{-2}/4 = \lambda/4\}$, найдутся линейно независимые функции из $D(L)$, для которых имеет место неравенство (4.4). Поэтому, используя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} N(4(\pi^2 + 1)\lambda) &\geq \sum_{\Delta_j \cap \{x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq \lambda/4\} \neq \emptyset} 1 = d^{-1} \sum_{\Delta_j \cap \{x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq \lambda/4\} \neq \emptyset} d \\ &\geq \sqrt{\lambda} \text{mes} \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq \frac{\lambda}{4} \right\}. \end{aligned}$$

5. Критерий дискретности спектра.

ТЕОРЕМА 3. Спектр оператора L дискретен тогда и только тогда, когда

$$q^*(x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q^*(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Из теоремы 1 получаем

$$N(\lambda) \leq \pi\sqrt{\lambda} \text{mes}\{x \in \mathbb{R}_+ : q^*(x) \leq \pi^2\lambda\} < +\infty,$$

т.е. спектр дискретен.

Обратно. Пусть спектр оператора L дискретен. Тогда $N(\lambda) < +\infty$. Предположим, что $q^*(x) \nrightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда существует последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{+\infty}$ и константа $C > 0$ такие, что $x_j \rightarrow +\infty$ и $q^*(x_j) \leq C$. Следовательно, по лемме 2 верна оценка

$$q^*(x) \leq 4C,$$

для $x \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta(1/(2\sqrt{C}), x_i)$. Таким образом, из теоремы 2 имеем

$$N(64C(\pi^2 + 1)) \geq 4\sqrt{C} \text{mes}\{x : q^*(x) \leq 4C\} > \text{mes} \left\{ \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta\left(\frac{1}{2\sqrt{C}}, x_i\right) \right\} = +\infty.$$

Последнее соотношение следует из того, что $x_i \rightarrow +\infty$. Данное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Следующее утверждение было доказано в [9]; здесь мы приводим другое доказательство с использованием теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Спектр оператора L дискретен тогда и только тогда, когда для любого $d > 0$ имеет место*

$$\sum_{t_k \in [z, z+d]} c_k \rightarrow +\infty \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условие (5.2) эквивалентно условию $q^*(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Пусть $q^*(x) \nrightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда существует последовательность x_n и константа $C > 0$ такие, что $q^*(x_n) \leq C$ и $x_n \rightarrow +\infty$. Следовательно, имеем

$$\sum_{t_k \in \Delta(1/\sqrt{C}, x_n)} c_k \leq \sqrt{q^*(x_n)} \leq \sqrt{C}.$$

Последнее соотношение противоречит (5.2).

Пусть теперь (5.2) не выполняется. Тогда существуют константы $C > 0$, $d > 0$ и возрастающая последовательность положительных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, стремящаяся к бесконечности такие, что

$$\sum_{t_k \in \Delta(d, x_n)} c_k < C.$$

Допустим $q^*(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, найдется такой номер n , начиная с которого $1/\sqrt{q^*(x_n)} < d$, но тогда

$$\sqrt{q^*(x_n)} \leq \sum_{t_k \in \Delta(d, x_n)} c_k < C,$$

т.е. (5.1) не выполняется.

6. Критерий принадлежности пространству $\mathfrak{S}_p$. Пусть $0 < p \leq +\infty$. Через $\mathfrak{S}_p$ обозначим множество вполне непрерывных операторов A таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^p(A) < +\infty,$$

где $s_k(A)$ – собственные числа оператора $(A^*A)^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $p > 1/2$ и $q_L^*(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда для того, чтобы $L^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, необходимо и достаточно*

$$\int_0^{+\infty} (q^*(x))^{1/2-p} dx < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то L – положительный оператор; следовательно, существует ограниченный обратный оператор L^{-1} . Из того, что $q_L^*(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, по теореме 3 получаем, что L^{-1} – вполне непрерывный оператор.

Заметим, что для $k \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\int_0^{\lambda_k - \delta} \frac{dN(\lambda)}{\lambda^p} \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{\lambda_n^p} \leq \int_0^{\lambda_k + \delta} \frac{dN(\lambda)}{\lambda^p},$$

где $\delta > 0$. Интегрируя по частям и используя монотонность функции $N(\lambda)$, получим

$$\frac{N(\lambda_k - \delta)}{(\lambda_k - \delta)^p} + p \int_0^{\lambda_k - \delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{\lambda_n^p} \leq \frac{N(\lambda_k + \delta)}{(\lambda_k + \delta)^p} + p \int_0^{\lambda_k + \delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda. \quad (6.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{\lambda_n^p} &\leq pN(\lambda_k + \delta) \int_{\lambda_k + \delta}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{p+1}} + p \int_0^{\lambda_k + \delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda \\ &\leq p \left(\int_{\lambda_k + \delta}^{+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda + \int_0^{\lambda_k + \delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda \right) = p \int_0^{+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \leq p \int_0^{+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda.$$

С другой стороны, учитывая (6.1), получим

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{\lambda_n^p} \geq p \int_0^{\lambda_k - \delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda$$

или

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \geq p \int_0^{+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda.$$

Таким образом, имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} = p \int_0^{+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{p+1}} d\lambda. \quad (6.2)$$

Далее, используя теорему 1, получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \leq p \int_0^{+\infty} \frac{\pi \sqrt{\lambda} \operatorname{mes}\{z : q_L^*(z) \leq \pi^2 \lambda\}}{\lambda^{p+1}} d\lambda = p \int_0^{+\infty} \frac{\pi \sqrt{\lambda}}{\lambda^{p+1}} \int_{\{q_L^*(z) \leq \pi^2 \lambda\}} dz d\lambda.$$

И наконец, меняя порядок интегрирования

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \leq p\pi \int_0^{+\infty} \int_0^{q^*(z)} \frac{1}{\lambda^{p+1/2}} d\lambda dz = p\pi^{2-2p} \left(p - \frac{1}{2}\right) \int_0^{+\infty} (q_L^*(z))^{-p+1/2} dz.$$

Обратное неравенство получаем из теоремы 2 и соотношения (6.2).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\gamma > -\alpha$, $t_k = \sum_{n=1}^k (1/n^\alpha)$, $c_k = k^\gamma$. Тогда $L^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, если и только если $p > 1/2 + (1 - \alpha)/(\gamma + \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [t_k, t_{k+1}]$. Тогда

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha} \leq x \leq \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad (6.3)$$

т.е.

$$x \asymp k^{1-\alpha}. \quad (6.4)$$

Положим d такое, что $q^*(x) = d^{-2}$. Обозначим через r, q количество t_k , попавших соответственно в промежутки $[x - d/2, x]$ и $[x, x + d/2]$.

Из определения d, r, q мы получим соотношения

$$\sum_{n=k-r}^{k+q} n^\gamma \asymp d^{-1}, \quad \sum_{n=k-r}^k n^{-\alpha} \asymp \frac{d}{2}, \quad \sum_{n=k}^{k+q} n^{-\alpha} \asymp \frac{d}{2},$$

или

$$k^\gamma(r+q) \asymp d^{-1}, \quad k^{-\alpha}r \asymp \frac{d}{2}, \quad k^{-\alpha}q \asymp \frac{d}{2},$$

откуда вытекает

$$d^{-2} \asymp k^{\gamma+\alpha}.$$

Следовательно, учитывая (6.4) будем иметь

$$q^*(x) = d^{-2} \asymp x^{(\gamma+\alpha)/(1-\alpha)},$$

тогда из теоремы 4 легко следует нужное нам утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $c_k = k^\gamma$, $t_k = \sum_{n=1}^k (1/n)$ и $p > 1/2$. Тогда $L^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, если и только если $\gamma > -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично следствию 3 для больших x получим

$$q^*(x) \asymp e^{x(\gamma+1)}.$$

Учитывая теорему 4, получим нужное утверждения.

Автор выражает благодарность М. Отелбаеву и А. М. Савчуку за внимание к работе и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Fermi, "Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate", *Ric. Sci. Progr. Tecn. Econom. Naz.*, **2** (1936), 13–52.
- [2] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2005.
- [3] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, "Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом", *ДАН СССР*, 1961, № 5, 1011–1014.
- [4] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, "Point interactions in two dimensions: basic properties, approximations and applications in solid state physics", *J. Reine Angew. Math.*, **380** (1987), 87–107.
- [5] В. А. Михайлец, "Критерий дискретности спектра одномерного оператора Шрёдингера с δ -взаимодействиями", *Функц. анализ и его прил.*, **28:4** (1994), 85–87.

- [6] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912.
- [7] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, Тр. ММО, **64**, М., 2003, 159–212.
- [8] S. Albeverio, V. A. Greylar, “The band structure of the general periodic Schrödinger operator with point interaction”, *Comm. Math. Phys.*, **210**:1 (2000), 29–48.
- [9] S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud, “Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set”, *J. Math. Phys.*, **51**:10 (2010), 102102.
- [10] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, “Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 87–91.
- [11] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set”, *J. Differential Equations*, **249**:2 (2010), 253–304.
- [12] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, “Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с точечным взаимодействием”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:4 (2010), 14–20.
- [13] A. Kostenko, M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review”, *Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics*, A Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy’s 60th Birthday, Proc. Sympos. Pure Math., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, 235–262.
- [14] К. А. Мирзоев, “Операторы Штурма–Лиувилля”, Тр. ММО, **75**, № 2, МЦНМО, М., 2014, 335–359.
- [15] Б. Е. Кангужин, А. А. Аниязов, “Корректные задачи для оператора Лапласа в проколоте круге”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 856–867.
- [16] М. О. Отелбаев, “Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **20**:6 (1976), 859–867.
- [17] М. О. Отелбаев, *Оценки спектра оператора Штурма–Лиувилля*, Гылым, Алма-Ата, 1990.
- [18] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.

Медет Нурсултанов

Chalmers University of Technology, Sweden;

University of Gothenburg, Sweden

E-mail: medet.nursultanov@gmail.com

Поступило

21.07.2014

Исправленный вариант

03.01.2016