Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Любимцев, Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 125–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:39:55

Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов

О. В. Любимцев

Кольцо K есть кольцо с однозначным сложением (UA-кольцо), если на его мультипликативной полугруппе $(K, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(K, \cdot, +)$. Абелеву группу назовем End-UA-группой, если ее кольцо эндоморфизмов является UA-кольцом. В статье найдены End-UA-группы в классе вполне разложимых факторно делимых абелевых групп.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10546

1. Постановка задачи. Как было отмечено А. В. Михалевым, в структурной теории колец заметную роль играют мультипликативные свойства (т.е. свойства, выразимые в языке мультипликативной полугруппы кольца). При этом особый интерес представляет вопрос о том, когда все мультипликативные изоморфизмы кольца являются кольцевыми изоморфизмами. Отображение $\alpha: R \rightarrow S$ называется *мультипликативным изоморфизмом* (*m -изоморфизмом*) колец R и S , если α – изоморфизм мультипликативных полугрупп колец R и S . Если всякий m -изоморфизм колец R и S является изоморфизмом колец, кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-кольцом, см. [1], [2]). Абелеву группу A будем называть End-UA-группой, если ее кольцо эндоморфизмов $E(A)$ является UA-кольцом.

Факторно делимые группы без кручения были введены в 1961 г. Бьюнотом и Пирсом [3]. В 1998 г. в работе [4] Фомин и Уиклесс определили смешанные факторно делимые группы конечного ранга и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга с квазигоморфизмами в качестве морфизмов двойственны.

Факторно делимая группа называется *вполне разложимой*, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. В статье изучаются End-UA-группы в классе вполне разложимых факторно делимых абелевых групп, что является продолжением работ [5], [6].

2. Предварительные результаты. Слово “группа” везде будет обозначать аддитивно записанную абелеву группу. Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую часть группы A и ее p -примарную компоненту соответственно; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$) – кольца (аддитивные группы) рациональных, целых и p -адических чисел.

p -адических чисел, соответственно. Если S – подмножество в кольце $E(A)$, то

$$La(S) = \{x \in E(A) : xS = 0\}, \quad Ra(S) = \{x \in E(A) : Sx = 0\}$$

есть левый и правый аннуляторы S , соответственно. Остальные обозначения, принятые в работе, стандартны и соответствуют [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Прямая сумма End-UA-групп есть End-UA-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – группа, где $E(A_i)$ является UA-кольцом для всех $i \in I$. Рассмотрим m -изоморфизм $\alpha: E \rightarrow S$, $E = E(A)$. Через F_A обозначим систему ортогональных проекций группы A на прямые слагаемые A_i , т.е.

$$F_A = \{e_i: A \rightarrow A_i, i \in I\}.$$

Покажем, что α сохраняет сложение на левых идеалах Ee_i , $i \in I$. Из [5; лемма 1] следует, что достаточно проверить аддитивность α на кольцах $e_i E e_i$ для всех $e_i \in F_A$. Нетрудно убедиться, что m -изоморфизм α индуцирует m -изоморфизм колец $e_i E e_i$ и $\alpha(e_i) S \alpha(e_i)$. Но по условию кольцо $E(A_i) = e_i E e_i$ является UA-кольцом для каждого $e_i \in F_A$. Тогда α аддитивен на $e_i E e_i$, а значит и на $E e_i$. Проверим, что α – изоморфизм колец E и S . В самом деле, если $\alpha(a + b) - \alpha(a) - \alpha(b) \neq 0$ для $a, b \in E$, то $\alpha(ae_i + be_i) - \alpha(ae_i) - \alpha(be_i) \neq 0$ для некоторого $e_i \in F_A$. Получили противоречие с тем, что α аддитивен на $E e_i$, $e_i \in F_A$. Следовательно, $E(A)$ – UA-кольцо.

ЛЕММА 1. *Пусть A является ограниченной p -группой, B – p -делимой группой без p -крючения. Тогда*

$$\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(B, A) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$, $\varphi(a) = b \neq 0$. Если порядки элементов в группе A ограничены числом p^k , то

$$p^k b = p^k \varphi(a) = \varphi(p^k a) = \varphi(0) = 0.$$

Получили противоречие с тем, что B – группа без p -крючения. Пусть теперь $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$. Поскольку для всякого $b \in B$ разрешимо уравнение $p^k x = b$, то

$$\varphi(b) = \varphi(p^k x) = p^k \varphi(x) = 0,$$

т.е. $\varphi = 0$.

Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа. Линейно независимую систему элементов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, порождающую группу F , называют *базисом факторно делимой группы* A , ранг группы F – *рангом факторно делимой группы* A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Факторно делимая группа ранга 1 не End-UA-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – факторно делимая группа ранга 1 без кручения, то $E(A)$ – подкольцо с 1 в $\mathbb{Q}$. Однако никакое подкольцо в $\mathbb{Q}$ не является UA-кольцом (см., например, [8]). Если A – смешанная группа, то $t_p(A)$ является циклической группой Z_{p^k} порядка p^k для некоторых $p \in P$ и $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, $A = t_p(A) \oplus A_p$,

причем группа A_p является p -делимой группой без p -кручения и определена однозначно [9]. Тогда $E(A) = E(Z_{p^k}) \times E(A_p)$ по лемме 1. Если $p \neq 2, 3$ или $p = 2, 3$ и $k > 1$, то Z_{p^k} не является End-UA-группой [6]. Если $t_p(A) = 0$ для всех $p \neq 2$ и $t_2(A) = Z_2$, то $A = Z_2 \oplus A_2$, где A_2 – группа без кручения ранга 1. Так как A_2 – не End-UA-группа, то и A не является End-UA-группой. Аналогично рассматриваются случаи $t(A) = Z_3$ и $t(A) = Z_2 \oplus Z_3$.

Напомним, что *характеристикой* называется любая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованных простыми числами. Характеристику мы будем обозначать или в виде последовательности (m_p) или с помощью греческой буквы χ . Характеристики (m_p) и (k_p) эквивалентны тогда и только тогда, когда множества простых чисел $\{p : m_p = \infty\}$ и $\{p : k_p = \infty\}$ совпадают, а множество $\{p : m_p \neq k_p\}$ конечно. Класс эквивалентных характеристик называется *типом*. Тип, содержащий характеристику χ , обозначим через $[\chi]$.

Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика. Поставим ей в соответствие набор колец K_p , где $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ или $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ соответственно при $m_p = \infty$ и $m_p < \infty$. Кольцо $\prod_{p \in P} K_p$ обозначается $\mathbb{Z}_\chi$ и называется *кольцом целых χ -адических чисел*. Если тип $[\chi]$ отличен от нулевого типа, то определим кольцо $R_\chi = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. Если $[\chi] = 0$, то определим кольцо $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_\chi$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Никакое из колец R_χ не является UA-кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в работе [9] доказано, что каждое из колец R_χ реализуется в качестве кольца эндоморфизмов некоторой факторно делимой группы ранга 1.

ЛЕММА 2. *Пусть A – группа без кручения ранга 1, причем $p_i A \neq A$ для простых чисел $p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Группа B такова, что $\text{Hom}(A, B)$ – группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности числом $r = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ (может быть нулевой); $\text{Hom}(B, A) = 0$. Тогда группа $C = A \oplus B$ не является End-UA-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом аддитивного разложения кольца $E(C)$ всякий эндоморфизм $f \in E(C)$ представим в виде

$$f = f_{11} + f_{21} + f_{22},$$

где $f_{11} \in E(A)$, $f_{21} \in \text{Hom}(A, B)$, $f_{22} \in E(B)$. Пусть порядки элементов группы $\text{Hom}(A, B)$ ограничены в совокупности числом r указанного вида. Построим m -автоморфизм Ψ кольца $E(C)$, полагая

$$\Psi(f) = \Psi(f_{11} + f_{21} + f_{22}) = \alpha(f_{11}) + f_{21} + f_{22},$$

где α – m -автоморфизм кольца $E(A)$, построенный по правилу: $\alpha(0) = 0$, $\alpha(x) = (-1)^{h(x)}x$, если $x = r^{h(x)}x'$ и $(x', r) = 1$. Заметим, что α не сохраняет сложение: для $x, y \in E(A)$ таких, что $h(x) = 2$ и $h(y) = 1$, имеем

$$\alpha(x + y) = -x - y \neq x - y = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Отображение Ψ сохраняет умножение, $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$, если $f_{21}(g_{11} - \alpha(g_{11})) = 0$. Последнее условие выполнено, так как $g_{11} - \alpha(g_{11}) \equiv 0 \pmod{r}$ и $r \cdot f_{21} = 0$. Поскольку m -автоморфизм Ψ не сохраняет сложения, то $E(C)$ не является UA-кольцом.

ЛЕММА 3. Пусть A – факторно делимая группа ранга 1, $t(A)$ – неограниченная группа и $0 \neq \varphi \in E(A)$. Тогда существует $p \in P$ такое, что

$$A = \langle x_p \rangle \oplus A_p, \quad \varphi(x_p) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – базисный элемент группы A , $\varphi(x) = y \neq 0$ и $o(y) = n$. Тогда для некоторого $p \in P$ и проекции $\pi_p: A \rightarrow t_p(A) = \langle x_p \rangle$ имеем $\pi_p(y) \neq 0$. Так как $\pi_p(x) = x_p$ [4] и $t_p(A)$ – вполне характеристическая подгруппа в A , то получим

$$\varphi(x_p) = \varphi(\pi_p(x)) = \pi_p \varphi(x) = \pi_p(y) \neq 0.$$

Пусть $o(y) = \infty$. Так как A – группа ранга 1, существуют $k, m \in \mathbb{Z}$, такие, что $ky = mx$. Далее, поскольку $t(A)$ – неограниченная группа, найдется простое число p , $(p, m) = 1$, $(p, k) = 1$, для которого $A = \langle x_p \rangle \oplus A_p$. Тогда

$$\pi_p(\varphi(kx)) = \pi_p(ky) = \pi_p(mx) = m\pi_p(x) = mx_p \neq 0.$$

Предположим, что $\varphi(x_p) = 0$. Если $x = x_p + x'$ для некоторого $x' \in A_p$, то находим

$$\pi_p(\varphi(kx)) = k\pi_p \varphi(x_p + x') = k\pi_p \varphi(x_p) + k\pi_p \varphi(x') = 0.$$

Противоречие. Значит $\varphi(x_p) \neq 0$.

Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A . Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Характеристика $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$ называется *кохарактеристикой* элемента a в группе A и обозначается $\chi(a)$. Тип, содержащий характеристику $\chi(a)$, называется *котипом* элемента a . Полагают две кохарактеристики (m_p) и (k_p) равными тогда и только тогда, когда $m_p = k_p$ для всех $p \in P$. Аналогично $(m_p) \geq (k_p)$ в точности тогда, когда $m_p \geq k_p$ для всех $p \in P$. Свойства кохарактеристик и котипов можно найти в [9]. *Кохарактеристикой факторно делимой группы* A ранга 1 называют кохарактеристику любого ее базисного элемента и обозначают $\chi(A)$. В [9; теорема 2] доказано, что две факторно делимые группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда их кохарактеристики совпадают.

Описание групп гомоморфизмов факторно делимых групп ранга 1 было получено Давыдовой.

ТЕОРЕМА 1 [10; теорема 7.1]. Пусть A и B являются факторно делимыми группами ранга 1 с кохарактеристиками $\chi(A) = (m_p)$ и $\chi(B) = (k_p)$.

1) Если неравенство $[\chi(A)] \geq [\chi(B)]$ не имеет места, то группа $\text{Hom}(A, B)$ периодическая, все p -примарные компоненты которой являются циклическими группами. Если для некоторого простого числа p выполняется $k_p = 0$ или $k_p = \infty$, то p -примарная компонента группы $\text{Hom}(A, B)$ равна 0. Если для некоторого простого числа p выполняется $0 < k_p < \infty$, то p -примарная компонента группы $\text{Hom}(A, B)$ имеет порядок $p^{\min(m_p, k_p)}$.

2) Если выполняется $[\chi(A)] \geq [\chi(B)]$, то $\text{Hom}(A, B) \cong C$, где $\chi(C) = \chi(A) \wedge \chi(B)$. В частности, если $\chi(A) \geq \chi(B)$, то $\text{Hom}(A, B) \cong B$.

При доказательстве основных результатов существенно используется следующий факт из работы [1].

ТЕОРЕМА 2 [1; теорема 2.12]. *Предположим, что кольцо K обладает такой системой попарно ортогональных идемпотентов $F_K = \{e_i, i \in I\}$, что*

- 1) *если $0 \neq x \in K$, то $e_i x e_j \neq 0$ для некоторых $i, j \in I$;*
- 2) *для всякого индекса $i \in I$ найдется индекс $j \in I, j \neq i$ такой, что для $x \in K$ из $e_i x e_i K e_j = 0 = e_j K e_i x e_i$ следует $e_i x e_i = 0$.*

Тогда K – UA-кольцо.

3. Основные результаты. Пусть

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \quad (1)$$

есть фиксированное разложение вполне разложимой факторно делимой группы, $r(A_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n$. Прямое слагаемое A_i в разложении (1) группы A назовем *изолированным*, если в дополнительном прямом слагаемом не найдется прямого слагаемого ранга 1, котип которого сравним с котипом группы A_i . Множество всех кохарактеристик $\chi(A_i) = (m_p^i)$ данного разложения обозначим через Ω . Кроме того, полагаем

$$\Omega_p = \{m_p^i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad \Omega_p^t = \{m_p^i : 0 < m_p^i < \infty, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Если $\Omega_p^t = \emptyset$ для всех $p \in P$, то A – группа без кручения. В этом случае группа A является End-UA-группой тогда и только тогда, когда она не имеет изолированных прямых слагаемых [5]. Такой же ответ получим, если $t(A) = t_2^e(A) \oplus t_3^e(A)$, где $t_2^e(A)$ и $t_3^e(A)$ – элементарные 2 и 3-группы. В самом деле, если A_i – изолированное прямое слагаемое разложения (1), то

$$A = A_i \oplus t(A) \oplus A'_i = A_i \oplus B.$$

В этом случае $\text{Hom}(B, A_i) = 0$, а группа $\text{Hom}(A_i, B)$ либо нулевая, либо порядки ее элементов ограничены в совокупности числом $n = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3}$, $k_{2,3} \in \{0, 1\}$. Последний случай имеет место, если в кохарактеристике группы A_i на первом или втором местах стоят символы ∞ . По лемме 2 группа A не является End-UA-группой. Обратно, если в разложении группы A нет изолированных слагаемых, то $A = t(A) \oplus A'$, где $t(A)$ и A' – End-UA-группы. Тогда A – End-UA-группа в силу предложения 1.

В дальнейшем предполагаем, что $t(A) \neq t_2^e(A) \oplus t_3^e(A)$. Множество простых чисел, для которых множество $\Omega_p^t \neq \emptyset$ обозначим через P^t . Кроме того, для группы A_i разложения (1) положим

$$P_{A_i}^t = \{p \in P : 0 < m_p^i < \infty\}, \quad P_{A_i}^\infty = \{p \in P : m_p^i = \infty\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – вполне разложимая факторно делимая группа с разложением (1) в прямую сумму групп ранга 1, $n > 1$. Тогда группа A является End-UA-группой в том и только том случае, если выполнены условия

- 1) для любого $p \in P^t$ множество Ω_p^t содержит, по крайней мере, два максимальных элемента или множество Ω_p содержит хотя бы один символ ∞ ;
- 2) всякое изолированное прямое слагаемое A_i (если такие имеются) не расщепляется или найдется прямое слагаемое A_j такое, что множество $P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$ бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть не выполнено условие 1). Тогда найдется такое $p \in P^t$, что во множестве Ω_p^t имеется единственный максимальный элемент и множество Ω_p не содержит символов ∞ . В этом случае $A = t_p(A) \oplus A_p$, причем группа A_p не имеет p -кручения и p -делима, поскольку каждое прямое слагаемое ранга 1 в A_p в своей кохарактеристике на p -ом месте содержит 0. По лемме 1 $t_p(A)$ – вполне характеристическая подгруппа в A . Так как группа $t_p(A)$ не является End-UA-группой [6], то и группа A – не End-UA-группа. Противоречие.

Пусть не выполнено 2). Тогда найдется изолированное расщепляющееся прямое слагаемое A_i такое, что множество $P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$ конечно для всех $j \neq i$. Так как группа A_i имеет конечную периодическую часть [11; теорема 2.9], запишем разложение группы A в виде

$$A = A_i \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} A_j \right) = A'_i \oplus t(A_i) \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} A_j \right) = A'_i \oplus \bar{A}'_i.$$

С учетом [7] имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A'_i, \bar{A}'_i) &= \text{Hom}\left(A'_i, \bigoplus_{j \neq i} t_p(A_i) \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} A_j \right)\right) \\ &\cong \bigoplus \text{Hom}(A'_i, t_p(A_i)) \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} \text{Hom}(A'_i, A_j) \right). \end{aligned}$$

По лемме 1 $\text{Hom}(A'_i, t_p(A_i)) = 0$. Пусть

$$\chi(A'_i) = (k_p^i), \quad \chi(A_j) = (m_p^j), \quad j \neq i.$$

Поскольку котип группы A_i несравним ни с одним из котипов групп A_j , $j \neq i$, группа $\text{Hom}(A'_i, A_j)$ является периодической по теореме 1. Каждая p -компонента этой группы имеет порядок $p^{\min(k_p^i, m_p^j)}$, где $p \in P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$. В этом случае группа $\text{Hom}(A'_i, A_j)$ является конечной, так как конечно множество $P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$. Следовательно, конечна группа $\text{Hom}(A'_i, \bar{A}'_i)$, причем порядки элементов ограничены в совокупности числом $r = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_n^{s_n}$, где $p_i \in P_{A_i}^\infty$. С другой стороны,

$$\text{Hom}(\bar{A}'_i, A'_i) = \text{Hom}\left(t(A_i) \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} A_j \right), A'_i\right) \cong \bigoplus_{j \neq i} \text{Hom}(A_j, A'_i) = 0.$$

Действительно, p -компоненты группы $\text{Hom}(A_j, A'_i)$ равны 0, так как A'_i – группа без кручения, и для всех $p \in P$ имеем $k_p^i = 0$ или $k_p^i = \infty$. По лемме 2 A не является End-UA-группой. Противоречие.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Для доказательства того, что $E(A)$ является UA-кольцом, воспользуемся теоремой 2, взяв в качестве $F_{E(A)}$ полную ортогональную систему идемпотентных эндоморфизмов

$$\{e_i : A \rightarrow A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

разложения (1) группы A . Первое условие теоремы 2 выполняется очевидным образом. Проверим, что второе условие также выполнено.

Пусть для группы A_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдется группа A_j , $j \neq i$, такая, что кохарактеристики $\chi(A_i) = (m_p^i)$ и $\chi(A_j) = (m_p^j)$ принадлежат сравнимым котипам. Рассмотрим сначала случай $[\chi(A_i)] \leq [\chi(A_j)]$. Покажем, что

$$La\left(\bigcup_{s \neq i} \text{Hom}(A_s, A_i)\right) \cap E(A_i) = 0, \quad (2)$$

где $E(A_i) = e_i E e_i$, $\text{Hom}(A_s, A_i) = e_i E e_s$. Неравенство $m_p^i > m_p^j$ может быть выполнено на конечном числе p -компонент, $p \in P_1$. При этом $m_p^i \in \Omega_p^t$ для $p \in P_1$. Тогда

$$A_i = \bigoplus_{p \in P_1} \langle x_p^i \rangle \oplus A'_i, \quad \chi(A'_i) \leq \chi(A_j).$$

Пусть $0 \neq \varphi \in E(A_i)$ и $\varphi(x'_i) \neq 0$ для базисного элемента x'_i группы A'_i . Так как $\chi(x'_i) \leq \chi(x_j)$, где x_j – базисный элемент группы A_j , из [9; теорема 1] следует существование гомоморфизма $\psi \in \text{Hom}(A_j, A_i)$, для которого $\psi(x_j) = x'_i$. Тогда $\varphi\psi(x_j) = \varphi(x'_i) \neq 0$ и равенство (2) выполнено. Если $\varphi(x'_i) = 0$, то $\varphi(x_p^i) \neq 0$ для некоторого $p \in P_1$. По условию найдется прямое слагаемое A_s ранга 1, $\chi(A_s) = \chi(x_s) = (m_p^s)$, разложения группы A такое, что $m_p^s \geq m_p^i$. Тогда

$$\chi(x_s) = (\dots, m_p^s, \dots) \geq (0, \dots, 0, m_p^i, 0, \dots) = \chi(x_p^i).$$

Следовательно, существует гомоморфизм $\psi: A_s \rightarrow A_i$ такой, что $\psi(x_s) = x_p^i$. В этом случае $\varphi\psi(x_s) = \varphi(x_p^i) \neq 0$ и равенство (2) удовлетворяется.

Пусть теперь $[\chi(A_i)] > [\chi(A_j)]$. Покажем, что имеет место равенство

$$La\left(\bigcup_{s \neq i} \text{Hom}(A_s, A_i)\right) \cap Ra(\text{Hom}(A_i, A_j)) \cap E(A_i) = 0. \quad (3)$$

Если $m_p(A_i) < m_p(A_j)$ для $p \in P_2$, $|P_2| < \infty$, то

$$A_j = \bigoplus_{p \in P_2} \langle x_p^j \rangle \oplus A'_j.$$

При этом $\chi(A_i) > \chi(A'_j)$. Пусть $\varphi \in E(A_i)$, $\varphi(x_i) = y$ и $o(y) = \infty$. Так как A_i – группа ранга 1, найдутся $k, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $ky = mx_i$. Положим $\psi(x_i) = x'_j$, где x'_j – базисный элемент группы A'_j , $\psi \in \text{Hom}(A_i, A_j)$. Тогда

$$\psi\varphi(kx_i) = \psi(k\varphi(x_i)) = \psi(ky) = \psi(mx_i) = m\psi(x_i) = mx'_j \neq 0.$$

Пусть $o(y) = n$. Запишем разложение $A_i = \bigoplus \langle x_p^i \rangle \oplus A'_i$, где сумма берется по всем простым числам, входящим в разложение n . Если $\pi_p: A_i \rightarrow \langle x_p^i \rangle$, то

$$\varphi(x_p^i) = \varphi(\pi_p(x_i)) = \pi_p(\varphi(x_i)) = \pi_p(y) = rx_p^i \neq 0, \quad r \in \mathbb{Z},$$

так как подгруппа $\langle x_p^i \rangle$ вполне характеристична в A_i по лемме 1. Найдется индекс $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s \neq i$, такой, что $\chi(A_s) \geq \chi(x_p^i)$. Тогда существует гомоморфизм $\psi \in \text{Hom}(A_s, A_i)$, $\psi(x_s) = x_p^i$. В этом случае $\varphi\psi(x_s) = \varphi(x_p^i) \neq 0$, откуда следует равенство (3). Заметим, что для случая $o(y) = n$ не использовался тот факт, что

котипы групп A_i и A_j сравнимы. Итак, второе условие теоремы 2 выполнено и $E(A)$ – UA-кольцо.

Рассмотрим случай, когда A_i – изолированное прямое слагаемое. Снова применим теорему 2 и покажем, что

$$La\left(\bigcup_{j \neq i} \text{Hom}(A_j, A_i)\right) \cap Ra\left(\bigcup_{j \neq i} \text{Hom}(A_i, A_j)\right) \cap E(A_i) = 0.$$

Пусть $\varphi \in E(A_i)$, $\varphi(x_i) = y \neq 0$. Если $o(y) = n$, то $\varphi\psi \neq 0$ для некоторого $\psi \in \bigcup_{j \neq i} \text{Hom}(A_j, A_i)$ по доказанному ранее.

Пусть $o(y) = \infty$. Если группа $t(A_i)$ – неограниченная, то по лемме 3 $\varphi(x_p^i) \neq 0$ для некоторого $p \in P$. Кроме того, найдется группа A_s разложения группы A , $\chi(A_s) = (m_p^s)$ такая, что $m_p^s \geq m_p^i$. Тогда найдется гомоморфизм $\psi: A_s \rightarrow A_i$ такой, что $\psi(x_s) = x_p^i$. Поэтому $\varphi\psi(x_s) = \varphi(x_p^i) \neq 0$.

Если $t(A_i)$ – конечная группа, то по условию $|P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t| = \infty$. Выберем $m, k \in \mathbb{Z}$ так, что $ky = mx_i$. Тогда найдется $p \in P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$, для которого $(p, m) = 1$. Кроме того, имеем $A_j = \langle x_p^j \rangle \oplus A_p^j$. Поскольку

$$\chi(x_i) = (\dots, m_p^i = \infty, \dots) > (0, \dots, 0, m_p^j, 0, \dots) = \chi(x_p^j),$$

существует гомоморфизм $\psi \in \text{Hom}(A_i, A_j)$ такой, что $\psi(x_i) = x_p^j$. Тогда

$$\psi\varphi(kx_i) = \psi(ky) = \psi(mx_i) = m\psi(x_i) = mx_p^j \neq 0.$$

Таким образом, оба условия теоремы 2 выполнены и $E(A)$ является UA-кольцом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – расщепляющаяся вполне разложимая факторно делимая группа. Группа A является End-UA-группой в точности тогда, когда выполнены условия

- 1) для любого $p \in P^t$ множество Ω_p^t содержит, по крайней мере, два максимальных элемента или множество Ω_p содержит хотя бы один символ ∞ ;
- 2) в разложении группы A нет изолированных прямых слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как факторно делимая группа A расщепляется в том и только том случае, если периодическая часть $t(A)$ – конечная группа, то условие 2) теоремы 3 не может быть выполнено. Поэтому A не содержит изолированных прямых слагаемых.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если вполне разложимая факторно делимая группа A , $r(A) > 1$, содержит группу Z в качестве прямого слагаемого, то A – End-UA-группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\chi(Z) = (\infty, \dots, \infty, \dots)$, то группа A не содержит изолированных прямых слагаемых и выполнено условие 1) теоремы 3.

ПРИМЕР 1. Группа $A = Z_5 \oplus Q \oplus Z_5 \oplus Q_3$ является End-UA-группой по следствию 1. В тоже время группа $A = Z_5 \oplus Q \oplus Q_3$ не является End-UA-группой, так как не выполнено условие 1).

ПРИМЕР 2. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$, где $\chi(A_1) = (1, 2, 1, 2, \dots)$, $\chi(A_2) = (2, 1, 2, 1, \dots)$. Условие 2) теоремы 3 выполнено, так как $t(A_1)$ и $t(A_2)$ – неограниченные группы. Однако A не является End-UA-группой, поскольку не выполнено условие 1). В самом деле, например, множество $\Omega_5^t = \{1, 2\}$ имеет один максимальный элемент.

В заключении автор выражает благодарность А. В. Цареву и Д. С. Чистякову за плодотворные обсуждения тематики, связанной с факторно делимыми группами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Михалев, “Мультипликативная классификация ассоциативных колец”, *Матем. сб.*, **135**:2 (1988), 210–224.
- [2] W. Stephenson, “Unique addition rings”, *Canad. J. Math.*, **21**:6 (1969), 1455–1461.
- [3] R. A. Beaumont, R. S. Pierce, “Torsion-free rings”, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 61–98.
- [4] А. А. Фомин, W. Wickless, “Quotient divisible abelian groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:1 (1998), 45–52.
- [5] О. В. Любимцев, “Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1419–1422.
- [6] О. В. Любимцев, “Периодические абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 736–741.
- [7] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [8] O. Lyubimcev, A. Sebeldin, C. Vinsonhaler, “Separable torsion-free abelian E^* -groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **133**:1-2 (1998), 203–208.
- [9] О. И. Давыдова, “Факторно делимые группы ранга 1”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 25–33.
- [10] О. И. Давыдова, *Факторно делимые группы ранга 1*, Дис. ... к.ф.-м.н., МПГУ, М., 2009.
- [11] А. А. Фомин, “К теории факторно делимых групп. I”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:8 (2012), 153–167.

О. В. Любимцев

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

Поступило

02.04.2014

Исправленный вариант

12.10.2014