Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Перечисление помеченных геодезических планарных графов, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 336–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:24:40

Перечисление помеченных геодезических планарных графов

В. А. Воблый

Перечислены помеченные геодезические внешнепланарные и планарные графы с заданным числом вершин, а также получена асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10549

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Геодезический граф – это связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической) [1].

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. *Блок* – это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы (многоугольники).

Планарный граф – это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. *Внешнепланарным графом* называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани.

Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

В статье получены точные и асимптотические формулы для числа помеченных геодезических внешнепланарных и планарных графов с заданным числом вершин.

ТЕОРЕМА 1. Число OP_n помеченных геодезических внешнепланарных графов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$OP_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{r=0}^{[(n-2p-1)/2]} \binom{r+p-1}{p-1} \frac{n^{n-p-2r-2}}{2^p p! (n-2p-2r-1)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стемпл и Уоткинс [1] доказали, что граф является геодезическим планарным только тогда, когда каждый блок его – ребро, нечетный цикл или граф, гомеоморфный полному графу K_4 . Очевидно, что внешнепланарный граф не может иметь блоков, гомеоморфных K_4 . Следовательно, внешнепланарный геодезический граф является кактусом с нечетными циклами.

Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами, B_n – число помеченных блоков с n вершинами. Введем экспоненциальную производящую функцию

$$B(x) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

В работе автора [2] получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}, \quad (1)$$

где $[z^n]$ и $[z^{-1}]$ – коэффициентный оператор и оператор формального вычета, соответственно [3; раздел 1.2].

Рассмотрим специальный случай блоков связного графа. При этом формула (1) будет перечислять связные графы с ограничениями на структуру блоков. Обозначим через $\bar{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных блоков, которые являются ребром или простым циклом с нечетным числом вершин. Так как число помеченных циклов с $2n+1$ вершинами равно $(2n)!/2$, получим

$$\bar{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n)! \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \bar{B}'(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} z^{2n} = z + \frac{z^2}{2(1-z^2)}.$$

Применяя формулу (1), имеем

$$OP_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nz) \exp\left(\frac{nz^2}{2(1-z^2)}\right) z^{-n}. \quad (2)$$

Разлагая экспоненты в степенной ряд, найдем

$$OP_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} z^i \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p z^{2p}}{2^p (1-z^2)^p p!}\right) z^{-n}.$$

С помощью известного ряда [4; с. 564],

$$(1-z)^{-p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} z^r \quad (3)$$

получим

$$\begin{aligned} OP_n &= n^{n-2} + (n-1)! [z^{-1}] \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^{i+p-1}}{i! 2^p p!} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} z^{2p+2r+i-n} \\ &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n^{n-p-2r-2}}{2^p p! (n-2p-2r-1)!} \binom{r+p-1}{p-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что факториал $(n-2p-2r-1)!$ в знаменателе обнуляет слагаемые при $n-2p-2r-1 < 0$, завершим доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для числа OP_n помеченных внешнепланарных геодезических графов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$OP_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!,$$

где $c_1 \approx 0.1245675127$, $a_1 \approx 3.993632929$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующую теорему Флажолле и Седжвика [5; теорема VIII.8].

Обозначим

$$F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

Пусть функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) функции $a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ и $b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$ аналитические в точке $z = 0$ и имеют неотрицательные коэффициенты, кроме того $b(0) \neq 0$;
- 2) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$;
- 3) если $R \leq \infty$ радиус сходимости $b(z)$, то радиус сходимости $a(z)$ не меньше R .

Через T обозначим величину $T = \lim_{x \rightarrow R-0} x b'(x)/b(x)$. Пусть λ положительное число такое, что $0 < \lambda < T$, и пусть r – единственный положительный корень уравнения $r(b'(r)/b(r)) = \lambda$. Обозначим $\sigma = (d^2/dr^2)(\ln b(r) - \lambda \ln r)$.

Тогда для $N = \lambda n$ целого при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

В нашем случае в силу формулы (2) имеем

$$OP_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left(\exp\left(z + \frac{z^2}{2(1-z^2)}\right) \right)^n \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp(z + z^2/(2(1-z^2)))$.

Так как ряд для $\overline{B}(z)$ сходится при $|z| < 1$, оператор формального вычета является контурным интегралом.

Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(\overline{B}(z))$ и $\overline{B}(z)$ – производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, имеем $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Так как $z = 1$ – ближайшая к началу координат особая точка $b(z)$, радиус сходимости R функции $b(z)$ равен 1. Очевидно, $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия 1–3 теоремы Флажолле-Седжвика выполнены.

Найдем

$$T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(1 + \frac{x}{2(1-x^2)^2} \right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение $(rb'(r)/b(r)) = \lambda$ имеет вид $r(1 + r/(2(1 - r^2)^2)) = 1$. Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным положительным корнем является число $r \approx 0.5901149592$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left(1 + \frac{r}{2(1 - r^2)^2} \right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{3r^2 + 1}{(1 - r^2)^3} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma \approx 10.25676833$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1245675127, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} \approx 3.993632929.$$

Окончательно при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$OP_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c_1 n^{-5/2} a_1^n.$$

Доказательство закончено.

ЛЕММА. Число H_n помеченных геодезических графов с n вершинами, гомеоморфных полному графу K_4 , равно

$$H_n = \frac{n!}{3888} (n+5)(n+2)(n-1),$$

при $n = 3l + 4$, где $l \geq 0$ – целое число; $H_n = 0$ при $n \neq 3l + 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{K}_4$ – граф, гомеоморфный K_4 , а $s_{i,j}$ – длина цепи, соединяющей вершины i и j в $\bar{K}_4$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$. Плесник [6] и Зелинка [7] доказали, что $\bar{K}_4$, является геодезическим только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа h_1, h_2, h_3, h_4 такие, что $s_{i,j} = h_i + h_j + 1$ для всех $1 \leq i \leq 4$ и $1 \leq j \leq 4$. Очевидно, что число вершин степени 2, принадлежащих цепи, соединяющей вершины i и j в $\bar{K}_4$, равно $s_{i,j} - 1 = h_i + h_j$. Поэтому общее число вершин геодезического графа $\bar{K}_4$ равно

$$\begin{aligned} n &= (h_1 + h_2) + (h_1 + h_3) + (h_1 + h_4) + (h_2 + h_3) + (h_2 + h_4) + (h_3 + h_4) + 4 \\ &= 3(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + 4 = 3l + 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $H_n \neq 0$ только при $n = 3l + 4$, где $l = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ – целое неотрицательное число.

При вычислении H_n будем следовать Форду и Уленбеку [8], которые нашли число помеченных блоков с n вершинами и заданным гомеоморфным типом. H_n равно числу выбора 4-х вершин графа K_4 из n вершин, умноженному на число способов упорядочения выбранных 4-х вершин, умноженному на число способов распределения оставшихся $n - 4$ вершин по ребрам K_4 с учетом его симметрии и умноженному на число R_n решений в неотрицательных целых числах уравнения $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (n - 4)/3$. Поэтому имеем

$$H_n = \binom{n}{4} 4! \frac{(n-4)!}{|A|} R_n,$$

где $|A| = 24$ – порядок группы автоморфизмов графа K_4 . Известно [9; с. 23], что число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ в неотрицательных целых числах равно $\binom{n+r-1}{n}$. Следовательно, окончательно находим

$$H_n = \frac{n!}{24} \binom{(n-4)/3+3}{3} = \frac{n!}{144} \frac{n+5}{3} \frac{n+2}{3} \frac{n-1}{3} = \frac{n!}{3888} (n+5)(n+2)(n-1).$$

Доказательство закончено.

ТЕОРЕМА 3. Для числа P_n помеченных планарных геодезических графов с n вершинами при $n \geq 3$ верна формула

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(nz + \frac{nz^2}{2(1-z^2)} + \frac{n(z^3+2z^6)}{6(1-z^3)^5} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производящая функция $H(z)$ для чисел H_n с учетом ряда (3) равна

$$H(z) = \sum_{n=4}^{\infty} H_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{24} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+3}{3} z^{3l+4} = \frac{z^4}{24(1-z^3)^4}.$$

Соответствующая производящая функция для блоков рассматриваемых графов имеет вид

$$\widehat{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} + \frac{z^4}{24(1-z^3)^4}, \quad \widehat{B}'(z) = z + \frac{z^2}{2(1-z^2)} + \frac{z^3+2z^6}{6(1-z^3)^5}.$$

Теперь с помощью формулы (1) получим утверждение теоремы.

В следующей таблице представлены числа OP_n и P_n , вычисленные с помощью формул из теорем 1 и 3, причем в теореме 3 разложение в ряд Тейлора выполнено с помощью Maple.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
OP_n	4	28	302	4356	79432	1749952	45258012	1344192400
P_n	4	29	322	4776	90142	2062432	55467036	1715080400

ТЕОРЕМА 4. Для числа P_n помеченных планарных геодезических графов с n вершинами верна асимптотическая формула

$$P_n \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!,$$

где $c_2 \approx 0.1123270337$, $a_2 \approx 6.267794090$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] \left\{ z \left(\exp \left(z + \frac{z^2}{2(1-z^2)} + \frac{z^3+2z^6}{6(1-z^3)^5} \right) \right)^n \right\} = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n).$$

Опять используем теорему Флажолле и Седжвика.

Теперь

$$N = n, \quad \lambda = 1, \quad a(z) = z, \quad b(z) = \exp \left(z + \frac{z^2}{2(1-z^2)} + \frac{z^3+2z^6}{6(1-z^3)^5} \right).$$

Ряд для $\widehat{B}(z)$ сходится при $|z| < 1$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, видим, что условия 1–3 теоремы Флажол-Седжвика выполнены. Найдем

$$T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x\widehat{b}'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} x \left(1 + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{3x^2 + 2x^3}{6(1-x)^6} \right) = +\infty.$$

Опять $0 < \lambda < T$, а уравнение $r(\widehat{b}'(r)/b(r)) = \lambda$ имеет вид

$$r \left(1 + \frac{r}{(1-r^2)^2} + \frac{r^2 + 8r^5 + 6r^8}{2(1-r^3)^6} \right) = 1.$$

Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным положительным корнем является число $r \approx 0.4660169781$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \frac{3r^2 + 1}{(1-r^2)^3} + \frac{r + 28r^4 + 76r^7 + 30r^{10}}{(1-r^3)^7} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma \approx 12.61396294$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_2 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0.1123270337, \quad a_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 6.267794090.$$

Окончательно при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$P_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c_2 n^{-5/2} a_2^n.$$

Доказательство закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. G. Stemple, M. E. Watkins, “On planar geodetic graphs”, *J. Combin. Theory*, **4** (1968), 101–117.
- [2] В. А. Воблый, “Об одной формуле для числа помеченных связных графов”, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **19**:4 (2012), 48–59.
- [3] Я. Гульден, Д. Джексон, *Перечислительная комбинаторика*, Наука, М., 1990.
- [4] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. В 3 т. Т. 1. *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2003.
- [5] Ph. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [6] I. Plesnik, “Two construction of geodetic graphs”, *Math. Slovaca*, **27**:1 (1977), 65–71.
- [7] B. Zelinka, “Geodetic graphs which are homeomorphic to complete graphs”, *Math. Slovaca*, **27**:2 (1977), 129–132.
- [8] G. W. Ford, G. E. Uhlenbeck, “Combinatorial problems in theory graphs. IV”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **43** (1957), 163–167.
- [9] К. А. Рыбников, *Введение в комбинаторный анализ*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1985.

В. А. Воблый

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: vityobl@yandex.ru

Поступило

22.12.2013

Исправленный вариант

13.10.2014