Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Лукацкий, Примеры непрерывных действий полупростых групп Ли, неэквивалентных гладким, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:46:33

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ, НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГЛАДКИМ

А. М. Лукацкий

В пятой проблеме Д. Гильберт поставил вопрос: всегда ли непрерывное действие локальной группы Ли локально эквивалентно некоторому гладкому (или аналитическому) действию. В 50–60-е годы был построен ряд примеров непрерывных действий групп Ли, неэквивалентных никаким гладким действиям ни в какой гладкой структуре [1, с. 340], [2]–[4], [5, с. 94–95]. В этих примерах использовались весьма сложные топологические конструкции. Кроме того, препятствия для приведения к гладкому виду у построенных примеров носили глобальный характер [1], [2] и, по существу, не давали полного ответа на поставленную Гильбертом локальную проблему. В настоящей работе мы строим примеры непрерывных действий полупростых групп Ли на $\mathbb{R}^n$ и S^n , $n \geq 2$, которые неэквивалентны никаким гладким действиям ни в какой гладкой структуре. Наиболее простой из них относится к действию (нестандартному) группы $SL(2, \mathbb{R})$ на плоскости.

Непрерывное (гладкое) действие некоторой группы Ли G на многообразии X задается непрерывным (гладким) отображением $P: G \times X \rightarrow X$, согласованным с групповой операцией. Положим $P_g(x) = P(g, x)$. Непрерывное (гладкое) действие задает непрерывный гомоморфизм $g \mapsto P_g$ группы G в группу гомеоморфизмов (диффеоморфизмов) $\text{Homeo}(X)$ (соответственно $\text{Diff}(X)$) с естественной топологией.

Эквивалентность двух непрерывных действий P и Q понимается как существование гомеоморфизма $F \in \text{Homeo}(X)$ такого, что выполняется $Q = FP(\text{id} \times F^{-1})$. Локальная же эквивалентность двух непрерывных действий в некоторой точке $p \in X$ определяется аналогично, но с заменой G и X на окрестности $V(e) \subset G$ и $U(p) \subset X$. В этом случае предполагается, что $F(p) = p$.

Далее мы рассмотрим n -мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ и n -мерную сферу S^n , заданную в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$. Мы построим примеры непрерывных действий на $\mathbb{R}^n$ и S^n , $n \geq 2$, неэквивалентных никаким гладким действиям ни в какой гладкой структуре, стартуя от некоторого класса гладких действий полупростых некомпактных групп Ли на $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} .

Заметим, что если задан некоторый диффеоморфизм Φ сферы S^{n-1} , то он может быть гомотетично продолжен до диффеоморфизма $\tilde{\Phi} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, где 0 – начало координат, и доопределен в точке 0 формулой $\tilde{\Phi}(0) = 0$. Иначе говоря, $\tilde{\Phi}$ задается следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} |x|\Phi\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01263.

Поскольку $|\tilde{\Phi}(x)| = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, отображение $\tilde{\Phi}$ непрерывно в точке 0, т.е. является гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^n$ на себя. Легко видеть также, что $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}$ для любых $\Phi, \Psi \in \text{Diff}(S^{n-1})$.

Пусть задано некоторое гладкое действие P группы Ли G на S^{n-1} . Тогда соответствие $g \mapsto \tilde{P}_g$ является действием группы G на $\mathbb{R}^n$ с неподвижной точкой 0. Легко проверить, что это действие $\tilde{P}$ гладко на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и непрерывно на $\mathbb{R}^n$.

Теперь рассмотрим n -мерную сферу S^n и отображим ее на $\mathbb{R}^n$ при помощи стереографической проекции из полюса, который мы обозначим ∞ . Перенесем при помощи стереографической проекции действие $\tilde{P}$ группы G с $\mathbb{R}^n$ на $S^n \setminus \{\infty\}$ и доопределим его в ∞ как в неподвижной точке. По аналогии с предыдущей конструкцией мы получим непрерывное действие $\tilde{P}$ группы G на S^n .

ТЕОРЕМА. Пусть G является связной полупростой группой Ли, не имеющей нетривиальных компактных факторов, но обладающей максимальной компактной подгруппой $K \neq \{e\}$. Предположим, что задано гладкое эффе́ктивное действие P группы G на $(n-1)$ -мерной сфере S^{n-1} . При этом если

$$G(x) = K(x) \quad (2)$$

для любой точки $x \in S^{n-1}$, то описанные выше непрерывные действия $\tilde{P}$ и $\hat{P}$ группы G на $\mathbb{R}^n$ и S^n соответственно неэквивалентны никаким гладким действиям (ни глобально, ни локально в точке 0) ни в каких гладких структурах на этих многообразиях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\mathbb{R}^n$. Из определения действия $\tilde{P}$ видно, что оно оставляет неподвижной точку 0, переводит в себя каждую сферу с центром в этой точке и удовлетворяет условию (1) для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Достаточно доказать локальный вариант теоремы. Предположим, что действие $\tilde{P}$ локально эквивалентно в точке 0 некоторому гладкому локальному действию Q , определенному в окрестности $V(e)$ точки $e \in G$. Тогда существует гомеоморфизм шара B_ε достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром 0 на некоторую окрестность $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ такой, что

$$Q_g = F\tilde{P}_gF^{-1} \quad (3)$$

для $g \in V(e)$, причем $F(0) = 0$.

Ясно, что действие Q переводит $U(0)$ в себя. Выведем отсюда, что Q продолжается до глобального гладкого действия группы Ли G в $U(0)$, эквивалентного действию $\tilde{P}$ группы G в B_ε . Поскольку G связна, любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = g_1 \cdots g_r$, где $g_i \in V(e)$. Определим $Q_g \in \text{Diff}(U(0))$ формулой $Q_g = Q_{g_1} \cdots Q_{g_r}$. Это определение корректно. Действительно, если $g = h_1 \cdots h_s$, где $h_j \in V(e)$, то в силу (2) имеем

$$Q_{g_1} \cdots Q_{g_r} = F(\tilde{P}_{g_1} \cdots \tilde{P}_{g_r})F^{-1} = F\tilde{P}_gF^{-1} = F(\tilde{P}_{h_1} \cdots \tilde{P}_{h_s})F^{-1} = Q_{h_1} \cdots Q_{h_s}.$$

Легко проверить, что соответствие $g \mapsto Q_g$ определяет гладкое действие группы Ли G . Ясно также, что (3) выполняется для всех $g \in G$, что дает требуемую эквивалентность. Ясно, что действие Q эффе́ктивно, оставляет неподвижной точку 0 и удовлетворяет условию (2) для всех $x \in U(0)$.

Введем в $U(0)$ риманову метрику, инвариантную относительно максимальной компактной подгруппы $K \subset G$, и рассмотрим соответствующее экспоненциальное отображение $\text{Exp}: \mathbb{R}^n = T_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow U(0)$, определенное в некоторой окрестности $W(0)$ в $\mathbb{R}^n$. Мы можем считать, что $W(0)$ – открытый шар в соответствующей евклидовой метрике в $T_0(\mathbb{R}^n)$, причем $\text{Exp}: W(0) \rightarrow U(0)$ – диффеоморфизм. Рассмотрим вместо Q гладко эквивалентное ему действие Q' в $W(0)$, определенное формулой $Q'_g = \text{Exp}^{-1} Q_g \text{Exp}$, $g \in G$. Очевидно, Q' эффе́ктивно, оставляет неподвижной точку 0 и удовлетворяет условию (2) для всех $x \in W(0)$. Как известно, подгруппа K , сохраняющая риманову метрику, действует на $W(0)$ ортогональными линейными преобразованиями и, в частности, переводит в себя евклидовы сферы. Поскольку Q' удовлетворяет условию (2), отсюда следует, что

$$|Q'_g(v)| = |v|, \quad g \in G, v \in W(0). \quad (4)$$

Воспользуемся теперь представлением изотропии $\text{Iso}: g \mapsto d_0 Q_g$ действия Q группы в касательном пространстве к неподвижной точке $T_0(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $d_0 \text{Exp} = \text{id}$, оно совпадает с представлением изотропии действия Q' . Фиксируем элемент $g \in G$. Так как $Q'_g(0) = 0$, из локальной формулы Тейлора получаем

$$Q'_g(v) = \text{Iso}(g)(v) + o(|v|), \quad v \rightarrow 0.$$

Тогда, используя (4), для прямой $\{tv\}$ получаем

$$|Q'_g(tv)| = |t| \cdot |v| = |t| |\text{Iso}(g)(v) + o(|t|)|, \quad t \rightarrow 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $|t|$ и устремив $t \rightarrow 0$, видим, что $|\text{Iso}(g)(v)| = |v|$. Следовательно, все $\text{Iso}(g)$, $g \in G$, являются ортогональными преобразованиями. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\text{Iso}: G \rightarrow \text{SO}_n$. Поскольку группа G не имеет нетривиальных компактных факторов, он должен быть тривиальным. В то же время $\text{Iso}(k) = d_0 Q'_k = Q'_k$ для всех $k \in K$. Поскольку Q' эффективно и $K \neq \{e\}$, получаем противоречие.

Случай S^n разбирается аналогично.

Заметим, что в ходе доказательства мы нигде не использовали тот факт, что гладкая структура на исследуемом многообразии является стандартной. Поэтому неэквивалентность непрерывного действия гладкому имеет место для любой гладкой структуры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$. Единичной сферой здесь является окружность S^1 . На S^1 введем стандартную координату φ , взятую по модулю 2π , и обозначим через $h = d/d\varphi$ векторное поле на окружности, порождающее группу вращений окружности. Теперь введем в рассмотрение следующую серию алгебр Ли, состоящих из гладких векторных полей на S^1 :

$$\mathfrak{g}_m = \langle h, \sin m\varphi \cdot h, \cos m\varphi \cdot h \rangle, \quad m \geq 1. \quad (5)$$

Каждая из алгебр Ли $\mathfrak{g}_m$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, ей соответствует связная группа Ли $G_m \subset \text{Diff}(S^1)$. Группы G_m являются простыми и локально изоморфны между собой. Все они содержат группу вращений окружности $K = \text{SO}(2)$, соответствующую подалгебре $\langle h \rangle$ и являющуюся максимальной компактной подгруппой.

Центр $Z(G_m)$ совпадает с подгруппой поворотов $R_{2\pi k/m}$, $k = 0, \dots, m-1$. Действительно, $Z(G_m) \subset K$ и $Z(G_m)$ совпадает с ядром присоединенного представления группы G_m , которое есть не что иное, как естественное действие $\Phi \mapsto \Phi_*$ группы G_m на пространстве векторных полей $\mathfrak{g}_m$. Легко видеть, что

$$(R_\psi)_*(\sin m\varphi \cdot h) = \sin m(\varphi + \psi) \cdot h, \quad (R_\psi)_*(\cos m\varphi \cdot h) = \cos m(\varphi + \psi) \cdot h,$$

откуда вытекает наше утверждение.

Отсюда легко следует, что $G_m = \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})/Z^m$, где $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ – односвязная накрывающая группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ с центром Z , изоморфным аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В частности, группы G_m неизоморфны между собой при различных натуральных m , причем $G_2 \cong \text{SL}(2, \mathbb{R})$, $G_1 \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Заметим также, что G_m является m -листным накрытием группы G_1 , определяемым естественным накрытием окружности $\varphi \mapsto m\varphi$. В работе [6, с. 225] серия групп G_m описана в перечне трехмерных групп Ли.

Поскольку K транзитивно действует на S^1 , естественное действие P каждой из групп G_m удовлетворяет условиям теоремы. Следовательно, мы получаем непрерывные действия $\tilde{P}$ и $\hat{P}$ группы G_m на $\mathbb{R}^2$ и S^2 соответственно, неэквивалентные гладким действиям (ни глобально, ни локально в точке 0). Заметим, что алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_m$ фундаментальных векторных полей действия $\tilde{P}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (где это действие гладко) записывается в полярных координатах r, φ так же, как и алгебра Ли $\mathfrak{g}_m$ в (5), если считать, что $h = \partial/\partial\varphi$. Действительно, из (1) без труда выводится, что для любого $v \in \mathfrak{g}_m$ имеем $d\tilde{P}(v)(r) = 0$, $d\tilde{P}(v)(\varphi) = v(\varphi)$.

Хотя группы G_m и локально изоморфны между собой, их действия $\tilde{P}$ не подобны друг другу локально в точке 0 при разных m . Это следует из того факта, что векторные поля из алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_m$ приводятся к виду $(p \sin m(\varphi + \varphi_0) + q)h$, $p, q \in \mathbb{R}$. Значит, каждое из них имеет не более чем $2m$ нулей на любой окружности с центром в 0, причем эта оценка достигается. Поскольку это не что иное, как число неподвижных точек однопараметрических подгрупп группы G_m на орбитах ее действия в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, это и есть топологический инвариант, различающий соответствующие локальные действия.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неэквивалентность описанных действий на плоскости никаким аналитическим может быть выведена из перечня С. Ли локальных аналитических действий групп Ли на плоскости [7, с. 225–228] или же из теоремы Кушниренко о линеаризации аналитического действия полупростой группы Ли в окрестности особой точки [8]. Известны также гладкие классификации нормальных форм особых точек векторных полей и семейств полей в теории версальных деформаций [9, с. 168–170], [10]. Однако, отношение эквивалентности там, вообще говоря, другое, нежели при классификации действий групп Ли [10, с. 251].

ПРИМЕР 2. Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим конформное действие группы $SO(1, n)$ и проективное действие группы $SL(n, \mathbb{R})$ на $(n - 1)$ -мерной сфере S^{n-1} . Максимальной компактной подгруппой для обеих этих групп является ортогональная группа $SO(n)$. Поскольку они транзитивно действуют на $(n - 1)$ -мерной сфере, условия теоремы выполняются. Таким образом, мы получаем непрерывные действия групп $SO(1, n)$ и $SL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ и S^n , неэквивалентные гладким действиям (ни глобально, ни локально в точке 0).

Автор признателен А.Л. Онищику за ряд ценных замечаний, а также Р.И. Богданову и Д.Н. Ахизеру за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980. 2. Montgomery D., Zippin L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 460–465. 3. Скляренко Е. Г. Пятая проблема Гильберта // Проблемы Гильберта / ред. П. С. Александров. М.: Наука, 1969. 4. Yang C. T. // Proc. Sympos. Pure Math. 1976. V. 28. Part I. P. 142–146. 5. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Основы теории групп Ли // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988. 6. Винберг Э. Б., Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 41. М.: ВИНТИ, 1988. 7. Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988. 8. Кушниренко А. Г. // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 1. С. 103–104. 9. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 10. Богданов Р. И. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1994. Т. 17. С. 249–265.

Институт энергетических исследований РАН
E-mail: info@eriras.msk.su

Поступило
14.05.97