Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гусев, Новая верхняя оценка хроматического числа случайного подграфа дистанционного графа, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 342–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:14:20

Новая верхняя оценка хроматического числа случайного подграфа дистанционного графа

А. С. Гусев

Эта работа связана с классической проблемой Нельсона–Хадвигера о нахождении хроматических чисел дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$. Мы рассматриваем класс графов $G(n, 2s + 1, s) = (V(n, 2s + 1), E(n, 2s + 1, s))$, определенных следующим образом:

$$V(n, 2s + 1) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2s + 1\},$$

$$E(n, 2s + 1, s) = \{(x, y) : (x, y) = s\},$$

где (x, y) обозначает скалярное произведение. Мы изучаем случайный граф $\mathcal{G}(G(n, 2s + 1, s), p)$, каждое ребро которого независимо от других ребер берется из множества $E(n, 2s + 1, s)$ с вероятностью p . В данной статье мы докажем новую оценку для хроматического числа такого графа.

Библиография: 36 названий.

DOI: 10.4213/mzm10550

1. Введение и формулировка результата

Пусть даны натуральные числа r, s . Рассмотрим последовательность графов

$$G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s)),$$

у которых

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = r\},$$

$$E(n, r, s) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\},$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. Графы $G(n, r, s)$ играют исключительную роль в комбинаторной геометрии (см. [1]–[17]) и теории кодирования (см. [18]–[20]). В комбинаторной геометрии они называются *дистанционными*, поскольку ребра у них имеют одну и ту же евклидову длину. В теории кодирования принято название “*графы Джонсона*”.

Принципиальным является изучение различных свойств случайных подграфов $\mathcal{G}(G(n, r, s), p)$ графов $G(n, r, s)$ в биномиальной модели Эрдеша–Реньи (см. [21]–[25]). Здесь $p = p(n)$, а $\mathcal{G}(G(n, r, s), p)$ – случайный элемент, принимающий значения во

множестве $\Omega_n = \{G = (V(n, r), E)\}$ всех остовных подграфов графа $G(n, r, s)$ (множество вершин одно и то же, а $E \subseteq E(n, r, s)$) и имеющий распределение

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}(G(n, r, s), p) = G) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n, r, s)|-|E|}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ произвольного графа G – это наименьшее число цветов, в которые можно так раскрасить вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Исследованию этой важной характеристики случайного графа $\mathcal{G}(G(n, r, s), p)$ посвящены работы [26]–[29]. В частности, в работах [26], [27] доказаны следующие три теоремы для случаев, когда $r = 2s + 1$ и $p = 1/2$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ с асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(G(n, 2s + 1, s), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{C_{2s+1}^s}{(s+1)(s+1)!} \cdot \frac{n^{s+1}}{\log_2 n}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ с асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(G(n, 3, 1), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n^2}{\log_2 n}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ с асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(G(n, 5, 2), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{8}{147} \cdot \frac{n^3}{\log_2 n}.$$

Таким образом, есть общая теорема 1 и ее уточнения при $s = 1$ и $s = 2$. В настоящей работе мы улучшаем все три указанных результата.

Дабы сформулировать основной результат этой статьи, напомним, что *числом Турана* $T(m, k, l)$ называется минимальное количество l -элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_m = \{1, 2, \dots, m\}$, которые можно так выбрать, чтобы для любого k -элементного подмножества множества $\mathcal{R}_m$ нашлось выбранное l -элементное подмножество, целиком содержащееся в этом k -элементном подмножестве. Число Турана – классический объект экстремальной комбинаторики (см. [30]–[33]). Справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ с асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(G(n, 2s + 1, s), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{T(s[\log_2 n], 2s + 1, s + 1)}{2^{s^{s+1}}} \cdot \frac{n^{s+1}}{(\log_2 n)^{s+2}}.$$

Здесь $[x]$ – целая часть числа x .

Заметим, во-первых, что очевидны оценки

$$\frac{C_m^l}{C_k^l} \leq T(m, k, l) \leq C_m^l,$$

откуда в нашем случае (s – константа) сразу следует, что

$$T(s[\log_2 n], 2s + 1, s + 1) = \Theta((\log_2 n)^{s+1}),$$

а значит, порядок оценки, заявленной в формулировке теоремы 4, равен $n^{s+1}/\log_2 n$, как и в теореме 1. Однако улучшение существенное. Так, например, из работы [31]

мы знаем, что при любом $\delta > 0$ и фиксированных k, l , начиная с некоторого m , выполнено

$$T(m, k, l) \leq (1 + \delta) C_m^l \left(\frac{l-1}{k-1} \right)^{l-1}.$$

Следовательно, в теореме 4 получаем

$$\chi \left(\mathcal{G} \left(G(n, 2s+1, s), \frac{1}{2} \right) \right) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{1}{2^{s+1}(s+1)!} \cdot \frac{n^{s+1}}{\log_2 n},$$

и это в $(8 + o(1))^s$ раз лучше оценки из теоремы 1, коль скоро $s \rightarrow \infty$. Более того, при $s = 1$ имеем константу $1/8$ против прежней $1/6$, а при $s = 2$ имеем $1/48$ вместо $8/147$.

В следующих двух разделах мы докажем теорему 4.

2. Вспомогательные конструкции и факты

2.1. Блоки. Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Каждой вершине $\mathbf{x} \in V(n, 2s+1)$ естественно поставить в соответствие $(2s+1)$ -элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$, состоящее из номеров координат, на которых у вектора $\mathbf{x}$ находятся единицы. Тогда ребром в графе $G(n, 2s+1, s)$ будет пара $(2s+1)$ -элементных множеств, пересекающихся по s элементам.

Разобьем $\mathcal{R}_n$ на две части. А именно, пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m(s+1) + s < n$. Положим $\mathcal{R}_n = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 = \mathcal{R}_{m(s+1)}$. Сначала опишем построение некоторой клики Q_1 в графе $G(n, 2s+1, s)$. Для этого возьмем в A_1 любые m штук непересекающихся $(s+1)$ -элементных множеств – например,

$$\{1, 2, \dots, s+1\}, \quad \{s+2, s+3, \dots, 2(s+1)\}, \quad \dots, \quad \{(m-1)(s+1)+1, \dots, m(s+1)\}.$$

Естественно, эти множества образуют разбиение множества A_1 , и к каждому такому $(s+1)$ -элементному множеству добавим произвольное, но для всех одинаковое, s -элементное множество из A_2 . Это и будет клика Q_1 . Аналогично, меняя добавляемое s -элементное множество, построим еще $C_{n-m(s+1)}^s - 1$ клик $Q_2, Q_3, \dots, Q_{C_{n-m(s+1)}^s - 1}$. Очевидно, что для любых i, j , $i \neq j$, и для любых $\mathbf{x}$ из Q_i и $\mathbf{y}$ из Q_j ребра между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ нет: эти $(2s+1)$ -элементные множества либо пересекаются не менее, чем по $s+1$ элементу, либо наоборот пересекаются строго меньше, чем по s элементам.

Объединение таких клик мы и будем называть *блоком*, количество клик – *шириной* блока, а размер m каждой клики – его *высотой*. Отметим, что в принципе при построении блока не обязательно брать $A_1 = \mathcal{R}_{m(s+1)}$. Можно рассмотреть и любое другое множество той же мощности.

Поясним, чем полезны блоки для раскраски. Рассмотрим подграф случайного графа $\mathcal{G}(G(n, 2s+1, s), 1/2)$, порожденный кликой Q_1 . Из работ [34], [35] известно, что при $m \rightarrow \infty$ этот подграф красится в $(1 + o(1))m/(2 \log_2 m)$ цветов (без ребер с концами одного цвета) с вероятностью, большей, чем $1 - e^{-m}$. И то же самое верно относительно любой другой клики. Поскольку между разными кликами в блоке нет ребер, мы можем для раскраски разных клик использовать один и тот же набор цветов. В итоге с асимптотической вероятностью 1 на покраску всего блока уйдет $(1 + o(1))m/(2 \log_2 m)$ цветов, коль скоро $(1 - e^{-m})^{C_{n-m(s+1)}^s} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. При этом $C_{n-m(s+1)}^s = O(n^s)$, где s – константа, а потому указанная асимптотика возникнет, например, коль скоро $m \sim n^\alpha$ с любым фиксированным $\alpha > 0$.

2.2. Покрытие разбиениями на k -сочетания. Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{kn} = \{1, 2, \dots, kn\}$ и все его k -элементные подмножества. Тогда разбиение $\mathcal{R}_{kn}$ на n непересекающихся k -элементных множеств будем называть *совершенным разбиением на k -сочетания* (совершенное разбиение на 2-сочетания также называется в теории графов *совершенным паросочетанием*). Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА БАРАНЬЯИ [36]. *Все k -элементные подмножества nk -элементного множества можно покрыть непересекающимися совершенными разбиениями на k -сочетания.*

Понятно, что всего нам потребуется C_{nk}^k/n совершенных разбиений на k -сочетания.

Но что делать, если у нас множество $\mathcal{R}_m$, где m не кратно k ? Давайте добавим ко множеству $\mathcal{R}_m$ еще несколько элементов, чтобы его размер стал кратен k , т.е. стал равен $(\lceil m/k \rceil + 1)k$. Новое множество покроем совершенными разбиениями на k -сочетания, а потом из каждого совершенного разбиения на k -сочетания выкинем те k -элементные подмножества, которые содержат добавленные элементы. Мы получим покрытие всех k -элементных подмножеств $\mathcal{R}_m$ непересекающимися наборами непересекающихся k -сочетаний, причем таких наборов будет не более, чем $C_{(\lceil m/k \rceil + 1)k}^k / (\lceil n/k \rceil + 1)$.

В дальнейшем нам также потребуется следующий простой вариант теоремы Бараньяи.

ЛЕММА 1. *Пусть дано nk -элементное множество, разбитое на k подмножеств, по n элементов в каждом. Тогда все его k -элементные подмножества, у которых в каждой части лежит ровно по одному элементу, можно покрыть непересекающимися совершенными разбиениями на k -сочетания.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать данную лемму индукцией по k .

База. Для $k = 1$ условие леммы очевидно.

Переход. Пусть для $i = k - 1$ утверждение леммы верно. Докажем его для $i = k$.

Рассмотрим произвольные $k - 1$ частей. По предположению индукции все $(k - 1)$ -элементные подмножества, у которых в каждой из этих $k - 1$ частей лежит по элементу, можно покрыть совершенными разбиениями на $(k - 1)$ -сочетания. Несложно видеть, что в каждом разбиении будет ровно по n подмножеств. Тогда всего нам потребуется n^{k-2} совершенных разбиений на $(k - 1)$ -сочетания.

Зафиксируем произвольное совершенное разбиение на $(k - 1)$ -сочетания из только что полученных по предположению индукции и занумеруем все $(k - 1)$ -элементные подмножества в нем от 1 до n в произвольном порядке, а затем к первому $(k - 1)$ -элементному подмножеству добавим первый элемент из пока не задействованной k -й части, ко второму – второй, и так далее. Таким нехитрым образом мы получим первое совершенное разбиение на k -сочетания. Но нам этого мало. Построим еще $n - 1$ совершенное разбиение на k -сочетания. Раньше мы к $(k - 1)$ -элементным подмножествам добавляли элементы из k -й части в порядке $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$. Теперь добавим их в порядке $\{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}, \{1\}$, затем в порядке $\{3\}, \{4\}, \dots, \{n\}, \{1\}, \{2\}$, и так далее. Наконец для построения последнего совершенного разбиения на k -сочетания произведем добавление в порядке $\{n\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n - 1\}$.

Мы научились из одного совершенного разбиения на $(k - 1)$ -сочетания, полученного по предположению индукции, делать n совершенных разбиений на k -сочетания,

в которых у всех подмножеств в каждой части исходного kn -элементного множества лежит ровно по одному элементу. Давайте продеваем такой трюк со всеми совершенными разбиениями на $(k-1)$ -сочетания. Несложно видеть, что все k -элементные подмножества, полученные при наших операциях, будут различны. Действительно, если какие-то два подмножества были получены из разных разбиений на $(k-1)$ -сочетания, то у них различны первые $k-1$ элементов, а если они были получены из одного разбиения, то либо у них различны первые $k-1$ элементов, либо они отличаются в последнем элементе.

Таким образом, нам удалось все k -элементные подмножества нашего nk -элементного множества, у которых в каждой части ровно по одному элементу, покрыть непересекающимися совершенными разбиениями на k -сочетания. При этом число разбиений равно n^{k-1} .

Лемма доказана.

2.3. Вспомогательная лемма.

ЛЕММА 2. Пусть дано t натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$, $s+1 \leq t \leq 2s$ таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_t = 2s+1$. Тогда из них можно выбрать не более s чисел, которые в сумме будут давать $s+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что по принципу Дирихле среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ есть единица. Без нарушения общности можем считать, что $a_1 = 1$.

Будем рассматривать префиксные суммы $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{s+1}$. Заметим, что среди этих сумм либо есть ноль по модулю $s+1$, либо его нет, но тогда есть два одинаковых остатка по модулю $s+1$ и разность соответствующих префиксных сумм даст нам набор чисел, сумма которых равна нулю по модулю $s+1$. Понятно, что все наши префиксные суммы не превосходят $2s+1$. Тогда ноль по модулю $s+1$ — это только $s+1$. Иными словами, мы нашли несколько чисел, дающих в сумме $s+1$, причем количество этих чисел не превосходит $s+1$. И единственный плохой для нас вариант, когда оно равно $s+1$. Но тогда $a_1 + a_2 + \dots + a_{s+1} = s+1$, а значит, $a_1 + a_{s+2} + a_{s+3} + \dots + a_t = s+1$. И мы нашли не более s чисел, дающих в сумме $s+1$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 4

Положим $t = \lfloor \log_2 n \rfloor$ и разделим n на $(s+1)st$ с остатком: $n = (s+1)sts_1 + t_1$, $t_1 < (s+1)s \log_2 n$. Положим

$$L_i = \{(s+1)(i-1)s_1 + 1, \dots, (s+1)is_1\}, \quad 1 \leq i \leq st, \quad T_1 = \{(s+1)sts_1 + 1, \dots, n\},$$

так что

$$\mathcal{R}_n = \left(\bigsqcup_{i=1}^{st} L_i \right) \sqcup T_1.$$

По понятным причинам L_i назовем i -м куском, а T_1 — довеском.

Теперь давайте посмотрим, какими вообще бывают $(2s+1)$ -элементные множества (вершины графа $G(n, 2s+1, s)$) по отношению к нашему разбиению множества $\mathcal{R}_n$.

В первую очередь раскрасим те множества, которые имеют общие элементы с довеском. Зафиксируем произвольный элемент из довеска и рассмотрим инду-

цированный подграф на тех вершинах, что содержат этот фиксированный элемент. Понятно, что степень каждой вершины в таком подграфе равна $C_{2s}^s C_{n-2s-1}^s = \Theta(n^s)$. Тогда по теореме Брукса цветов на покраску такого подграфа нам понадобится не более $\Theta(n^s)$. Но зафиксировать произвольный элемент из довеска мы могли не более, чем $(s+1)s \log_2 n$ способами. Тогда $\Theta(n^s \log_2 n)$ цветов нам заведомо хватит. Но это пренебрежимо мало по сравнению с величиной, заявленной в формулировке теоремы. Значит, мы можем рассматривать лишь те вершины, которые целиком лежат внутри $\bigsqcup_{i=1}^{st} L_i$. Поэтому дальше везде будем считать, что ни одна вершина не содержит элементов в довеске.

Перейдем к раскраске $(2s+1)$ -элементных множеств, которые разбиваются на не более чем s частей множествами L_i . Зафиксируем произвольный набор индексов $j_1, j_2, \dots, j_s$, соответствующий номерам кусков, в которых локализовано $(2s+1)$ -элементное множество. Тогда выполним раскраску с запасом, т.е. забудем про случайность и раскрасим, как делали бы то в полном графе. Поскольку количество элементов в объединении s кусков равно $(s+1)ss_1$, то степень каждой вершины внутри такого объединения равна $C_{2s+1}^s C_{(s+1)ss_1-2s-1}^{s+1} = \Theta((s_1)^{s+1})$, и по теореме Брукса у нас уйдет не более $\Theta((s_1)^{s+1}) = \Theta((n/\log_2 n)^{s+1})$ цветов. Но теперь учтем, что количество способов зафиксировать набор индексов $j_1, j_2, \dots, j_s$ равняется C_{ts}^s . При этом мы умеем множество $\mathcal{R}_{ts}$ покрывать совершенными разбиениями на s -сочетания (см. п. 2.2), в которых наборы по s кусков не будут пересекаться, и, следовательно, мы можем использовать в них одинаковые цвета. То есть, для примера, во всех t множествах

$$\bigsqcup_{i=1}^s L_i, \quad \bigsqcup_{i=s+1}^{2s} L_i, \quad \dots, \quad \bigsqcup_{i=(t-1)s+1}^{ts} L_i$$

мы сможем использовать одинаковые цвета, поскольку вершины, содержащиеся в этих множествах, не пересекаются. Поэтому всего цветов нам понадобится не более

$$\frac{C_{ts}^s}{t} \Theta\left(\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)^{s+1}\right) = s^s (\log_2 n)^{s-1} \Theta\left(\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)^{s+1}\right) = o\left(\frac{n^{s+1}}{\log_2 n}\right).$$

Но такое количество цветов нас вновь не интересует, поскольку оно по порядку меньше величины, заявленной в формулировке теоремы.

Теперь рассмотрим $(2s+1)$ -элементные множества, которые разбиваются на какое-то количество частей от $s+1$ до $2s$. Как мы знаем (см. лемму 2), можно выбрать не более s частей, внутри которых будет расположен ровно $s+1$ элемент. Пусть таких частей r . Пусть $j_1, j_2, \dots, j_r$ – набор индексов, соответствующий номерам кусков, в которых локализованы интересующие нас $s+1$ элементов. Покроем $\bigsqcup_{i=1}^r L_{j_i}$ совершенными разбиениями на $(s+1)$ -сочетания в соответствии с теоремой Бараньяи. Всего таких разбиений будет $C_{(s+1)s_1r}^{s+1}/s_1r$. При этом, поочередно добавляя к каждому сочетанию из данного разбиения s -элементные подмножества из $\mathcal{R}_n \setminus (\bigsqcup_{i=1}^r L_{j_i})$, мы получим блоки, описанные в п. 2.1. И, как мы поясняли в том же п. 2.1, на каждый такой блок с асимптотической вероятностью 1 уйдет не более $s_1r(1+o(1))/2\log_2(s_1r)$ цветов. В итоге количество цветов, которое нам понадобится для фиксированного набора из r индексов, не превосходит

$$\frac{C_{(s+1)s_1r}^{s+1}}{s_1r} \frac{s_1r}{2\log_2(s_1r)} (1+o(1)) = \Theta\left(\frac{n^{s+1}}{(\log_2 n)^{s+2}}\right).$$

Значит, общее число цветов не превосходит

$$\sum_{r=1}^s C_{ts}^r \Theta\left(\frac{n^{s+1}}{(\log_2 n)^{s+2}}\right) \leq s C_{ts}^s \Theta\left(\frac{n^{s+1}}{(\log_2 n)^{s+2}}\right) = o\left(\frac{n^{s+1}}{\log_2 n}\right),$$

и это вновь нас не интересует.

Нам осталось рассмотреть последний случай, когда $(2s+1)$ -элементные подмножества разбиваются ровно на $2s+1$ частей какими-то $2s+1$ кусками. Построим турановское покрытие всех наборов из $2s+1$ кусков наборами из $s+1$ кусков (см. раздел 1). Получится $T(s[\log_2 n], 2s+1, s+1)$ наборов.

Зафиксируем произвольный набор из $s+1$ кусков, принадлежащий турановскому покрытию, и раскрасим все $(2s+1)$ -элементные подмножества, у которых в этих кусках ровно по одному элементу. Пусть индексы зафиксированных кусков суть $j_1, j_2, \dots, j_{s+1}$. Построим покрытие всех $(s+1)$ -элементных подмножеств из $\bigsqcup_{i=1}^{s+1} L_{j_i}$, у которых в каждом L_{j_i} ровно один элемент, совершенными разбиениями на $(s+1)$ -сочетания в соответствии с леммой 1. У нас получится $((s+1)_{s_1})^{s+1}/(s+1)_{s_1}$ разбиений, в каждом из которых будет по $(s+1)_{s_1}$ подмножеств. Теперь, как мы уже делали однажды, построим на каждом совершенном разбиении на $(s+1)$ -сочетания по блоку. Тогда с асимптотической вероятностью 1 мы сможем раскрасить данный блок в $(s+1)_{s_1}(1+o(1))/2\log_2((s+1)_{s_1})$ цветов. И общее число цветов, которые нам потребуются, будет

$$\frac{((s+1)_{s_1})^{s+1}}{2\log_2((s+1)_{s_1})}(1+o(1)) = \frac{((s+1)_{s_1})^{s+1}}{2\log_2 n}(1+o(1)) = \frac{n^{s+1}}{2s^{s+1}(\log_2 n)^{s+2}}(1+o(1)).$$

Наконец, просуммируем по всем наборам из $s+1$ кусков, принадлежащих турановскому покрытию, полученную оценку. Общее число цветов не превзойдет величины

$$\frac{T(s[\log_2 n], 2s+1, s+1)}{2s^{s+1}} \cdot \frac{n^{s+1}}{(\log_2 n)^{s+2}} \cdot (1+o(1)),$$

и теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [2] J. Balogh, A. Kostochka, A. Raigorodskii, “Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *Discuss. Math. Graph Theory*, **33**:1 (2013), 25–31.
- [3] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [4] А. М. Raigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [5] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [6] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108.
- [7] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156.
- [8] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [9] А. М. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123.

- [10] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Докл. РАН*, **454**:3 (2014), 268–269.
- [11] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Пробл. передачи информ.*, **49**:4 (2013), 98–104.
- [12] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, New York, 2009.
- [13] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов”, *Докл. РАН*, **371**:5 (2000), 600–603.
- [14] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов”, *Докл. РАН*, **384**:5 (2002), 593–597.
- [15] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991.
- [16] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для некоторых классов многогранников и графов”, *Докл. РАН*, **388**:6 (2003), 738–742.
- [17] А. М. Райгородский, К. А. Михайлов, “О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ ”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 63–80.
- [18] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Радио и связь, М., 1979.
- [19] V. Rödl, “On a packing and covering problem”, *European J. Combin.*, **6**:1 (1985), 69–78.
- [20] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.
- [21] P. Erdős, A. Rényi, “On random graphs. I”, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.
- [22] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011.
- [23] B. Bollobás, *Random Graphs*, Second edition, Cambridge University Press, 2001.
- [24] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [25] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley, New York, 2000.
- [26] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов”, *Докл. РАН*, **457**:4 (2014), 383–387.
- [27] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов”, *Матем. сб.* (в печати).
- [28] A. B. Kupavskii, “On random subgraphs of Kneser graph”, *J. Combin. Theory. Ser. A* (to appear).
- [29] B. Bollobás, B. P. Narayanan, A. M. Raigorodskii, “On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem”, *J. Combin. Theory. Ser. A* (to appear).
- [30] В. Е. Тараканов, *Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы*, Наука, М., 1985.
- [31] A. F. Sidorenko, “What we know and what we do not know about Turán numbers”, *Graphs Combin.*, **11**:2 (1995), 179–199.
- [32] А. М. Райгородский, *Системы обихих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии*, МЦНМО, М., 2009.
- [33] P. Turán, “Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatrol”, *Mat. és Fiz. Lapok*, **48**:3 (1941), 436–452.
- [34] B. Bollobás, “The chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **8**:1 (1988), 49–55.
- [35] T. Łuczak, “The chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **11**:1 (1991), 45–54.
- [36] Zs. Baranyai, “On the factorization of the complete uniform hypergraph”, *Infinite and Finite Sets*, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1975, 91–108.

А. С. Гусев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: aretalogus@inbox.ru

Поступило

10.08.2014