Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Уткин, Гамильтоновы цепи в дистанционных графах, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 904–916

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 02:21:27

Гамильтоновы цепи в дистанционных графах

В. В. Уткин

Объектом исследования в настоящей работе является граф

$$G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s)),$$

у которого

$$\begin{aligned} V(n, r) &= \{v : v \subset \{1, \dots, n\}, |v| = r\}, \\ E(n, r, s) &= \{\{v, u\} : v, u \in V(n, r), |v \cap u| = s\}, \end{aligned}$$

т.е. вершины графа являются r -подмножествами множества $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$, а ребра между ними проводятся, если вершины пересекаются ровно по s элементам. В работе получены двусторонние оценки для числа гамильтоновых цепей графа $G(n, k, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10557

1. Введение и формулировка результата. Объектом исследования в настоящей работе является граф

$$G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s)),$$

у которого

$$\begin{aligned} V(n, r) &= \{v : v \subset \{1, \dots, n\}, |v| = r\}, \\ E(n, r, s) &= \{\{v, u\} : v, u \in V(n, r), |v \cap u| = s\}, \end{aligned}$$

т.е. вершины графа являются r -подмножествами множества $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$, а ребра между ними проводятся, если вершины пересекаются ровно по s элементам. Этот граф играет большую роль в теории кодирования (см. [1]), а также в комбинаторной геометрии. В последнем случае его еще называют *дистанционным*, так как его вершины можно представить как булевы векторы с ровно r единицами, причем единица стоит на i -м месте тогда и только тогда, когда вершина содержит элемент i , а ребро между двумя вершинами проведено, если скалярное произведение таких векторов равно s , т.е. если расстояние между ними равно $\sqrt{2r - 2s}$. В комбинаторной геометрии графы $G(n, r, s)$ и их различные характеристики подвергаются всестороннему изучению, поскольку с их помощью получены одни из наиболее сильных известных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-03530).

оценок хроматических чисел пространств (см. [2]–[16]) и установлены контрпримеры к гипотезе Борсука (см. [3], [4], [17]–[19]).

Напомним, что *цепью* в графе называется такая чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Цепь называется *простой*, если никакие две вершины цепи не совпадают. Простая цепь называется *гамильтоновой*, если она проходит через все вершины графа. В этой работе нас будет интересовать количество гамильтоновых цепей в графе $G(n, r, s)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть дана последовательность графов $G(n, k, 1)$, а n делится на $k - 1$. Тогда для числа гамильтоновых цепей $\mathcal{P}(G(n, k, 1))$ при $n \rightarrow \infty$ верны оценки

$$\frac{n^k \ln n}{k!} (1 + o(1)) \leq \ln(\mathcal{P}(G(n, k, 1))) \leq \frac{n^k \ln n}{k(k-2)!} (1 + o(1)).$$

Теорема дает практически точный ответ на вопрос о скорости роста логарифма числа гамильтоновых цепей в графе $G(n, k, 1)$. Ее мы докажем в следующем пункте.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть n делится на $k - 1$. Чтобы уменьшить громоздкость изложения, в дальнейшем мы будем опускать параметры k и 1 в обозначении графа $G(n, k, 1)$ и других подобных объектов, поскольку это не приведет к путанице.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слоем $G_l(n)$ графа $G(n)$, $l \geq 1$, относительно множеств $R_1, \dots, R_l$ размера $k - 1$ выделенных элементов,

$$R_1 \subset \mathcal{R}_n, \quad R_i \subset \mathcal{R}_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j \right), \quad i = 2, \dots, l,$$

мы будем называть подграф графа $G(n)$, индуцированный на множестве вершин

$$V_l(n) = \{v \in V(n) : R_i \cap v = \emptyset \text{ для всех } i = 1, \dots, l-1, R_l \cap v \neq \emptyset\}.$$

Для начала рассмотрим слой $G_1(n)$ графа $G(n)$ относительно $R_1 = \mathcal{R}_{k-1}$. Напомним, что *кликой* графа называется любой его полный подграф.

ЛЕММА 1. Слой $G_1(n)$ содержит

$$\binom{n-k+1}{k-1} \frac{(k-1)^2}{n-k+1}$$

непересекающихся клик размера $(n-k+1)/(k-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полный $(k-1)$ -однородный гиперграф

$$K_{n-k+1}^{k-1} = (\mathcal{R}_n \setminus R_1, E_{n-k+1}^{k-1})$$

на $n-k+1$ вершине, который в качестве вершин имеет элементы $k, \dots, n$, а в качестве ребер $-(k-1)$ -элементные подмножества множества вершин.

Назовем *совершенной 1-факторизацией* гиперграфа K_{n-k+1}^{k-1} любой набор его попарно непересекающихся ребер, объединение которых составляет его множество вершин. Ясно, что число ребер совершенной 1-факторизации всегда равно $(n-k+1)/$

$(k-1)$. Согласно [20] существует $\binom{n-k+1}{k-1}(k-1)/(n-k+1)$ таких совершенных 1-факторизаций T_j гиперграфа K_{n-k+1}^{k-1} , что каждое ребро появляется ровно в одной из них, т.е.

$$E_{n-k+1}^{k-1} = \bigsqcup T_j.$$

Для s из R_1 положим $T_j^s = \{v \cup \{s\} : v \in T_j\}$. Тогда T_j^s , $s \in R_1$, — попарно непересекающиеся множества вершин из $G_1(n)$, причем любые две вершины u и v из T_j^s пересекаются ровно по элементу s , т.е. T_j^s — клика в $G(n)$. Поскольку $j = 1, \dots, \binom{n-k+1}{k-1}(k-1)/(n-k+1)$ и $s = 1, \dots, k-1$, итоговое число клик равно

$$\binom{n-k+1}{k-1} \frac{(k-1)^2}{n-k+1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Клики T_j^s , конечно, не исчерпывают все вершины слоя $G_1(n)$. Есть вершины, которые пересекаются с R_1 более чем по одному элементу.

Разделим вершины слоя $G_1(n)$ на множества $A_1(n), \dots, A_{k-1}(n)$, где

$$A_i(n) = \{v \in V_1(n) : |v \cap R_1| = i\},$$

т.е. в каждом множестве $A_i(n)$ лежат все вершины из $V_1(n)$, в которых содержится ровно i выделенных элементов. Среди $A_i(n)$ выделим вершины, содержащие конкретный элемент s из R_1 , и обозначим их

$$A_i^s(n) = \{v \in A_i(n) : s \in v\}.$$

Пусть, кроме того, $B_1(n)$ — это множество всех ребер слоя $G_1(n)$, которые принадлежат кликам

$$T_j^s, \quad j = 1, \dots, \binom{n-k+1}{k-1} \frac{k-1}{n-k+1}, \quad s = 1, \dots, k-1,$$

а $B_1^s(n)$ при s из R_1 — это множество ребер слоя $G_1(n)$, которые принадлежат кликам T_j^s с данным s и $j = 1, \dots, \binom{n-k+1}{k-1}(k-1)/(n-k+1)$:

$$B_1(n) = \{\{u, v\} \in E_1(n) : \text{найдутся } s \in R_1 \text{ и } T_j^s \text{ такие, что } \{u, v\} \in T_j^s\},$$

$$B_1^s(n) = \{\{u, v\} \in E_1(n) : \text{найдется } T_j^s \text{ такой, что } \{u, v\} \in T_j^s\}.$$

ЛЕММА 2. Если $n - k + 1 > (k-1)^2$, то существует M простых цепей $C_1, \dots, C_M$,

$$M \geq \left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1}(k-1)^2/(n-k+1)},$$

причем каждая цепь содержит все вершины $A_1(n)$ и только их.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что, если $n - k + 1 > (k-1)^2$, то для любой вершины v из клики T_j^s в любой клике T_i^s при i , отличном от j , найдется вершина u , соседняя с v . Действительно, клика T_i^s содержит $(n-k+1)/(k-1)$ вершин и каждая вершина u из T_i^s содержит элемент s . Каждый элемент из $v \setminus \{s\}$ содержится лишь в одной вершине клики T_i^s . Значит, для того чтобы нашлась u , соседняя с v , нам достаточно, чтобы размер клики был больше, чем $k-1$.

Построим простые цепи, содержащие все вершины $A_1^s(n)$ и только их, начинающиеся с заранее выбранной вершины. В клике T_j^s существует $((n - k + 1)/(k - 1) - 1)!$ гамильтоновых цепей, начинающихся в фиксированной вершине. Завершив такую цепь в некоторой вершине v , мы для любой еще не обойденной клики T_i^s сможем найти в ней u , соседнюю с v , и продолжить цепь гамильтоновыми цепями из клики T_i^s , начинающимися с u . Таких цепей на T_i^s ровно $((n - k + 1)/(k - 1) - 1)!$. Обойдя таким образом ровно по одному разу каждую клику T_j^s с фиксированным s , получим не менее

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1} (k - 1) / (n - k + 1)}$$

простых цепей C_t^s , содержащих все вершины из $A_1^s(n)$ и только их, начинающихся с заранее выбранной вершины.

Ясно, что из $n - k + 1 > (k - 1)^2$ следует $n > 3k - 4$, а если так, то для любой вершины v из клики T_j^s и для любого r , отличного от s , среди вершин $A_1^r(n)$ найдется вершина u , соседняя с v . Действительно, если $n - k + 1 > 2(k - 2) + 1$, то среди $A_1^r(n)$ найдется вершина u , которая пересекается с v по некоторому $\{l\}$, а все остальные элементы из $v \setminus \{s, l\}$ и $u \setminus \{r, l\}$ различны. Значит, для каждой цепи C_t^s найдется

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1} (k - 1) / (n - k + 1)}$$

цепей C_q^{s+1} , начинающихся с той самой вершины u , соединенной с последней вершиной цепи C_t^s .

Построим простые цепи, содержащие все вершины $A_1(n)$ и только их. Сначала выберем произвольную вершину из $A_1^1(n)$. Для нее существует не менее

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1} (k - 1) / (n - k + 1)}$$

простых цепей, содержащих все вершины $A_1^1(n)$ и только их. Завершив любую из этих цепей в некоторой вершине v из некоторой клики T_i^1 , мы сможем найти вершину u из $A_1^2(n)$, соседнюю с v , и продолжить цепь простыми цепями, начинающимися с u и содержащими все вершины $A_1^2(n)$ и только их. Таких цепей на $A_1^2(n)$ не менее

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1} (k - 1) / (n - k + 1)}.$$

Продолжая так до $A_1^{k-1}(n)$, мы получим указанное в лемме количество простых цепей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вершины слоя $G_1(n)$, которые не покрыты кликами T_i^s , т.е. не принадлежат $A_1(n)$, мы будем называть *свободными* вершинами слоя $G_1(n)$.

ЛЕММА 3. Для любого k найдется такое $N(k)$, что для всех $n > N(k)$ в $G_1(n)$ не менее

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1} (k - 1)^2 / (n - k + 1)}$$

гамильтоновых цепей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что *треугольником* в графе называется клика на трех вершинах. Предположим, что для каждой простой цепи C_p , содержащей все вершины $A_1(n)$ и только их, нам удалось найти в $G_1(n)$ множество таких треугольников, что у каждого из них одна вершина свободна, а две другие образуют ребро цепи C_p , причем каждая свободная вершина принадлежит ровно одному треугольнику, а каждое ребро цепи принадлежит не более чем одному треугольнику. Тогда в $G_1(n)$ существует не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1)}$$

гамильтоновых цепей.

Действительно, если в простой цепи C в графе G участвует ребро $\{u, v\}$, т.е. $C = \dots, u, \{u, v\}, v, \dots$, а для вершины a , не участвующей в цепи, в G есть треугольник на вершинах u, v, a , то, заменив в цепи $u, \{u, v\}, v$ на $u, \{u, a\}, a, \{a, v\}, v$, мы получим простую цепь. Более того, если проделывать такую операцию над двумя различными простыми цепями, изначально содержащими одни и те же вершины, — скажем, множество вершин L и только их, — то в результате мы будем получать различные простые цепи, так как полученные цепи будут отличаться порядком вершин из L .

Докажем наше предположение. Среди цепей, которые нам удалось построить в лемме 2, зафиксируем простую цепь C_p . Все ребра каждой клики T_i^s , участвующие в C_p , идут последовательно в определенном порядке. Зафиксируем s . Пусть $e_1, \dots, e_k$ — все ребра из $B_1^s(n)$, участвующие в цепи C_p , в том же порядке, в котором они следуют в C_p . Тогда понятно, что ребра

$$e_{i((n-k+1)/(k-1)-1)+1}, \quad \dots, \quad e_{(i+1)((n-k+1)/(k-1)-1)} \\ \text{для } i = 0, \dots, \binom{n-k+1}{k-1} \frac{k-1}{n-k+1} - 1$$

принадлежат некоторой клике T_j^s . Пусть клики

$$T_1^s, \quad T_2^s, \quad \dots, \quad T_{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1) / (n-k+1)}^s$$

пронумерованы в том же порядке, в котором их ребра участвуют в цепи C_p .

Рассмотрим ребра

$$e_1, \quad e_2, \quad \dots, \quad e_{(n-k+1)/(k-1)-1}$$

клики T_1^s . Каждая вершина a из $A_2^s(n)$ не является соседом не более чем с $k-2$ вершинами клики T_1^s , с которыми она пересекается по своим невыделенным элементам. Действительно, каждая такая вершина a из $A_2^s(n)$ пересекается с R_1 по двум элементам, содержит s и $k-2$ невыделенных элемента, а любая вершина v из T_1^s пересекается с R_1 ровно по s . Поэтому ребро между a и v существует тогда и только тогда, когда в v не содержится ни один невыделенный элемент из a . Клика T_1^s устроена так, что каждый невыделенный элемент содержится ровно в одной вершине. Получается, что вершин клики, не соседних с a , не может быть больше $k-2$, так как ровно столько в a невыделенных элементов (см. рис. 1).

Каждая вершина v , не соседняя a , не позволяет вершине a образовывать треугольник на двух ребрах, примыкающих к v слева и справа. Так как не соседних

Рис. 1

вершин не более $k-2$, то и треугольник с вершиной a не образуют не более $2k-4$ ребер среди $e_1, \dots, e_{(n-k+1)/(k-1)-1}$, а образуют более $(n-k+1)/(k-1) + 3 - 2k$ ребер (см. рис. 2).

Рис. 2

Возьмем первую вершину a_1 из $A_2^s(n)$ и любое ребро среди $(n-k+1)/(k-1) + 3 - 2k$ ребер, с которыми она образует треугольник. Выберем их. Теперь это ребро объявлено запрещенным, а вершина – выбранной. Возьмем следующую вершину a_2 из $A_2^s(n)$. Для нее гарантированно найдется $(n-k+1)/(k-1) + 2 - 2k$ ребер, с которыми она образует треугольник. Выберем эту вершину и любое подходящее ребро. Так мы можем повторять $(n-k+1)/(k-1) + 3 - 2k$ раз. Теперь мы перейдем к клике $\mathcal{T}_2^s$ и сделаем то же самое. И так далее.

Если мы закончили исчерпывать вершины $A_{i-1}^s(n)$ на клике $\mathcal{T}_{j_{i-2}}^s$, мы перейдем к клике $\mathcal{T}_{j_{i-2}+1}^s$ и множеству свободных вершин $A_i^s(n)$. Мы опять сделаем те же операции. Рассмотрим ребра

$$e_{j_{i-2}((n-k+1)/(k-1)-1)+1}, \quad e_{j_{i-2}((n-k+1)/(k-1)-1)+2}, \quad \dots, \quad e_{(j_{i-2}+1)((n-k+1)/(k-1)-1)}.$$

Каждая вершина a из $A_i^s(n)$ не является соседом не более чем с $k-i$ вершинами клики $\mathcal{T}_{j_{i-2}+1}^s$ по тем же, что и раньше, соображениям, а ребер, с которыми она образует треугольник, более $(n-k+1)/(k-1) + 2i - 2k - 1$. Мы рассмотрим вершину a_1 из $A_i^s(n)$ и любое ребро среди указанных, с которым она образует треугольник. Выберем их. Перейдем к следующей вершине a_2 из $A_i^s(n)$. Повторить такую операцию мы сможем $(n-k+1)/(k-1) + 2i - 2k - 1$ раз. После чего перейдем к клике $\mathcal{T}_{j_{i-2}+2}^s$. Будем так продолжать, пока не исчерпаем множество $A_i^s(n)$ на клике $\mathcal{T}_{j_{i-1}}^s$.

Понятно, что для того, чтобы выбрать все вершины $A_i^s(n)$, нам понадобится не более

$$\binom{k-2}{i-1} \binom{n-k+1}{k-i} \frac{1}{(n-k+1)/(k-1) + 2i - 2k - 1}$$

клик T_j^s . Значит, если найдется такое $N(k)$, что для всех $n > N(k)$ выполнено неравенство

$$\sum_{2 \leq i \leq k-1} \binom{k-2}{i-1} \binom{n-k+1}{k-i} \frac{1}{(n-k+1)/(k-1) + 2i - 2k - 1} < \binom{n-k+1}{k-1} \frac{k-1}{n-k+1},$$

то клик будет достаточно, чтобы разместить все вершины $A_i^s(n)$, $i = 2, \dots, k-1$, в вершинах треугольников. Но такое $N(k)$ существует, так как правая часть неравенства растет как многочлен от n со старшей степенью $k-2$, а левая часть растет как многочлен со старшей степенью $k-3$. Таким образом, начиная с некоторого $N(k)$, для каждой цепи C_p и каждого s из R_1 множество свободных вершин $A_i^s(n)$, $i = 2, \dots, k-1$, можно разместить в треугольниках с основаниями из C_p и полученная цепь будет гамильтоновой в $G_1(n)$.

На самом деле мы использовали только ту часть ребер цепи C_p , вершины которых содержатся в множестве $A_1^s(n)$. Такие треугольники можно построить для каждого s из R_1 . Так как множества $A_1^s(n)$ и $A_1^r(n)$ не пересекаются при различных r и s из R_1 , то треугольники, построенные для вершин из $A_i^s(n)$, $i = 2, \dots, k-1$, и для вершин из $A_j^r(n)$, $j = 2, \dots, k-1$, не могут пересекаться по ребрам при различных r и s из R_1 . Значит, для любой цепи C_p все свободные вершины $A_i^s(n)$, $i = 2, \dots, k-1$, $s = 1, \dots, k-1$, можно разместить в вершинах треугольников и полученная цепь будет гамильтоновой цепью в $G_1(n)$. Потому согласно лемме 2 найдется не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) \right)!^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1)}$$

гамильтоновых цепей, причем ограничение снизу на n получается как максимум ограничений из леммы 2 и $N(k)$.

Заметим, что $G'(n-k+1) = G(n) \setminus G_1(n)$ – граф, изоморфный $G(n-k+1)$:

$$V'(n-k+1) = \{v : v \subset \{k, \dots, n\}, |v| = k\}.$$

Иными словами, если от графа отрезать внешний слой, он перейдет в граф того же вида, с заменой параметра n на $n-k+1$. Тем самым лемма 3 позволяет нам находить во внешних слоях графов $G'(m)$ гамильтоновы цепи. Осталось научиться гамильтоновы цепи в разных слоях соединять ребрами, т.е. доказать, что такие ребра между цепями в соседних слоях есть, и избавляться от вершин, на которых лемма 3 не гарантирует нам цепь. С последними мы будем расправляться так же, как и со свободными вершинами в слоях, – для достаточно больших n все вершины подграфа $G'(m)$ можно будет расставить между вершинами клик внешнего слоя.

ЛЕММА 4. Для любого k существует такое $M(k)$, что для любого $n > M(k)$, для любой клики T_i^s из $G_1(n)$ и любой вершины v из T_i^s найдется такое множество выделенных элементов $R_2 \subset \mathcal{R}_n \setminus R_1$, что в слое графа $G'(n-k+1)$ относительно R_2 найдется не менее

$$\left(\left(\frac{n-2k+2}{k-1} - 1 \right) \right)!^{\binom{n-2k+2}{k-1} (k-1)^2 / (n-2k+2)}$$

гамильтоновых цепей, начинающихся с вершины w , соседней с v в $G(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано какое-то множество R_2 из $\mathcal{R}_n \setminus R_1$. Определим слой $G'_1(n - k + 1)$ графа $G'(n - k + 1)$ относительно R_2 точно так же, как ранее был определен слой $G_1(n)$ графа $G(n)$ относительно R_1 .

Заметим здесь, что слой $G_2(n)$ графа $G(n)$ относительно R_1 , R_2 является слоем $G'_1(n - k + 1)$ графа $G'(n - k + 1)$ относительно R_2 .

Для вершины v из клики T_i^s графа $G_1(n)$ зафиксируем множество $R_2 = v \setminus \{s\}$. Согласно очевидной модификации леммы 1 слой $G'_1(n - k + 1)$ относительно R_2 содержит $\binom{n-2k+2}{k-1} (k-1)^2 / (n-2k+2)$ попарно непересекающихся клик T_i^{ts} размера $(n-2k+2)/(k-1)$, каждая вершина которых содержит ровно один выделенный элемент из R_2 . Значит, любая вершина w из любой клики T_i^{ts} соединена с v в $G(n)$. Согласно очевидной модификации леммы 3 в $G'_1(n - k + 1)$ содержится не менее

$$\left(\left(\frac{n-2k+2}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-2k+2}{k-1} (k-1)^2 / (n-2k+2)}$$

гамильтоновых цепей, если $n - k + 1 > N(k)$. Причем каждая такая цепь начинается из некоторой вершины w , соседней с v в $G(n)$.

Лемма 4 позволяет произвольную гамильтонову цепь C_1 слоя $G_1(n)$, завершенную в вершине v_1 из некоторой клики T_i^s , продолжить гамильтоновыми цепями в слое $G_2(n)$, выделенные элементы R_2 которого — $v_1 \setminus R_1$. Каждую гамильтонову цепь C_2 , проходящую по слоям $G_1(n)$ и $G_2(n)$ относительно R_1 , R_2 и завершенную в вершине v_2 из клики T_i^s слоя $G_2(n)$, лемма позволяет продолжить в слое $G_3(n)$, выделенные элементы которого — $v_2 \setminus R_2$. Так мы можем строить гамильтоновы цепи, пока лемма 3 гарантирует нам наличие цепи в $G_m(n)$, т.е. пока

$$n - (m - 1)(k - 1) > N(k).$$

В результате мы получим гамильтоновы цепи, проходящие по всем вершинам слоев $G_1(n), \dots, G_m(n)$, относительно выделенных элементов $R_1, \dots, R_m$. Покажем, что вершины, не вошедшие в $G_1(n), \dots, G_m(n)$, можно покрыть цепями. Отметим, что все такие вершины содержатся в множестве элементов, мощность которого лежит в пределах от $N(k) - k$ до $N(k)$ и от n не зависит. Обозначим ее l .

ЛЕММА 5. *Существует такое $L(l)$, что при любом $n > L(l)$ для любой последовательности слоев $G_1(n), \dots, G_m(n)$ относительно выделенных элементов $R_1, \dots, R_m$ и любой вершины q из любой клики T_p^{k-1} из $G_1(n)$ найдется не менее*

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1) - 2 \binom{l}{k} - 1}$$

гамильтоновых цепей, покрывающих слой $G_1(n)$ и $G'(l) = G(n) \setminus \bigcup_{i=1}^m G_i(n)$ и завершающихся в вершине q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва мы построим некоторую простую цепь C , которая будет чередовать вершины, содержащиеся в некоторых кликах T_i^1 из $G_1(n)$, и вершины из $G'(l)$. Всего в $G'(l)$ ровно $\binom{l}{k}$ вершин $v_1, \dots, v_{\binom{l}{k}}$, и в этих вершинах не содержатся элементы из $R_1, \dots, R_m$.

Для удобства дальнейшего изложения перенумеруем элементы из $\mathcal{R}_n$ так, чтобы элементы из множества $\bigcup_{i=1}^m R_i$ стали элементами из множества $\mathcal{R}_{m(k-1)}$. Тогда элементы из $G'(l)$ окажутся в $\mathcal{R}_n \setminus \mathcal{R}_{m(k-1)}$.

Последовательности вершин $v_1, \dots, v_{\binom{l}{k}}$ сопоставим такую последовательность элементов $a_1, \dots, a_{\binom{l}{k}}$, что для каждого i , с одной стороны, a_i содержится в v_i и, с другой стороны, a_{i+1} отлично от a_i . Рассмотрим вершины

$$u_i = \{1, a_i\} \cup \{k + (2i - 2)(k - 2), \dots, k - 1 + (2i - 1)(k - 2)\},$$

$$u'_i = \{1, a_i\} \cup \{k + (2i - 1)(k - 2), \dots, k - 1 + (2i)(k - 2)\}.$$

Так можно выбрать вершины, если n достаточно велико, а именно,

$$n > k - 1 + 2\binom{l}{k}(k - 2) + l.$$

Каждая u_i принадлежит некоторой клике $\mathcal{T}_j^1$. То же верно и про u'_i . Мы добились того, что и вершина u_i , и вершина u'_i пересекается с v_i ровно по элементу a_i , а u'_i и u_{i+1} пересекаются ровно по единице. Потому вершины

$$u_1, \quad v_1, \quad u'_1, \quad u_2, \quad v_2, \quad u'_2, \quad \dots, \quad u_{\binom{l}{k}}, \quad v_{\binom{l}{k}}, \quad u'_{\binom{l}{k}}$$

в указанном порядке образуют обещанную простую цепь C .

Зафиксируем цепь C . Пусть $\mathcal{T}_f^1$ – клики, вершины u_i и u'_i которых исключены из них. Если $(n - k + 1)/(k - 1) - 2\binom{l}{k} > k + 1$, то размер любой штрихованной и любой нештрихованной клики больше $k + 1$. В этом случае для любой вершины v из клики $\mathcal{T}_j^s$ (или $\mathcal{T}_j'^1$) в любой другой клике $\mathcal{T}_i^s$ (или соответственно $\mathcal{T}_i'^1$) найдутся не менее трех соседних с v вершин. Действительно, клика $\mathcal{T}_i^s$ содержит $(n - k + 1)/(k - 1)$ вершин, а клика $\mathcal{T}_j^1$ – не менее $(n - k + 1)/(k - 1) - 2\binom{l}{k}$ вершин, и каждая вершина u из $\mathcal{T}_i^s$ содержит элемент s , а каждая вершина u из $\mathcal{T}_i'^1$ содержит элемент 1. Каждый элемент из $v \setminus \{s\}$ содержится лишь в одной вершине клики $\mathcal{T}_i^s$. Значит, для того, чтобы нашлось три соседа, нам достаточно, чтобы размер клики был больше, чем $k + 1$.

Кроме того, если $n > 3k - 3$, то для любой вершины v из клики $\mathcal{T}_j^s$ (или $\mathcal{T}_i'^1$) и для любого r , отличного от s , среди вершин $A_1^r(n)$, $r = 2, \dots, k - 1$, найдутся не менее двух соседей вершины v . Действительно, если $n - k + 1 > 2(k - 2) + 2$, то среди вершин $A_1^r(n)$ найдутся вершины u и w , которые пересекаются с v по некоторым несовпадающим $\{g\}$ и $\{h\}$ соответственно, а все остальные элементы из $v \setminus \{s, g\}$ и $u \setminus \{r, g\}$ различны, равно как различны все элементы из $v \setminus \{s, h\}$ и $w \setminus \{r, h\}$.

Покажем, что, как следствие, мы можем пройти по цепи C , а затем обходить клики в $G_1(n)$ так же, как мы делали это в лемме 2, причем мы проследим, чтобы получившаяся цепь заканчивалась в q . Сначала выберем произвольную вершину из

$$A_1^1(n) \setminus \bigcup_{i=1}^{\binom{l}{k}} \{u_i, u'_i\}.$$

Для нее существует не менее

$$\left(\left(\frac{n - k + 1}{k - 1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n - k + 1}{k - 1}(k - 1)/(n - k + 1) - 2\binom{l}{k}}$$

простых цепей, содержащих все вершины $A_1^1(n) \setminus \bigcup_{i=1}^{(l)} \{u_i, u'_i\}$ и только их. Завершив любую из этих цепей в некоторой вершине v из некоторой клики $\mathcal{T}_i^1$, мы сможем найти вершину u из $A_1^2(n)$, соседнюю с v , и продолжить цепь простыми цепями, начинающимися с u и содержащими все вершины $A_1^2(n)$ и только их. Таких цепей на $A_1^2(n)$ не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)/(n-k+1)}.$$

Продолжим так до $A_1^{k-2}(n)$. Из последней вершины $A_1^{k-2}(n)$ мы перейдем в соседнюю вершину v в $A_1^{k-1}(n)$, отличную от q . Здесь мы воспользовались наличием двух соседей в $A_1^{k-1}(n)$. Если оказалось, что v и q находятся в одной клике $\mathcal{T}_p^{k-1}$, то мы сначала перейдем из v в любую другую клику из $A_1^{k-1}(n)$, обойдем все вершины $A_1^{k-1}(n)$, кроме вершин клики $\mathcal{T}_p^{k-1}$, затем из последней вершины перейдем в вершину $\mathcal{T}_p^{k-1}$, отличную от v и q . Здесь мы воспользовались наличием трех соседей в клике $\mathcal{T}_p^{k-1}$. Таких цепей не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)/(n-k+1)-1}.$$

Если же v и q оказались в разных кликах, то мы обойдем все вершины $A_1^{k-1}(n)$, кроме вершин клики $\mathcal{T}_p^{k-1}$, затем из последней вершины перейдем в вершину $\mathcal{T}_p^{k-1}$, отличную от v и q . Таких цепей не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)/(n-k+1)}.$$

Если не учитывать комбинации, которые мы получаем, выбирая различные обходы штрихованных клик, то все равно найдется не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2/(n-k+1)-2\binom{l}{k}-1}$$

простых цепей, содержащих все вершины $A_1(n)$ и $G'(l)$. Если для каждой полученной цепи в точности следовать схеме из доказательства леммы 3, то при условии

$$\begin{aligned} & \sum_{2 \leq i \leq k-1} \binom{k-2}{i-1} \binom{n-k+1}{k-i} \frac{1}{(n-k+1)/(k-1) + 2i - 2k - 2} \\ & < \binom{n-k+1}{k-1} \frac{k-1}{n-k+1} - \binom{l}{k}, \end{aligned}$$

найдется не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right) ! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2/(n-k+1)-2\binom{l}{k}-1}$$

гамильтоновых цепей, покрывающих $G_1(n)$ и $G'(l)$ и завершающихся в заранее выбранной вершине q .

Для каждой вершины q из любой клики T_i^{k-1} в $G_1(n)$ в $G(n) \setminus G_1(n)$ согласно лемме 4 можно построить не менее

$$\prod_{j=2}^m \left(\left(\frac{n-jk+j}{k-1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n-jk+j}{k-1} (k-1)^2 / (n-jk+j)}$$

гамильтоновых цепей, проходящих по слоям $G_2(n), \dots, G_m(n)$ относительно выделенных элементов $R_2, \dots, R_m$, где $R_2 = q \setminus R_1$. И согласно лемме 5 для каждого $G'(l) = G(n) \setminus \bigcup_{i=1}^m G_i(n)$ существует не менее

$$\left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1) - 2 \binom{l}{k} - 1}$$

гамильтоновых цепей, покрывающих $G_1(n)$ и $G'(l)$ и завершающихся в q . Если склеить первые цепи с соответствующими вторыми в вершине q , то у них либо будет отличаться префикс, если отличались $G'(l)$, относительно которых этот префикс строился, либо будет отличаться суффикс. Получается не менее

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{n-k+1}{k-1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1) - 2 \binom{l}{k} - 1} \\ &\quad \times \prod_{j=2}^m \left(\left(\frac{n-jk+j}{k-1} - 1 \right)! \right)^{\binom{n-jk+j}{k-1} (k-1)^2 / (n-jk+j)} \\ &= \left(\left(\frac{n-2k+2}{k-1} \right)! \right)^{\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1) - 2 \binom{l}{k} - 1} \\ &\quad \times \prod_{j=2}^m \left(\left(\frac{n-(j+1)(k-1)}{k-1} \right)! \right)^{\binom{n-jk+j}{k-1} (k-1)^2 / (n-jk+j)} \end{aligned}$$

гамильтоновых цепей.

К каждому факториалу $r!$ в выражении A применим оценку снизу $(r/e)^r$, получим

$$\begin{aligned} A &\geq \left(\frac{n-2k+2}{ek-e} \right)^{(n-2k+2)/(k-1) \left(\binom{n-k+1}{k-1} (k-1)^2 / (n-k+1) - 2 \binom{l}{k} - 1 \right)} \\ &\quad \times \prod_{j=2}^m \left(\frac{n-(j+1)(k-1)}{ek-e} \right)^{(n-(j+1)(k-1)/(n-jk+j)) \binom{n-jk+j}{k-1} (k-1)}. \end{aligned}$$

Каждый множитель оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n-jk+j}{ek-e} \right)^{(n-jk+j)/(n-(j-1)(k-1)) \binom{n-(j-1)(k-1)}{(k-1)(k-1)}} \\ &= \exp \left(\frac{(n-(j-1)(k-1)-1) \cdots (n-j(k-1))}{(k-2)!} \ln \left(\frac{n-jk+j}{ek-e} \right) \right) \\ &\geq \exp \left(\frac{(n-j(k-1))^{k-1}}{(k-2)!} \ln \left(\frac{n-j(k-1)}{ek-e} \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A &\geq \exp\left(\sum_{j=2}^{m+1} \frac{(n-j(k-1))^{k-1}}{(k-2)!} \ln\left(\frac{n-j(k-1)}{ek-e}\right) - \left(2\binom{l}{k} + 1\right) \ln\left(\frac{n-2k+2}{ek-e}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(\int_{n-(m+1)(k-1)}^{n-(k-1)} \frac{x^{k-1} \ln(x/(ek-e)) dx}{(k-2)!(k-1)} - \left(2\binom{l}{k} + 1\right) \ln\left(\frac{n-2k+2}{ek-e}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(\frac{n^k \ln n}{k!} (1 + o(1))\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\ln(\mathcal{P}(G(n))) \geq \frac{n^k \ln n}{k!} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, можно получить следующую простую оценку сверху числа гамильтоновых цепей. Если мы будем последовательно строить гамильтонову цепь, начинающуюся в фиксированной вершине, то в каждой вершине число возможностей выбрать следующую будет не больше степени вершины. Потому

$$\mathcal{P}(G(n)) \leq \left(k \binom{n-k}{k-1}\right)^{\binom{n}{k}} = \exp\left(\frac{n^k \ln n}{k(k-2)!} (1 + o(1))\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Радио и связь, М., 1979.
- [2] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [3] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [4] А. М. Raigorodskii, “Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [5] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [6] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108.
- [7] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, New York, 2009.
- [8] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156.
- [9] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Докл. РАН*, **454**:3 (2014), 268–269.
- [10] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Пробл. передачи информ.*, **49**:4 (2013), 98–104.
- [11] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics, II*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [12] Л. И. Боголюбовский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов”, *Докл. РАН*, **457**:4 (2014), 383–387.

- [13] Л. И. Боголюбский, А. С. Гусев, М. М. Пядеркин, А. М. Райгородский, “Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов”, *Матем. сб.* (в печати).
- [14] Е. Е. Демехин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Матем. сб.*, **204**:4 (2013), 49–78.
- [15] J. Balogh, A. Kostochka, A. Raigorodskii, “Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *Discuss. Math. Graph Theory*, **33**:1 (2013), 25–31.
- [16] A. M. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123.
- [17] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [18] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 202–247.
- [19] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.
- [20] Z. Baranyai, “On the factorization of the complete uniform hypergraph”, *Infinite and Finite Sets*, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1975, 91–108.

В. В. Уткин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: merflogin@gmail.com

Поступило

31.05.2014

Исправленный вариант

10.12.2014