Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский, О реализации подграфов случайного графа графами диаметров в евклидовых пространствах, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 699–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:25:08

О реализации подграфов случайного графа графами диаметров в евклидовых пространствах

А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский

Настоящая работа мотивирована классической проблемой Борсука о разбиении множеств в пространствах на части меньшего диаметра. В ней найдены точные оценки для максимального числа вершин индуцированного подграфа случайного графа, который с высокой вероятностью изоморфен графу диаметров с данным хроматическим числом в пространстве любой фиксированной размерности.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm10559

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых вероятностных характеристик, связанных с классической проблемой Борсука. Напомним, что эта проблема состоит в отыскании *числа Борсука* – величины $f(d)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$f(d) = \min \{ f : \forall \Omega \subset \mathbb{R}^d, \text{diam } \Omega = 1, \exists \Omega_1, \dots, \Omega_f : \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_f, \forall i \text{ diam } \Omega_i < 1 \}.$$

Гипотеза Борсука, предложенная своим автором в 1933 году (см. [1]), состояла в том, что $f(d) = d + 1$, и ровно шестьдесят лет эта гипотеза оставалась ни доказанной, ни опровергнутой. Лишь в 1993 г. Кан и Калаи нашли контрпримеры к гипотезе в размерностях $d \geq 2015$. Сейчас известно, что гипотеза Борсука верна при $d \leq 3$ и ложна при $d \geq 64$ (см. [2]–[8]).

С проблемой Борсука тесно связано понятие *графа диаметров*. Назовем графом диаметров в $\mathbb{R}^d$ любой граф $G = (V, E)$, вершины которого – точки $\mathbb{R}^d$, а ребра – пары вершин, отстоящих друг от друга на максимальное в множестве вершин расстояние:

$$V \subset \mathbb{R}^d, \quad |V| < \infty, \quad E = \left\{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \text{diam } V := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683), гранта Президента РФ МД-6277.2013.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

Понятно, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается V (*число Борсука множества V*), – это в точности хроматическое число $\chi(G)$ графа G , т.е. наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить вершины, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Однако было бы некорректно сказать, что $f(d)$ – это максимум таких хроматических чисел. Дело в том, что равенство хроматического числа числу Борсука справедливо лишь в случае конечных множеств; для бесконечных множеств равенства, вообще говоря, нет: например, если взять в качестве V сферу в $\mathbb{R}^d$, то очевидно, что хроматическое число ее графа диаметров (являющегося паросочетанием) равно двум, тогда как ее число Борсука есть $d + 1$ ввиду классической теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана (см. [9]).

Как мы отметили выше, на плоскости и в пространстве гипотеза Борсука доказана. Более того, существует достаточно много примеров графов диаметров в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с хроматическими числами 3 и 4 соответственно. Интересно оценить, стало быть, насколько эти примеры часты или редки. Одним из инструментов для такой оценки служит случайный граф Эрдеша–Реньи (см. [10]). А именно, пусть $V_n = \{1, \dots, n\}$, $p = p(n) \in [0, 1]$ и $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_{n,p})$ – вероятностное пространство, в котором Ω_n – множество всех графов на V_n без петель, кратных ребер и ориентации (так что $|\Omega_n| = 2^{C_n^2}$), $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$,

$$\mathbb{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}.$$

Иными словами, берутся случайные графы на n вершинах, в которых ребра проводятся взаимно независимо с одной и той же вероятностью p .

Положим

$$u_d(n, p) = \max \left\{ k : \mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = k, H = G|_W, \right. \\ \left. H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d, \chi(H) = d + 1) > \frac{1}{2} \right\},$$

$$u'_d(n, p) = \max \left\{ k : \mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = k, H = G|_W, \right. \\ \left. H - \text{связный граф диаметров в } \mathbb{R}^d, \chi(H) = d + 1) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Таким образом, мы ищем максимальное количество вершин в индуцированном (связном) подграфе случайного графа, который одновременно реализуется графом диаметров в пространстве и имеет при $d \leq 3$ наибольшее возможное в этом случае хроматическое число (при $d \geq 64$ такая постановка становится несколько произвольной, но по-прежнему осмысленной). Если для любого k

$$\mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : \\ |W| = k, H = G|_W, H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d, \chi(H) = d + 1) \leq \frac{1}{2},$$

то полагаем $u_d(n, p) = 0$ и аналогично поступаем с величиной $u'_d(n, p)$.

Величина $u_2(n, p)$ была введена в работе [11], а похожие величины для так называемых дистанционных графов рассматривались в статьях [13]–[15]. В следующем разделе мы сформулируем старые и новые результаты.

2. Формулировки результатов

В работе [11], а также в статье [12], был доказан ряд утверждений, которые мы сформулируем ниже. В тех статьях отдельно не говорилось о величинах u и u' . Однако связность неявно предполагалась, а потому теоремы там формулировались и доказывались формально для u , оставаясь справедливыми для u' . Желая создать максимально ясную картину предшествующих и новых результатов, мы будем в случаях, когда теоремы верны для обеих величин u и u' , писать u^* . Если же теорема сформулирована только, скажем, для u , то это значит, что, как минимум, мы не умеем распространить ее на u' . Итак, следующие теоремы 1–11 были доказаны нами ранее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p = o(1/n)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$u_2^*(n, p) = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q := 1 - p = o(1/n^{1.5})$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$u_2^*(n, p) = 3.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $q = o(1/n)$, но при этом $qn^{1.5} \rightarrow \infty$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$u_2^*(n, p) = 4.$$

ТЕОРЕМА 4. Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_2^*(n, p) \leq (2 + \varepsilon) \log_{1/(1-p)}(np).$$

ТЕОРЕМА 5. Положим $\tau(n) = p\sqrt[4]{n}/\ln n$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_2^*(n, p) \geq \left(2 - \varepsilon + \frac{4 \ln p}{\ln(np)}\right) \log_{1/(1-p)}(np).$$

ТЕОРЕМА 6. Зафиксируем некоторое число $\alpha \in (0, 1/2)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$ начиная с некоторого n выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$u_2^*(n, p) \geq (2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть найдется такое $c < 1$, что $p < c/n$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_3^*(n, p) = 0$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $q = o(1/n^{1.5})$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_3^*(n, p) = 4$.

ТЕОРЕМА 9. Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_3^*(n, p) \leq (2 + \varepsilon) \log_{1/(1-p)}(np).$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть для всякого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \rightarrow \infty$ и $q \ln n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_3^*(n, p) \geq (2 - \varepsilon) \log_{1/(1-p)}(np).$$

ТЕОРЕМА 11. Зафиксируем некоторое $\alpha \in (0, 1/4)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$, начиная с некоторого n , выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$u_3^*(n, p) \geq (2 - 4\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Видно, что при разумных условиях на асимптотику вероятности ребра теоремы 4 и 5 дают асимптотику величины $u_2^*(n, p)$ и эта асимптотика имеет вид

$$2 \log_{1/(1-p)}(np).$$

Более того, если p стремится к нулю, то в условиях теоремы 5 выполнено

$$2 \log_{1/(1-p)}(np) \sim 2 \frac{\ln n}{p}.$$

Поэтому теорема 6 просто дает аналог оценки из теоремы 5, который лишь в константу раз хуже, но работает на большем диапазоне значений p . Полностью аналогичная картина имеет место в теоремах 9–11. При этом утверждения теорем 4 и 9 совсем идентичны, в теореме 10 практически та же оценка, что и в теореме 5, но более узкий диапазон допустимых вероятностей ребра, а в теореме 11 и диапазон уже, чем в теореме 6, и оценка послабее.

Нам удалось получить аналоги теорем 1–11 при любом фиксированном d . Однако, начиная с $d = 4$, нижние оценки мы получили только для $u_d(n, p)$. Верхние же оценки верны для обеих величин.

ТЕОРЕМА 12. Пусть для всякого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \rightarrow \infty$ и $q \ln n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $d \geq 4$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_d(n, p) \geq (2 - \varepsilon) \log_{1/(1-p)}(np).$$

Теорема 12 отличается от теоремы 10 исключительно тем, что в ее доказательстве по существу используется возможность не требовать связности подграфа. Также отсутствие условия связности дает аналоги теорем 6 и 11. Более того, эти аналоги при $d < 4$ даже усиливают результаты указанных теорем. Но, повторим, это специфика величины u .

ТЕОРЕМА 13. Зафиксируем некоторое $\alpha \in (0, 1/d)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$, начиная с некоторого n , выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого d и любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$u_d(n, p) \geq (2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Как мы и говорили, результат сильнее результата теоремы 11, поскольку и диапазон допустимых значений α шире, и в оценке вычитается не 4α , а 2α . Правда, теорема 6 – это просто частный случай новой теоремы 13. Зато из доказательства будет видно, что при $d > 2$ границу $1/d$ можно сдвинуть вправо до $2/(d+1)$.

Перейдем к верхним оценкам. Они снова верны и для u , и для u' .

ТЕОРЕМА 14. Пусть p – это либо константа, либо произвольная функция, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, но при этом ограничена снизу величиной c/n , где $c > 1$. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_d^*(n, p) \leq (2 + \varepsilon)(d + 1) \log_{1/(1-p)}(np).$$

Теорема 14 дает абсолютно универсальную верхнюю оценку, работающую даже в более широком диапазоне, нежели теорема 4. В этом ее большой плюс. Однако при $d = 2, 3$ значение полученной в ней оценки несколько хуже ранее известных. Следующая теорема устраняет эту проблему ценой сокращения диапазона допустимых вероятностей ребра.

ТЕОРЕМА 15. Пусть p – константа. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполнено

$$u_d^*(n, p) \leq (2 + \varepsilon) \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \log_{1/(1-p)}(np).$$

Теорема 15 отлично согласуется с теоремами 4 и 9. Тем не менее, в ней p – константа. Дело в том, что доказательство теоремы 15 опирается на ряд тонких утверждений, многие из которых с трудом обобщаются на случаи непостоянных вероятностей (ср. [16]). Отметим также, что при $d \geq 4$ нижние и верхние оценки начинают отличаться друг от друга, так что асимптотику найти уже не удастся. В то же время важно подчеркнуть (и это будет видно из доказательства теоремы 15), что теорема 15 верна для всех индуцированных подграфов, являющихся графами диаметров, а не только для тех из них, у которых хроматическое число равно $d + 1$.

Наконец, обобщением и даже усилением теорем 1 и 7 служит следующая

ТЕОРЕМА 16. Пусть $d \geq 3$ и найдется такое $c < 2(d-1) \ln(d-1)$, что $p < c/n$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_d^*(n, p) = 0$.

При $d = 3$ теорема 16 уточняет теорему 7, так как здесь мы имеем ограничение $c < 4 \ln 2$, которое слабее неравенства $c < 1$.

В следующем разделе мы докажем теоремы 14 и 16. В разделе 4 мы приведем доказательства теорем 12 и 13. А доказательству теоремы 15 мы посвятим последний – пятый – раздел статьи.

3. Доказательства теорем 14 и 16

3.1. Доказательство теоремы 14. Для произвольного графа G обозначим через $\alpha(G)$ его число независимости, т.е. число элементов в наибольшем множестве вершин, которые попарно не соединены ребрами (такие множества называются *независимыми*). Понятно, что $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим

$$k = [(2 + \varepsilon)(d + 1) \log_{1/(1-p)}(np)].$$

Хорошо известно (см. [10]), что для функций p из утверждения теоремы 14 и для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}_{n,p}(\alpha(G) \leq (2 + \delta) \log_{1/(1-p)}(np)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, для любого $l \geq k$ имеем

$$\mathbb{P}_{n,p}(\forall H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \alpha(H) \leq (2 + \delta) \log_{1/(1-p)}(np)) \rightarrow 1, \\ n \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\mathbb{P}_{n,p}\left(\forall H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \chi(H) \geq \frac{l}{(2 + \delta) \log_{1/(1-p)}(np)}\right) \rightarrow 1, \\ n \rightarrow \infty.$$

Выбирая δ достаточно малым, получаем

$$\frac{k}{(2 + \delta) \log_{1/(1-p)}(np)} > d + 1,$$

откуда

$$\mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d, \chi(H) = d + 1) \\ \leq \mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \chi(H) = d + 1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при больших n имеем $u_d^*(n, p) \leq k$, и теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 16. Тут рассуждение похоже на рассуждение из предыдущего пункта. На сей раз мы апеллируем к замечательной теореме Ахлиоптаса–Наора (см. [17]).

ТЕОРЕМА 17. Пусть $p = c/n$, $c > 0$. Пусть k_c – это наименьшее k , с которым $c < 2k \ln k$. Тогда

$$\mathbb{P}_{n,p}(\chi(G) \in \{k_c, k_c + 1\}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

В нашем случае $c < 2(d - 1) \ln(d - 1)$. Значит, по теореме 17 имеем

$$\mathbb{P}_{n,p}(\chi(G) \leq d) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда для любого l верна оценка

$$\mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d, \chi(H) = d + 1) \\ \leq \mathbb{P}_{n,p}(\exists H = (W, F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \chi(H) = d + 1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при больших n имеем $u_d^*(n, p) = 0$, и теорема доказана.

4. Доказательства теорем 12 и 13

4.1. Доказательство теоремы 12. Рассмотрим граф $H = H_{d,k} = K \cup T$ на k вершинах, являющийся объединением клики K размера $d + 1$ и независимого множества T размера $k - (d + 1)$, причем вершины подграфа T также не соединяются ребрами с вершинами графа K . Назовем такой граф *кометой*. Очевидно, комета является графом диаметров в $\mathbb{R}^d$: для ее реализации достаточно голову кометы K расположить в вершинах правильного симплекса, а ее хвост T разместить внутри него.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left\lceil (2 - \varepsilon) \frac{\ln n}{-\ln q} \right\rceil, \quad q = 1 - p.$$

Ясно, что в условиях теоремы $k \rightarrow \infty$ и $k \sim (2 - \varepsilon) \log_{1/(1-p)}(np)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u_d(n, p) \geq k$.

В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geq n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k -вершинных подграфов случайного графа G , являющихся кометами с головой размера $d + 1$ в основании. Если мы докажем, что при всех больших n выполнено $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) > 1/2$, то при тех же n мы получим $u_d(n, p) \geq k$. Мы докажем еще больше: $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) \rightarrow 1$.

В силу неравенства Чебышёва имеем

$$\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) = \mathbb{P}_{n,p}(Y_k \geq 1) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}Y_k}{(\mathbb{M}Y_k)^2}.$$

Для доказательства теоремы остается установить две асимптотики: $\mathbb{M}Y_k \rightarrow \infty$ и $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$ (здесь $\mathbb{M}_f^2 Y_k$ – второй факториальный момент). За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbb{M}Y_k = C_n^k C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2}.$$

Нетрудно видеть, что поскольку p^{-1} не превосходит любую положительную степень n , то, по крайней мере,

$$k = O\left(\frac{\ln n}{p}\right) = o(\sqrt{n}).$$

Поэтому $C_n^k \sim n^k/k!$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\mathbb{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!} C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2} > \frac{n^k}{k^k} p^{d^2} q^{k^2/2} > \frac{1}{k^{d^2}} \left(\frac{n}{k} q^{k/2}\right)^k \geq \frac{1}{k^{d^2}} \left(\frac{npq^{k/2}}{2 \ln n}\right)^k.$$

У нас $k \rightarrow \infty$ и d – константа, а стало быть, для доказательства асимптотики $\mathbb{M}Y_k \rightarrow \infty$ достаточно показать, что $npq^{k/2}/\ln n \rightarrow \infty$. Подставляя явное выражение для k , при некотором $\varepsilon' = \varepsilon + o(1)$ имеем

$$\frac{npq^{k/2}}{\ln n} = \frac{npe^{(2-\varepsilon')(\ln n/(-2 \ln q)) \ln q}}{\ln n} = \frac{npe^{(-\ln n)(1-\varepsilon'/2)}}{\ln n} = \frac{npn^{-(1-\varepsilon'/2)}}{\ln n} = \frac{n^{\varepsilon'/2}p}{\ln n}.$$

Наконец, учтем, что $pn^{\varepsilon'/4} \rightarrow \infty$, а $\ln n < n^{\varepsilon'/4}$:

$$\frac{n^{\varepsilon'/2}p}{\ln n} = \frac{n^{\varepsilon'/4}}{\ln n}(n^{\varepsilon'/4}p) \rightarrow \infty,$$

и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$. Разумеется,

$$\mathbb{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} \mathbb{M}Y_{C_1, C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных k -вершинных комет $C_1, C_2 \subset K_n$, а Y_{C_1, C_2} – индикатор одновременного попадания комет C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Рассмотрим отдельно слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \emptyset$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k (C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2})^2 \sim (C_n^k C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2})^2 = (\mathbb{M}Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o(\sqrt{n})$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1, C_2} - S_1 = o((\mathbb{M}Y_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары комет $C_1 = K_1 \cup T_1$, $C_2 = K_2 \cup T_2$ посмотрим на количество вершин в пересечении их частей:

- 1) $|K_1 \cap K_2| = k_1 \in \{0, \dots, d+1\}$;
- 2) $|T_1 \cap K_2| = k_2 \in \{0, 1\}$;
- 3) $|K_1 \cap T_2| = k_3 \in \{0, 1\}$;
- 4) $|T_1 \cap T_2| = k_4 \in \{0, \dots, k - (d+1)\}$.

В этих обозначениях

$$S_2 = \sum (C_n^k C_k^{d+1}) (C_{d+1}^{k_1} C_{k-(d+1)}^{k_2} C_{d+1-k_1}^{k_3} C_{k-(d+1)-k_2}^{k_4}) \\ \times (C_{n-k}^{k-(d+1)-(k_3+k_4)} C_{n-2k+(d+1)+(k_3+k_4)}^{(d+1)-(k_1+k_2)}) p^{2C_{d+1}^2 - C_{k_1}^2} q^{2(C_k^2 - C_{d+1}^2) - C_{k_4}^2},$$

где сумма берется по всем допустимым упорядоченным наборам (k_1, k_2, k_3, k_4) . Здесь первая скобка отвечает за первую комету, вторая скобка – за общие вершины комет, а третья – за оставшиеся вершины второй кометы. Убедимся, что $S_2/S_1 = o(1)$, и завершим тем самым доказательство теоремы. Итак, имеем

$$\frac{S_2}{S_1} = \sum \frac{(C_n^k C_k^{d+1}) (C_{d+1}^{k_1} C_{k-(d+1)}^{k_2} C_{d+1-k_1}^{k_3} C_{k-(d+1)-k_2}^{k_4})}{C_n^k C_{n-k}^k (C_k^{d+1})^2} \\ \times \frac{(C_{n-k}^{k-(d+1)-(k_3+k_4)} C_{n-2k+(d+1)+(k_3+k_4)}^{(d+1)-(k_1+k_2)}) p^{2C_{d+1}^2 - C_{k_1}^2} q^{2(C_k^2 - C_{d+1}^2) - C_{k_4}^2 - k_2 - k_3}}{(p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2})^2}.$$

Нас интересует лишь вопрос стремления к нулю приведенной величины, поэтому, делая в дальнейшем ее верхние оценки, мы будем пренебрегать константами в них.

Соответствующие неравенства мы будем обозначать символом “ $\ll$ ”. В частности, у нас d – константа, и этим мы воспользуемся:

$$\frac{S_2}{S_1} \ll \sum \frac{(kC_k^{k_4})(C_n^{k-(d+1)-(k_3+k_4)}C_n^{(d+1)-(k_1+k_2)})}{C_n^k C_k^{d+1}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-C_{k_4}^2-2}.$$

Разобьем последнюю сумму на две части: Σ_1 – это часть, в которой $k_4 = 0$; Σ_2 – это часть, в которой $k_4 \geq 1$. Оценим каждую из частей максимальным слагаемым, умноженным на количество всех слагаемых, которое имеет порядок k . Имеем (с оптимальными k_1, k_2, k_3)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\ll \frac{k^2}{k^{d+1}} \cdot \frac{n^{k-(d+1)-k_3} n^{(d+1)-(k_1+k_2)} k!}{n^k (k-(d+1)-k_3)!} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} \leq \frac{n^{-k_1-k_2-k_3} k^{d+1+k_3}}{k^{d-1}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} \\ &= \frac{k^{2+k_3}}{n^{k_1+k_2+k_3}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} \leq \frac{k^3}{n^{k_1+k_2+k_3}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2}. \end{aligned}$$

У нас $k_4 = 0$, откуда следует, что не равна нулю сумма $k_1 + k_2 + k_3$, так как мы рассматриваем пересекающиеся кометы. Кроме того, $k_1 \leq d+1$, а значит, наше выражение оценивается сверху величиной $k^3/(np^{d^2}q^2)$, ввиду чего, подставляя явное выражение для k , получим

$$\frac{k^3}{np^{d^2}q^2} \leq \frac{(2 \ln n)^3}{p^{3+d^2}nq^2} = \left(\frac{2 \ln n}{n^{1/6}q^{2/3}} \right)^3 \frac{1}{(pn^{1/(2(3+d^2))})^{3+d^2}} \rightarrow 0,$$

потому что оба множителя стремятся к нулю.

В случае $k_4 \geq 1$ имеем за счет аналогичных выкладок

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\ll \frac{k^{2k_4+3}}{n^{k_1+k_2+k_3+k_4}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-C_{k_4}^2-2} \leq \frac{1}{p^{k_1^2}n^{k_1}} \left(\frac{k^{5k_4}}{n^{k_4}} q^{-k_4^2/2-2} \right) \\ &= \frac{1}{p^{k_1^2}n^{k_1}} \left(\frac{k^5}{n} q^{-k_4/2-2/k_4} \right)^{k_4}. \end{aligned}$$

Заметим, что множитель

$$\frac{1}{p^{k_1^2}n^{k_1}} = \frac{1}{(pn^{1/k_1})^{k_1^2}}$$

стремится к нулю, если $k_1 > 0$, и равен единице в случае $k_1 = 0$. А значит, для завершения доказательства достаточно проверить, что выражение в последней скобке стремится к нулю. В силу того, что

$$k_4 < k = (2 - \varepsilon') \frac{\ln n}{-\ln q} \leq 2 \frac{\ln n}{p},$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{k^5 q^{-k_4/2-2/k_4}}{n} &\leq \frac{k^5 e^{-(2-\varepsilon')(\ln n/(-2 \ln q)) \ln q}}{nq^2} = \frac{k^5}{n^{\varepsilon'/2}q^2} \leq 32 \frac{\ln^5 n}{p^5 q^2 n^{\varepsilon'/2}} \\ &= 32 \frac{\ln^5 n}{q^2 n^{\varepsilon'/4}} \frac{1}{(pn^{\varepsilon'/20})^5} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и все доказано.

4.2. Доказательство теоремы 13. Как и в теореме 12, рассматриваем кометы. При этом

$$k = \left[(2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p} \right].$$

Очевидно, что $k \rightarrow \infty$. Более того,

$$k = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) = \Theta(n^\alpha \ln n) = o(\sqrt{n}),$$

так как $\alpha < 1/d \leq 1/2$. Граница $1/d$ нужна только здесь. В дальнейшем хватит и границы $2/(d+1)$.

Как и в пункте 4.1, нужно сначала проверить, что при $npq^{k/2}/\ln n \rightarrow \infty$

$$\frac{npq^{k/2}}{\ln n} \geq \frac{n^{1-\alpha}}{\ln n} e^{-(1-\alpha-\varepsilon'/2)\ln n} = \frac{n^{\varepsilon'/2}}{\ln n} \rightarrow \infty.$$

И снова остается убедиться в том, что в обозначениях п. 4.1 выполнено $S_2/S_1 \rightarrow 0$. Оценивая слегка аккуратнее, получаем

$$\frac{S_2}{S_1} \ll \sum \frac{k^{k_2+k_3+2k_4}}{n^{k_1+k_2+k_3+k_4} k_4!} p^{-k_1^2/2} q^{-C_{k_4}^2}.$$

Каждое слагаемое можно записать в виде произведения трех сомножителей:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{k_2+k_3} \cdot (np^{k_1/2})^{-k_1} \cdot \frac{k^{2k_4} q^{-C_{k_4}^2}}{n^{k_4} k_4!}.$$

Зафиксируем произвольные k_1, k_2, k_3 и рассмотрим сумму таких слагаемых по k_4 (обозначим эти слагаемые $L_{k_1, k_2, k_3}(k_4)$).

Пусть сперва $k_4 = 0$. Тогда либо $k_1 > 0$, либо $k_2 + k_3 > 0$ (кометы пересекаются). Но у нас $k/n \rightarrow 0$ и

$$np^{k_1/2} \geq n \cdot n^{-\alpha k_1/2} \geq n^{1-\alpha(d+1)/2} \rightarrow \infty,$$

поскольку $\alpha < 2/(d+1)$. Значит, в любом случае $L_{k_1, k_2, k_3}(0) \rightarrow 0$.

Пусть теперь $k_4 \leq n^\alpha$. Покажем, что величины $L_{k_1, k_2, k_3}(k_4)$ убывают по k_4 :

$$\frac{L_{k_1, k_2, k_3}(k_4)}{L_{k_1, k_2, k_3}(k_4 + 1)} = \frac{n(k_4 + 1)}{k^2} q^{k_4} \geq \frac{n(k_4 + 1)}{k^2} e^{-(1+o(1))pn^\alpha} \geq \frac{n(k_4 + 1)}{k^2} e^{-C+o(1)} \rightarrow \infty.$$

Значит, при любых k_1, k_2, k_3 сумма величин $L_{k_1, k_2, k_3}(k_4)$ по k_4 от нуля до n^α стремится к нулю, как и первое слагаемое.

Есть еще кусок суммы, в котором $k_4 > n^\alpha$. В этом куске всегда

$$\frac{k^{2k_4} q^{-C_{k_4}^2}}{n^{k_4} k_4!} \leq \left(\frac{ek^2 q^{-k_4/2}}{nk_4} \right)^{k_4}.$$

В свою очередь,

$$\frac{ek^2 q^{-k_4/2}}{nk_4} \ll \frac{n^{2\alpha} (\ln n)^2 e^{(1+o(1))pk/2}}{n^{1+\alpha}} = n^{\alpha-1} (\ln n)^2 e^{(1-\alpha-\varepsilon'/2)\ln n} = (\ln n)^2 n^{-\varepsilon'/2} \rightarrow 0.$$

Таким образом, каждое из слагаемых при $k_4 > n^\alpha$ можно оценить, например, величиной 2^{-n^α} . А число этих слагаемых имеет порядок k , т.е. их сумма также стремится к нулю.

В итоге при любых k_1, k_2, k_3 сумма величин $L_{k_1, k_2, k_3}(k_4)$ по k_4 стремится к нулю. Но количество различных наборов чисел k_1, k_2, k_3 не превосходит константы, откуда и получаем, что вся сумма стремится к нулю. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 15

Доказательство довольно трудоемкое. Поэтому, желая сделать изложение максимально прозрачным, мы сначала рассмотрим случай $d = 4$ и $p = \text{const}$, а затем во втором пункте приведем рассуждение для $d > 4$, $p = \text{const}$. Наконец, в п. 5.3 мы обсудим проблему распространения полученных результатов на случаи медленно убывающих функций p .

5.1. Случай $d = 4$, $p = \text{const}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 2)$ и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (4 + \varepsilon) \frac{\ln n}{-\ln q} \right\rceil.$$

Обозначим $\text{cl}(G, r)$ число r -клик в данном графе G . Известно (см. [16]), что существуют такие числа $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ и любого графа диаметров G на n вершинах в $\mathbb{R}^4$ выполнено неравенство

$$\text{cl}(G, 3) \leq n^{3-\delta},$$

т.е. в любом достаточно большом графе диаметров в четырехмерном пространстве число треугольников сильно меньше, чем в полном графе.

Мы хотим доказать, что $u_4^*(n, p) \leq k$. Для этого достаточно показать, что лишь с вероятностью, стремящейся к нулю, в $G(n, p)$ найдется индуцированный подграф на k вершинах, в котором число треугольников не превосходит $k^{3-\delta}$, т.е.

$$\mathbb{P}(\exists H_k \subset G(n, p) : \text{cl}(H_k, 3) \leq k^{3-\delta}) \rightarrow 0.$$

Будем постепенно оценивать эту величину сверху. Разумеется,

$$\mathbb{P}(\exists H_k \subset G(n, p) : \text{cl}(H_k, 3) \leq k^{3-\delta}) \leq C_n^k \mathbb{P}(\text{cl}(G(k, p), 3) \leq k^{3-\delta}).$$

Далее будем пользоваться частным случаем теоремы Редля (см. [18], [19]), который можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 18. *Зафиксируем произвольное число t и рассмотрим граф K_k – полный граф на k вершинах. Обозначим через $\text{Sis}(k, t)$ произвольную максимальную по мощности совокупность подграфов графа K_k , изоморфных K_t , в которой никакие два подграфа не имеют общих ребер. Тогда при $k \rightarrow \infty$ выполнено*

$$a := |\text{Sis}(k, t)| \sim \frac{C_k^2}{C_t^2} = \frac{k^2}{t(t-1)}(1 + o(1)).$$

Теперь вернемся к нашему случайному графу $G(k, p)$. Пусть σ – перестановка множества его вершин. Пусть $F_3(\sigma, G(k, p), t)$ – это количество таких треугольников в $G(k, p)$, что в перестановке σ каждый из них является подграфом ровно в одной клике K_t из $\text{Sis}(k, t)$. В работе [16] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 19. *Если дан граф H_k на k вершинах и в нем количество треугольников не превосходит величины $k^{3-\delta}$, то для любого фиксированного t найдется такая перестановка σ множества его вершин, что*

$$F_3(\sigma, H_k, t) \leq k^{2-\delta}(t-2)(1+\zeta_t(k)),$$

где $\zeta_t(k) = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Введем еще одно обозначение $z = k^{2-\delta}(t-2)(1+\zeta_t(k))$ и продолжим оценку вероятности:

$$\begin{aligned} C_n^k \mathbb{P}(\text{cl}(G(k, p), 3) \leq k^{3-\delta}) &\leq C_n^k \mathbb{P}\left(\bigcup_{\sigma} (F_3(\sigma, G(k, p), t) \leq z)\right) \\ &\leq C_n^k k! \mathbb{P}(F_3(e, G(k, p), t) \leq z) = C_n^k k! \sum_{i=0}^z \mathbb{P}(F_3(e, G(k, p), t) = i), \end{aligned}$$

где e – тождественная перестановка. Обозначим теперь $\mathcal{P}_3(t, p)$ вероятность того, что в случайном графе $G(t, p)$ нет треугольника. Тогда

$$C_n^k k! \sum_{i=0}^z \mathbb{P}(F_3(e, G(k, p), t) = i) \leq C_n^k k! \sum_{i=0}^z \sum_{j=0}^i C_a^j (\mathcal{P}_3(t, p))^{a-j} (1 - \mathcal{P}_3(t, p))^j.$$

Оценивая через количество слагаемых, умноженное на максимальное из них, имеем

$$\begin{aligned} C_n^k k! \sum_{i=0}^z \sum_{j=0}^i C_a^j (\mathcal{P}_3(t, p))^{a-j} (1 - \mathcal{P}_3(t, p))^j \\ \leq n^k (z+1)^2 a^z (\mathcal{P}_3(t, p))^{a-z} = n^k (\mathcal{P}_3(t, p))^{a(1+o(1))}. \end{aligned} \quad (1)$$

Последнее верно в силу того, что, во-первых, $z = o(a)$ при $k \rightarrow \infty$ и, значит, $a - z = a(1 + o(1))$, а во-вторых,

$$(z+1)^2 a^z = e^{o(k^2)}, \quad (\mathcal{P}_3(t, p))^{a(1+o(1))} \leq e^{-\Omega(k^2)}.$$

Оценим величину $\mathcal{P}_3(t, p)$. Для этого воспользуемся теоремой из работы [20].

ТЕОРЕМА 20. *Если p подчиняется ограничениям теоремы 15, то*

$$\ln(\mathcal{P}_3(t, p)) = (1 + \xi(t)) \ln(\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ двудолен})),$$

где $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Переходим, стало быть, к оценке вероятности того, что случайный граф $G = (V, E)$ на t вершинах двудолен:

$$\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ двудолен}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^t \sum_W \sum_G \mathbb{P}(G),$$

где первое суммирование ведется по размеру первой доли (который определяет и размер второй), второе суммирование ведется по всем долям размера m , а третье – по всем двудольным графам $G = (W \sqcup (V \setminus W), E)$. Пусть l – количество ребер между долями. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^t \sum_W \sum_G \mathbb{P}(G) \leq \sum_{m=0}^t \sum_W \sum_{l=0}^{m(t-m)} q^{C_m^2 + C_{t-m}^2} C_{m(t-m)}^l p^l q^{m(t-m)-l}.$$

Множитель $q^{C_m^2 + C_{t-m}^2}$ от l не зависит, выносим его за знак суммы, тогда формула превращается в бином Ньютона для $(p + q)^{m(t-m)} = 1$, а значит, все выражение оценивается сверху величиной

$$\sum_{m=0}^t \sum_W q^{C_m^2 + C_{t-m}^2} = \sum_{m=0}^t C_t^m q^{C_m^2 + C_{t-m}^2}.$$

В дальнейшем мы будем подбирать t таким, каким нам нужно, поэтому уже сейчас можно считать, что t четно. В таком случае максимальным является слагаемое, в котором $m = t/2$. Действительно, при таком m и биномиальный коэффициент наибольший, и сумма в показателе степени q минимальна в силу выпуклости биномиального коэффициента. Количество слагаемых в нашей сумме равно $t + 1$, а значит, она оценивается сверху выражением

$$\sum_{m=0}^t C_t^m q^{C_m^2 + C_{t-m}^2} \leq (t + 1) \frac{t!}{((t/2)!)^2} \cdot q^{2C_{t/2}^2}.$$

Далее, используя тривиальные оценки, получаем

$$\begin{aligned} (t + 1) \frac{t!}{((t/2)!)^2} \cdot q^{2C_{t/2}^2} &\leq (t + 1) \frac{te(t/e)^t}{(e(t/(2e))^{t/2})^2} q^{t(t-2)/4} \leq t^2 2^t q^{t(t-2)/4} \\ &= \exp \left\{ 2 \ln t + t \ln 2 + \frac{t(t-2)}{4} \ln q \right\} \leq \exp \left\{ 4t + \frac{t(t-2)}{4} \ln q \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) \left(\frac{16}{(t-2)(-\ln q)} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Пришла пора выбрать константу t . Положим ее равной любому четному числу, которое не меньше величины

$$\max \left\{ 2 \left\lceil \frac{192}{(-\ln q)\varepsilon} + 1 \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{24}{\varepsilon} + 1 \right\rceil \right\}$$

и с которым функция $\xi(t)$ из теоремы 20 принимает такое значение, что $1 + \xi(t) \geq \sqrt{1 - \varepsilon/24}$. В таком случае, по крайней мере,

$$t \geq 2 \left(\frac{192}{(-\ln q)\varepsilon} + 1 \right),$$

и выражение в скобках оценивается как

$$\frac{16}{(t-2)(-\ln q)} - 1 \leq \frac{16(-\ln q)\varepsilon}{384(-\ln q)} - 1 = \frac{\varepsilon}{24} - 1.$$

В силу этого окончательно имеем

$$\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ двудолен}) \leq \exp \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right) \frac{t(t-2)}{4} \ln q \right\}.$$

Таким образом, нам удалось оценить сверху вероятность того, что случайный граф $G(t, p)$ двудолен, а через нее и вероятность того, что в $G(t, p)$ нет треугольников. Возвращаясь к нашей оценке (1) и используя теорему 20, получаем

$$\begin{aligned} n^k (\mathcal{P}_3(t, p))^{a(1+o(1))} &= \exp \{ k \ln n + a(1+o(1)) \ln \mathcal{P}_3(t, p) \} \\ &\leq \exp \left\{ k \ln n - \frac{k^2}{t(t-1)} (1+o(1))(1+\xi(t)) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right) \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ k \ln n - \frac{k^2}{t(t-1)} (1+o(1)) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^{3/2} \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь мы подставили явное выражение для a . В нем $o(1)$ – некоторая функция от k . Поскольку при $n \rightarrow \infty$ растет k , постольку можно выбрать такое n , что будет выполнено $1+o(1) \geq \sqrt{1-\varepsilon/24}$, а значит, экспонента не превосходит такого выражения:

$$\exp \left\{ k \ln n \left(1 - \frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) \right) \right\}.$$

Нам нужно проверить, что вся эта экспонента стремится к нулю с ростом n . Для этого достаточно доказать, что, скажем,

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) > 1 + \frac{\varepsilon}{16}.$$

Подставляем явное выражение для k :

$$\begin{aligned} \frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-2)}{4} (-\ln q) &= \frac{(4+\varepsilon) \ln n}{4(-\ln q)(\ln n)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t-2}{t-1} (-\ln q) \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{t-1} \right). \end{aligned}$$

Вспоминаем, что $t \geq 24/\varepsilon + 1$, а значит, $1 - 1/(t-1) \geq 1 - \varepsilon/24$. Окончательно имеем

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^3 \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{8} \right) = 1 + \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon^2}{32} > 1 + \frac{\varepsilon}{16},$$

ведь у нас $\varepsilon < 2$. Теорема доказана.

Отметим, что по ходу мы доказали следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 21. Если $p = \text{const}$, то для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}(\text{число треугольников в } G(k, p) \text{ меньше } k^{3-\delta}) < e^{-\Omega(k^2)}, \quad k \rightarrow \infty.$$

5.2. Случай $d > 4$, $p = \text{const}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 2)$, введем обозначение $s = \lfloor d/2 \rfloor + 1$ и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2 + \varepsilon) \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \frac{\ln n}{-\ln q} \right\rceil.$$

Известно (см. [16]), что существуют такие числа $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ и любого графа диаметров G на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ выполнено неравенство

$$\text{cl}(G, s) \leq n^{s-\delta},$$

т.е. в любом достаточно большом графе диаметров в d -мерном пространстве число s -клик сильно меньше, чем в полном графе. Отметим, что при $d = 4$ величина s равна трем, и это согласуется с тем, что мы использовали в предыдущем пункте.

Как и в предыдущем пункте, оценка $u_d^*(n, p) \leq k$ сводится к проверке стремления к нулю величины

$$C_n^k \mathbb{P}(\text{cl}(G(k, p), s) \leq k^{s-\delta}).$$

Как и раньше, рассмотрим систему $\text{Sis}(k, t)$ (величину t мы выберем позднее). Из теоремы 18 по-прежнему

$$a := |\text{Sis}(k, t)| = \frac{k^2}{t(t-1)}(1 + o(1)).$$

Пусть $F_s(\sigma, G(k, p), t)$ – это количество таких s -клик в $G(k, p)$, что в перестановке σ каждая из них является подкликой ровно в одной клике K_t из $\text{Sis}(k, t)$. Аналогом теоремы 19 служит теорема 22, фактически доказанная в [16].

ТЕОРЕМА 22. Если дан граф H_k на k вершинах и в нем количество s -клик не превосходит величины $k^{s-\delta}$, то для любого фиксированного t найдется такая перестановка σ множества его вершин, что

$$F_s(\sigma, H_k, t) \leq k^{2-\delta} \frac{(t-2)!}{(t-s)!} (1 + \zeta_{t,s}(k)),$$

где $\zeta_{t,s}(k) = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$.

С учетом теоремы 22 выкладки, предшествующие неравенству (1), повторяются почти дословно. Только надо ввести величину $\mathcal{P}_s(t, p)$ – вероятность того, что в $G(t, p)$ нет s -клик:

$$C_n^k \mathbb{P}(\text{cl}(G(k, p), s) \leq k^{s-\delta}) \leq n^k (\mathcal{P}_s(t, p))^{a(1+o(1))}. \quad (2)$$

Теорема 20 также допускает обобщение (см. [20]).

ТЕОРЕМА 23. Если p подчиняется ограничениям теоремы 15, то

$$\ln(\mathcal{P}_s(t, p)) = (1 + \xi_s(t)) \ln(\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ } (s-1)\text{-долен})),$$

где $\xi_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Переходим, стало быть, к оценке вероятности того, что случайный граф $G = (V, E)$ на t вершинах имеет $s - 1$ долю:

$$\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ } (s-1)\text{-долен}) = \frac{1}{(s-1)!} \sum_{(m_1, \dots, m_{s-1})} \sum_{W_1, \dots, W_{s-1}} \sum_G \mathbb{P}(G),$$

где первое суммирование ведется по всем возможным размерам соответствующих долей, т.е. $m_i = |W_i|$ и $\sum_{i=1}^{s-1} m_i = t$, второе суммирование ведется по всем долям выбранных размеров, а третье – по всем $(s-1)$ -дольным графам $G = (W_1 \sqcup \dots \sqcup W_{s-1}, E)$. Обозначим теперь для всех $i, j \in \{1, \dots, s-1\}$ количество ребер между соответствующими долями W_i и W_j через $l_{i,j} \in \{0, \dots, m_i m_j\}$. Тогда наша сумма примет вид

$$\frac{1}{(s-1)!} \sum_{(m_1, \dots, m_{s-1})} \sum_{W_1, \dots, W_{s-1}} \sum_{(l_{1,2}, \dots, l_{s-2, s-1})} q^{\sum C_{m_r}^2} \prod_{i,j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}}.$$

Множитель $q^{\sum C_{m_r}^2}$ от $l_{i,j}$ не зависит; выносим его за знак суммы, после чего, коль скоро у нас все слагаемые положительны, мы можем сумму произведений оценить сверху произведением сумм:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(s-1)!} \sum_{\mathbf{m}} \sum_{W_1, \dots, W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2} \sum_1 \prod_{i,j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}} \\ & \leq \sum_{\mathbf{m}} \sum_{W_1, \dots, W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2} \prod_{i,j} \sum_{l_{i,j}=0}^{m_i m_j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}} \\ & = \sum_{\mathbf{m}} \sum_{W_1, \dots, W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2} \prod_{i,j} 1 = \sum_{\mathbf{m}} \frac{t!}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}!} q^{\sum C_{m_r}^2}. \end{aligned}$$

В последнем выражении появляется полиномиальный коэффициент – число способов разбить множество вершин мощности t на подмножества заданных мощностей. Пусть t делится на $s-1$. В таком случае максимальным является слагаемое, в котором $m_r = t/(s-1)$ при всех r . Действительно, при таких m_r и полиномиальный коэффициент наибольший, и сумма $\sum C_{m_r}^2$ минимальна в силу выпуклости биномиального коэффициента. Количество слагаемых в нашей сумме равно C_{t+s-2}^{s-2} , а значит, она оценивается сверху выражением

$$\sum_{\mathbf{m}} \frac{t!}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}!} q^{\sum C_{m_r}^2} \leq C_{t+s-2}^{s-2} \frac{t!}{((t/(s-1))!)^{s-1}} \cdot q^{(s-1)C_{t/(s-1)}^2}.$$

Далее, используя тривиальные оценки и допущение $t > s$, получаем

$$\begin{aligned} & C_{t+s-2}^{s-2} \frac{t!}{((t/(s-1))!)^{s-1}} \cdot q^{(s-1)C_{t/(s-1)}^2} \\ & \leq (t+s)^{s-2} \frac{te(t/e)^t}{(e(t/(e(s-1))))^{t/(s-1)}} q^{t(t-s+1)/(2(s-1))} \\ & \leq (t+s)^{s-1} (s-1)^t q^{t(t-s+1)/(2(s-1))} \leq (2t)^{s-1} (s-1)^t q^{t(t-s+1)/(2(s-1))} \\ & = \exp \left\{ (s-1) \ln(2t) + t \ln(s-1) + \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} \ln q \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \exp \left\{ 3(s-1)t - \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{t(t-s+1)(-\ln q)}{2(s-1)} \left(\frac{6(s-1)^2}{(t-s+1)(-\ln q)} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$t \geq (s-1) \left(\frac{144(s-1)}{(-\ln q)(\varepsilon)} + 1 \right).$$

Тогда

$$\frac{6(s-1)^2}{(t-s+1)(-\ln q)} - 1 \leq \frac{6(s-1)^2(-\ln q)\varepsilon}{144(s-1)^2(-\ln q)} - 1 = \frac{\varepsilon}{24} - 1.$$

В силу этого получаем

$$\mathbb{P}(\text{граф } G(t, p) \text{ } (s-1)\text{-долен}) \leq \exp \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right) \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} \ln q \right\}.$$

Таким образом, нам удалось оценить сверху вероятность того, что случайный граф $G(t, p)$ имеет $(s-1)$ долю, а через нее и вероятность того, что в $G(t, p)$ нет K_s . Возвращаясь к нашей оценке (2) и используя теорему 23, получаем

$$\begin{aligned} n^k (\mathcal{P}_s(t, p))^{a(1+o(1))} &= \exp \{ k \ln n + a(1+o(1)) \ln \mathcal{P}_s(t, p) \} \\ &\leq \exp \left\{ k \ln n - \frac{k^2}{t(t-1)} (1+o(1))(1+\xi_s(t)) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right) \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} (-\ln q) \right\}. \end{aligned}$$

Опять же, можно считать, что и $1 + \xi_s(t) \geq \sqrt{1 - \varepsilon/24}$, и, начиная с некоторого n , выполнено $1 + o(1) \geq \sqrt{1 - \varepsilon/24}$, а значит, экспонента не превосходит такого выражения:

$$\exp \left\{ k \ln n \left(1 - \frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} (-\ln q) \right) \right\}.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} (-\ln q) > 1 + \frac{\varepsilon}{16}.$$

Подставляем выражение для k :

$$\begin{aligned} &\frac{k}{(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} (-\ln q) \\ &\geq \frac{(2+\varepsilon)(s-1)(\ln n)}{(-\ln q)(\ln n)t(t-1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)} (-\ln q) \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^2 \left(1 - \frac{s-2}{t-1} \right) \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{24} \right)^3 > 1 + \frac{\varepsilon}{16}, \end{aligned}$$

коль скоро $t \geq 24(s-2)/\varepsilon + 1$, а $\varepsilon < 2$. Теорема доказана.

Как и в предыдущем пункте, отметим, что по ходу мы доказали следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 24. Если $p = \text{const}$ и $d = \text{const}$, то для $s = [d/2] + 1$ и любого $\delta > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}(\text{число } s\text{-клик в } G(k, p) \text{ меньше } k^{s-\delta}) < e^{-\Omega(k^2)}, \quad k \rightarrow \infty.$$

5.3. Проблема со случаем $p \rightarrow 0$. Из доказательств, приведенных в предыдущих пунктах, видно, что одним из основных условий их благополучного завершения было условие нестремления к бесконечности величины t . Если в теоремах 19 и 22 (ср. [16]) от этого условия легко избавиться, то с теоремой 18 все намного сложнее. Однако некоторый шанс побороться с этим препятствием есть. А именно, Кузюрин в работе [21] доказал следующее усиление теоремы Редья.

ТЕОРЕМА 25. Пусть при $k \rightarrow \infty$ выполнено $t = t(k) \rightarrow \infty$, но $t < c\sqrt{k}$ при некотором постоянном $c < 1$. Тогда

$$|\text{Sis}(k, t)| \sim \frac{C_k^2}{C_t^2} = \frac{k^2}{t(t-1)}(1 + o(1)).$$

У нас есть несколько ограничений на значение t . Прежде всего, $t \gg 1/p$, и, если $p \rightarrow 0$, то t – не константа. Тем не менее, в свете теоремы 25 достаточно было бы асимптотики $1/p = o(\sqrt{k})$. Она равносильна тому, что $p\sqrt{k} \rightarrow \infty$, т.е.

$$p\sqrt{\frac{\ln n}{p}} \rightarrow \infty \iff \sqrt{p \ln n} \rightarrow \infty \iff p \ln n \rightarrow \infty.$$

Казалось бы, это победа, но, к сожалению, условие $t \gg 1/p$ не единственное. Есть еще требование $1 + \xi_s(t) \geq \sqrt{1 - \varepsilon/24}$. Величина $\xi_s(t)$ фигурирует в теореме 23, и, разумеется, она, вообще говоря, зависит от p . Когда p – константа, эта зависимость не играет роли, как и зависимость от s . Однако при $p \rightarrow 0$ нужно разбираться в деталях. Из работы [20] нам не удалось вывести явную зависимость от p . Скорее всего в условиях $p \ln n \rightarrow \infty$ эта зависимость невелика и по-прежнему t будет удовлетворять теореме 25. Однако проверить мы этого не можем и лишь высказываем соответствующую гипотезу. Как устроена жизнь в ситуации, когда $p \ln n = O(1)$, не ясно совсем.

Авторы выражают признательность рецензенту за ценные замечания и ссылку на работу в Архиве, которая может быть полезна для решения проблемы, обозначенной в последнем разделе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fundam. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [2] А. М. Райгородский, “О размерности в проблеме Борсука”, *УМН*, **52:6** (1997), 181–182.
- [3] А. М. Райгородский, “Об одной оценке в проблеме Борсука”, *УМН*, **54:2** (1999), 185–186.
- [4] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146.
- [5] А. М. Райгородский, “Контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса”, *Докл. РАН*, **434:2** (2010), 161–163.
- [6] А. М. Raigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [7] А. М. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32:1** (2012), 111–123.
- [8] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [9] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [10] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [11] А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский, “О реализации случайных графов графами диаметров”, *Тр. МФТИ*, **4**:1 (2012), 19–28.
- [12] А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский, “О реализации подграфов случайного графа графами диаметров на полуоси и в пространстве”, *Тр. МФТИ*, **6**:2 (2014), 44–60.
- [13] А. М. Райгородский, “Проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера и реализация случайного графа в пространстве”, *УМН*, **61**:4(370) (2006), 195–196.
- [14] С. В. Нагаева, А. М. Райгородский, “О вложимости конечных графов расстояний с большим хроматическим числом в случайные графы”, *Итоги науки и техн. Сер.Соврем. матем.*, **62**, 2009, 47–66.
- [15] С. В. Нагаева, А. М. Райгородский, “О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности”, *Докл. РАН*, **424**:3 (2009), 315–317.
- [16] A. B. Kupavskii, A. M. Raigorodskii, M. V. Titova, “New bounds for the distance Ramsey number”, *Discrete Math.*, **313**:22 (2013), 2566–2574.
- [17] D. Achlioptas, A. Naor, “The two possible values of the chromatic number of a random graph”, *Ann. of Math.* (2), **162**:3 (2005), 1335–1351.
- [18] V. Rödl, “On a packing and covering problem”, *Eur. J. Combin.*, **6**:1 (1985), 69–78.
- [19] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [20] H. J. Prömel, A. Steger, “On the asymptotic structure of sparse triangle free graphs”, *J. Graph Theory*, **21**:2 (1996), 137–151.
- [21] N. N. Kuzjurin, “On the difference between asymptotically good packings and coverings”, *Eur. J. Combin.*, **16**:1 (1995), 35–40.

А. А. Кокоткин

Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный
Московской обл.

Поступило

25.05.2014

Исправленный вариант

26.10.2014

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный
Московской обл.

E-mail: mrailgor@yandex.ru