Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Бибилов, Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой колебаний, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 3, 323–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:22:04

УДК 517.925.4

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ИЛИ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ

Ю. Н. Бибилов

Рассматриваются малые периодические по времени возмущения осциллятора, восстанавливающая сила которого имеет главный член с показателем равным трем или одной трети. Первый случай соответствует колебаниям с бесконечно малой частотой, второй случай – колебаниям с бесконечно большой частотой. Малость возмущения определяется как малостью рассматриваемой окрестности положения равновесия, так и малым неотрицательным параметром ε . При $\varepsilon = 0$ исследована устойчивость положения равновесия. При $\varepsilon > 0$ найдены условия ответвления инвариантного двумерного тора, сопровождающегося “мягкой” или “жесткой” потерей устойчивости с показателем потери, равным $1/2$.

Библиография: 5 названий.

0. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее колебания $x(t)$ частицы под действием восстанавливающей силы $p(x)$:

$$\ddot{x} + p(x) = 0, \quad (1)$$

где p – непрерывная при $|x| < x_0$ и достаточно гладкая при $0 < |x| < x_0$ функция, причем $p(0) = 0$, $x p(x) > 0$ при $x \neq 0$. Возможны следующие случаи:

- а) $p'(0)$ существует и $p'(0) > 0$;
- б) $p'(0) = 0$;
- в) $p'(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

Все движения осциллятора (1) периодические, поскольку интеграл энергии $\dot{x}^2/2 + P(x)$, где $P(x)$ – первообразная $p(x)$, является положительно определенной функцией. Подвергнем колебания (1) малому периодическому возмущению, сохраняющему равновесие $x = 0$. Малость возмущения характеризуется как малостью рассматриваемой окрестности положения равновесия, так и малым параметром $\varepsilon \geq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00404.

Рассмотрим случай а). Выделяя главный при $x \rightarrow 0$ член cx , $c \neq 0$, функции $p(x)$ и изменяя, если потребуется, масштаб времени, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (2)$$

где возмущение X – непрерывная при $t \in \mathbb{R}$ и малых x , $\dot{x}$, $\varepsilon \geq 0$, достаточно гладкая по x , $\dot{x}$, ε и ω -периодическая по t функция, формула Тейлора которой не содержит линейных по x , $\dot{x}$, ε членов, причем $X(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$.

При $\varepsilon = 0$ случай, когда вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (2) решается конечным числом членов формулы Тейлора функции $X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$, был исследован А. Пуанкаре [1] и А. М. Ляпуновым [2]. Более того, при условии

$$n + \frac{2\pi m}{\omega} \neq 0, \quad 0 < n < N, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

ими была определена фокусная величина g_N , в зависимости от знака которой нулевое решение оказывается асимптотически устойчивым или неустойчивым. В [3] Ю. И. Неймарк доказал существование инвариантного двумерного тора уравнения (2), если при переходе параметра ε через критическую точку нуль происходит изменение характера устойчивости положения равновесия $x = 0$. Таким образом, в этом случае имеет место бифуркация рождения двухчастотных колебаний.

В настоящей работе аналогичные вопросы рассматриваются в случаях б) и в). В случае б) частота невозмущенных колебаний стремится к 0 при неограниченном уменьшении амплитуды, а в случае в) она неограниченно возрастает. Мы ограничиваемся рассмотрением модельных уравнений, когда главная часть функции $p(x)$ при $x \rightarrow 0$ равна x^3 в случае б) и равна $x^{1/3}$ в случае в). Представляется, что общий случай может быть исследован методами, предлагаемыми в данной работе. Полученные результаты аналогичны указанным выше результатам Пуанкаре, Ляпунова и Неймарка, однако необходимость в условиях типа (3) отпадает.

Результаты работы справедливы и аналогично доказываются, если возмущение X является квазипериодической функцией t с базисными частотами $\omega_1, \dots, \omega_r$ при условии, что последние удовлетворяют диофантову условию

$$\left| \sum_{i=1}^r k_i \omega_i \right| > K \left(\sum_{i=1}^r |k_i| \right)^{-\sigma},$$

где k_i – целые числа, не равные 0 одновременно, $K > 0$, $\sigma > 0$.

1. Возмущения колебаний с бесконечно малой частотой.

1.1. Введение переменных “действие-угол”. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^3 = 0. \quad (4)$$

Следуя Ляпунову [4], введем переменные ρ , φ по формулам

$$x = \rho \operatorname{Cs}(\varphi), \quad \dot{x} = -\rho^2 \operatorname{Sn}(\varphi), \quad (5)$$

где функции Cs , Sn образуют решение системы

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = x^3$$

с начальными данными $Cs(0) = 1$, $Sn(0) = 0$. Из интеграла энергии для уравнения (4) вытекает, что $2Sn^2(\varphi) + Cs^4(\varphi) = 1$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно, функции Cs , Sn периодические с некоторым периодом $T > 0$. В переменных ρ, φ уравнение (4) запишется как система $\dot{\rho} = 0$, $\dot{\varphi} = \rho$, откуда заключаем, что частота невозмущенных колебаний является бесконечно малой функцией амплитуды при стремлении последней к 0.

Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\ddot{x} + x^3 = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (6)$$

где X – непрерывная при $t \in \mathbb{R}$, $|x| < x_0$, $|\dot{x}| < x_0$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ и достаточно гладкая по $x, \dot{x}, \varepsilon$ функция, ω -периодическая по t . Мы предполагаем, что порядок малости X не ниже четвертого, если переменной x приписывать первый порядок, а переменным $\dot{x}, \varepsilon$ – второй. Таким образом, возмущение X имеет вид

$$X = a_1(t)x^4 + a_2(t)x^2\dot{x} + a_3(t)\dot{x}^2 + \varepsilon b_1(t)x^2 + \varepsilon b_2(t)\dot{x} + X^*, \quad (7)$$

где порядок малости X^* в указанном выше смысле не ниже пятого. Замена (5) переводит уравнение (6) в систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho^{-1}X(t, \rho Cs(\varphi), -\rho^2 Sn(\varphi), \varepsilon) Sn(\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \rho - \rho^{-2}X(t, \rho Cs(\varphi), -\rho^2 Sn(\varphi), \varepsilon) Cs(\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Представляя правую часть по формуле Тейлора, получим в силу (7)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \sum_{i=3}^N P_i(t, \varphi) \rho^i + \varepsilon Q(t, \varphi) \rho + O(\rho^{N+1} + \varepsilon \rho^2 + \varepsilon^2), \\ \dot{\varphi} &= \rho + \Phi(t, \varphi, \rho) + \varepsilon \Phi^*(t, \varphi, \rho, \varepsilon) + \varepsilon^2 \rho^{-1} q(t, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Phi = O(\rho^2)$, $q = O(1)$, $\Phi^* = O(1)$,

$$P_3 = -a_1 Cs^4 Sn + a_2 Cs^2 Sn^2 - a_3 Sn^3, \quad Q = -b_1 Cs^2 Sn + b_2 Sn^2. \quad (10)$$

По предположению о достаточной гладкости X по $x, \dot{x}$ мы можем считать N сколь угодно большим натуральным числом.

В дальнейшем все функции t являются ω -периодическими, а функции φ (и ψ) – T -периодическими. При этом в п. 1 будет использоваться следующее представление функций $F(t, \varphi)$:

$$F(t, \varphi) = \overline{F} + \widehat{F}(\varphi) + \widetilde{F}(t, \varphi), \quad (11)$$

где $\overline{F}$ – среднее значение F по t , $\widehat{F}(\varphi)$ – среднее значение $F - \overline{F}$ по t .

1.2. *Устойчивость положения равновесия при $\varepsilon = 0$.* Рассмотрим систему (9) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \sum_{i=3}^N P_i(t, \varphi) \rho^i + O(\rho^{N+1}) = \Gamma(t, \varphi, \rho), \\ \dot{\varphi} &= \rho + \Phi. \end{aligned} \quad (12)$$

ЛЕММА 1. *Существует замена*

$$\rho = r + H(t, \varphi, r) = r + \sum_{i=2}^N h_i(t, \varphi) r^i, \quad (13)$$

приводящая систему (12) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sum_{i=3}^N g_i r^i + O(r^{N+1}) = R(t, \varphi, r), \\ \dot{\varphi} &= r + \Omega(t, \varphi, r), \end{aligned} \quad (14)$$

где g_i – постоянные, а $\Omega = O(r^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем замену (13) по t в силу систем (12) и (14). Получим следующее соотношение, которое должно определить H :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} r = \Gamma(t, \varphi, r + H) - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \Omega - \frac{\partial H}{\partial r} R - R.$$

Приравнявая коэффициенты при r^i , $i = 3, \dots, N$, и используя (11), получим для $i = 3$:

$$\frac{d\hat{h}_2}{d\varphi} + \frac{\partial \tilde{h}_3}{\partial t} = P_3(t, \varphi) - g_3, \quad (15)$$

а для произвольного $i = 4, \dots, N$

$$\frac{d\hat{h}_{i-1}}{d\varphi} + \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} = P_i(t, \varphi) + \beta_i(t, \varphi) - g_i, \quad (16)$$

где β_i – известная функция, если известны $h_3, \dots, h_{i-2}, \tilde{h}_{i-1}$. Полагая $g_3 = \bar{P}_3$, разобьем уравнение (15) на два следующих:

$$\frac{d\hat{h}_2}{d\varphi} = \hat{P}_3, \quad \frac{\partial \tilde{h}_3}{\partial t} = \tilde{P}_3.$$

Первое из этих уравнений определяет $h_2 = \hat{h}_2(\varphi)$ как первообразную $\hat{P}_3$. Рассматривая φ во втором уравнении как параметр, определим $\tilde{h}_3$. Предположим теперь, что уравнения (16) разрешены во всех порядках до $i-1$ включительно. Тогда β_i – известная функция. Полагая $g_i = \bar{P}_i + \beta_i$ и решая уравнения

$$\frac{d\hat{h}_{i-1}}{d\varphi} = \hat{P}_i + \beta_i, \quad \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} = \tilde{P}_i + \tilde{\beta}_i,$$

находим, как и ранее, функции $\hat{h}_{i-1}, \tilde{h}_i$. Это определяет искомую замену (13).

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (7) и (10)

$$g_3 = \overline{a_2 Cs^2 Sn^2}. \quad (17)$$

Действительно, $Cs^4 Sn = -\frac{1}{5}(Cs^5)'$; следовательно, $\overline{Cs^4 Sn} = 0$. Аналогично, $\overline{Sn^3} = 0$.

Из вида системы (14) вытекает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g_3 \neq 0$ или $g_i = 0$ при $i = 3, \dots, N-1$, но $g_N \neq 0$. Тогда нулевое решение уравнения (6) асимптотически устойчиво, если $g_N < 0$, и неустойчиво, если $g_N > 0$, $N \geq 3$.

1.3. Существование инвариантного тора при $\varepsilon > 0$. Рассмотрим систему (9) при $N = 3$ и положим в ней

$$\rho = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + z), \quad (18)$$

где $\alpha > 0$, $|z| < \alpha$. Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon Z_1 + \varepsilon z Z_2 + O(\varepsilon z^2 + \varepsilon^{3/2}), \\ \dot{\varphi} &= \sqrt{\varepsilon}\alpha + \sqrt{\varepsilon}z + O(\sqrt{\varepsilon}z^2 + \varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$Z_1 = \alpha^3 P_3 + \alpha Q, \quad Z_2 = 3\alpha^2 P_3 + Q. \quad (20)$$

ЛЕММА 2. Существует замена

$$z = y(1 + \sqrt{\varepsilon}\hat{g}(\varphi) + \varepsilon\tilde{g}(t, \varphi)) + \sqrt{\varepsilon}\hat{h}(\varphi) + \varepsilon\tilde{h}(t, \varphi), \quad (21)$$

приводящая систему (19) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon L(\alpha) + \varepsilon M(\alpha)y + O(\varepsilon y^2 + \varepsilon^{3/2}), \\ \dot{\varphi} &= \sqrt{\varepsilon}\alpha + \sqrt{\varepsilon}y + O(\sqrt{\varepsilon}y^2 + \varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

где $L = \alpha^3 \overline{P}_3 + \alpha \overline{Q}$, $M = 3\alpha^2 \overline{P}_3 + \overline{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (21) по t и учитывая (19) и (22), получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon Z_1 + \varepsilon Z_2(y + \sqrt{\varepsilon}y\hat{g} + \varepsilon y\tilde{g} + \sqrt{\varepsilon}\hat{h} + \varepsilon\tilde{h}) + O(\varepsilon y^2 + \varepsilon^{3/2}) \\ &= (\varepsilon L + \varepsilon M y)(1 + \sqrt{\varepsilon}\hat{g} + \varepsilon\tilde{g}) + \varepsilon y \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \\ &+ \left(\sqrt{\varepsilon}y \frac{d\hat{g}}{d\varphi} + \varepsilon y \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi} + \sqrt{\varepsilon} \frac{d\hat{h}}{d\varphi} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \varphi} \right) (\sqrt{\varepsilon}\alpha + \sqrt{\varepsilon}y). \end{aligned}$$

Приравнявая в этом равенстве коэффициенты при ε и εy , получим уравнения

$$\frac{d\hat{h}_2}{d\varphi}\alpha + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = Z_1 - L, \quad \frac{d\hat{g}}{d\varphi}\alpha + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = Z_2 - \frac{d\hat{h}}{d\varphi} - M.$$

Полагая $L = \overline{Z}_1$, $M = \overline{Z}_2$, приходим к уравнениям

$$\frac{d\hat{h}}{d\varphi}\alpha = \hat{Z}_1, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \tilde{Z}_1, \quad \frac{d\hat{g}}{d\varphi}\alpha = \hat{Z}_2 - \frac{d\hat{h}}{d\varphi}, \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = \tilde{Z}_2.$$

Эти уравнения решаются аналогично уравнениям (15). Тем самым, искомая замена (21) определена.

Рассмотрим уравнение $L(\alpha) = 0$. Если $\overline{P}_3\overline{Q} < 0$, то это уравнение имеет решение $\alpha = \alpha^*$, где $\alpha^{*2} = -\overline{Q}\overline{P}_3^{-1}$. Положим в (18)–(21) $\alpha = \alpha^*$. Тогда систему (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \varepsilon M^* y + \varepsilon^{3/2} d(t, \varphi) + O(\varepsilon y^2 + \varepsilon^{3/2} y + \varepsilon^2), \\ \dot{\varphi} &= \sqrt{\varepsilon} \alpha^* + \sqrt{\varepsilon} y + \varepsilon Y(t, \varphi) + O(\sqrt{\varepsilon} y^2 + \varepsilon y + \varepsilon^{3/2}),\end{aligned}\quad (23)$$

где в силу (20) $M^* = M(\alpha^*) = 2\alpha^2 \overline{P}_3 = 2\alpha^2 g_3$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\overline{a}_2 \overline{b}_2 < 0$. Тогда при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ система (8) имеет инвариантный тор $\rho = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + A(t, \varphi, \varepsilon))$, где $A \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот тор асимптотически устойчив при $\overline{a}_2 < 0$ и неустойчив при $\overline{a}_2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $\overline{a}_2 \overline{b}_2 < 0$ равносильно в силу (10) условию $\overline{P}_3 \overline{Q} < 0$. Следовательно, мы можем положить в (19) $\alpha = \alpha^*$. Так же, как при доказательстве леммы 2, с помощью замены

$$\begin{aligned}y &= u + \sqrt{\varepsilon} \widehat{F}(\psi) + \varepsilon \widetilde{F}(t, \psi), \\ \varphi &= \psi + \sqrt{\varepsilon} \widehat{f}(\psi) + \varepsilon \widetilde{f}(t, \psi)\end{aligned}\quad (24)$$

усредним в системе (23) функции d, Y . В результате получим систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \varepsilon M^* u + \varepsilon^{3/2} \overline{d} + O(\varepsilon u^2 + \varepsilon^{3/2} u + \varepsilon^2), \\ \dot{\psi} &= \sqrt{\varepsilon} \alpha^* + \sqrt{\varepsilon} u + \varepsilon \overline{Y} + O(\sqrt{\varepsilon} u^2 + \varepsilon u + \varepsilon^{3/2}).\end{aligned}$$

После сдвига и изменения масштаба

$$u = \varepsilon^{3/4} v - \sqrt{\varepsilon} \overline{d} (M^*)^{-1}$$

получим систему

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \varepsilon M^* v + O(\varepsilon^{5/4}), \\ \dot{\psi} &= \sqrt{\varepsilon} \alpha^* + \varepsilon \beta + O(\varepsilon^{5/4}),\end{aligned}\quad (25)$$

где β – некоторая постоянная. Система (25) удовлетворяет условиям леммы 2.1 работы [4]. Согласно этой лемме система (25) имеет инвариантную поверхность $v = V(t, \psi, \varepsilon)$. В силу замен (24), (21), (18) эта поверхность определяет искомый тор. Кроме того, так как $\text{sign } \overline{a}_2 = \text{sign } M^*$, утверждение теоремы об устойчивости инвариантного тора вытекает из леммы 2.3 той же работы [4].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в уравнении (6) b_2 и коэффициент при $\varepsilon^2 x$ в разложении X не зависят от t , причем последний положителен, то при $\varepsilon > 0$ его нулевое решение асимптотически устойчиво, если $b_2 < 0$, и неустойчиво, если $b_2 > 0$. Из (17) и теорем 1 и 2 вытекает, что бифуркация рождения инвариантного тора имеет место, когда при переходе параметра ε через нулевое значение меняется характер устойчивости положения равновесия. При этом показатель потери устойчивости в смысле [5, с. 39] равен $1/2$.

2. Возмущения колебаний с бесконечно большой частотой.

2.1. Введение переменных “действие-угол”. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{1/3} = 0. \quad (26)$$

Введем переменные ρ, φ с помощью формул

$$x = \rho^3 C(\varphi), \quad \dot{x} = -\rho^2 S(\varphi), \quad (27)$$

где функции C, S образуют решение системы

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = x^{1/3}$$

с начальными данными $C(0) = 1, S(0) = 0$. Из интеграла энергии вытекает тождество $2S^2(\varphi) + 3C^{4/3}(\varphi) \equiv 3$. Обозначим период функций C, S через T . В переменных ρ, φ уравнение (26) примет вид системы

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\varphi} = \rho^{-1},$$

откуда заключаем, что частота невозмущенных колебаний является бесконечно большой функцией амплитуды. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\ddot{x} + x^{1/3} = X(t, x^{1/3}, \dot{x}, \varepsilon), \quad (28)$$

где $X(t, z, y, \varepsilon)$ – непрерывная при $t \in \mathbb{R}, |z| < x_0, |y| < x_0, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, достаточно гладкая по z, y, ε функция, ω -периодическая по t . Положим $X = X(t, z, y, 0) + \varepsilon Y(t, z, y, \varepsilon)$. Предположим, что

$$\begin{aligned} X(t, z, y, 0) &= \sum_{k+i=1}^N a_{ki}(t) z^k y^i + O((y+z)^{N+1}), \\ Y(t, z, y, \varepsilon) &= \sum_{k+i=1}^N b_{ki}(t, \varepsilon) z^k y^i + O((y+z)^{N+1}), \end{aligned} \quad (29)$$

где $a_{10}(t) = 0, b_{10}(t, \varepsilon) = 0$. Ограничение $b_{10}(t, \varepsilon) = 0$ не снижает общности наших рассмотрений, так как этого всегда можно добиться с помощью замены x на x' по формуле $x = x'(1 + \varepsilon b_{10})^{3/2}$.

Замена (27) переводит уравнение (28) в систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -(3\rho)^{-1} X(t, \rho C^{1/3}(\varphi), -\rho^2 S(\varphi), \varepsilon) S(\varphi), \\ \dot{\varphi} &= \rho^{-1} - \rho^{-2} X(t, \rho C^{1/3}(\varphi), -\rho^2 S(\varphi), \varepsilon) C(\varphi). \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (29), запишем систему (30) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \sum_{i=1}^N P_i(t, \varphi, \varepsilon) \rho^i + O(\rho^{N+1}), \\ \dot{\varphi} &= \rho^{-1} + \Phi(t, \varphi, \rho, \varepsilon), \end{aligned} \quad (31)$$

где Φ – непрерывная достаточно гладкая по ρ, ε при малых неотрицательных ρ, ε функция. В силу (29)

$$\begin{aligned} P_1(t, \varphi, 0) &= \frac{1}{3}a_{01}S^2 - \frac{1}{3}a_{20}C^{2/3}S, \\ P_2(t, \varphi, 0) &= -\frac{1}{3}a_{30}CS + \frac{1}{3}a_{11}C^{1/3}S^2, \\ \Phi(t, \varphi, 0, 0) &= a_{01}SC - a_{20}C^{5/3}. \end{aligned} \quad (32)$$

В п. 2 функции $F(t, \varphi)$ представляем в виде

$$F(t, \varphi) = \overline{F} + \widehat{F}(t) + \widetilde{F}(t, \varphi), \quad (33)$$

где, по-прежнему, $\overline{F}$ – среднее значение F по t, φ , а $\widehat{F}(t)$ – среднее значение $F - \overline{F}$ по φ .

2.2. Устойчивость положения равновесия по первому приближению.

ЛЕММА 3. *Существует замена*

$$\rho = rp(t) + r^2q(t, \varphi), \quad (34)$$

приводящая систему (31) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= g(\varepsilon)r + \sum_{i=2}^N R_i(t, \varphi, \varepsilon)r^i + O(r^{N+1}), \\ \dot{\varphi} &= (pr)^{-1} + \Theta(t, \varphi, r, \varepsilon), \end{aligned} \quad (35)$$

где g – постоянная, зависящая только от ε ,

$$\Theta(t, \varphi, 0, \varepsilon) = \Phi(t, \varphi, 0, \varepsilon) - qp^{-2}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (36) получается подстановкой (34) во второе уравнение (31). Для построения замены (34) продифференцируем равенство (34) по t в силу систем (31) и (35). Получим

$$\begin{aligned} (pr + qr^2)P_1 + \sum_{i=2}^N P_i r^i (p + qr)^i + O(r^{N+1}) \\ = p \left(gr + \sum_{i=2}^N R_i r^i \right) + r \frac{dp}{dt} + r^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2r \left(gr + \sum_{i=2}^N R_i r^i \right) + r^2 \frac{\partial q}{\partial \varphi} (p^{-1}r^{-1} + \Theta). \end{aligned} \quad (37)$$

Приравнивая здесь коэффициенты при r , приходим к уравнению

$$\frac{dp}{dt} + p^{-1} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = (P_1 - g)p.$$

Полагая $g = \overline{P}_1$ и используя представление (33), получаем два уравнения:

$$\frac{dp}{dt} = \widehat{P}_1 p, \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} = p^2 \widetilde{P}_1,$$

откуда

$$p = \exp \left(\int \widehat{P}_1 dt \right), \quad q = p^2 \int \widetilde{P}_1 d\varphi. \quad (38)$$

Этим замена (34) определена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (37), (36), (32) имеем

$$g(0) = \frac{1}{3}\bar{a}_{01}S^2, \quad (39)$$

$$R_2 = P_2p + P_1qp^{-1} - 2gp^{-1} - \frac{\partial q}{\partial t}p^{-1} + \frac{\partial q}{\partial \varphi}(qp^{-3} - \Phi_0p^{-1}), \quad (40)$$

где $\Phi_0 = \Phi(t, \varphi, 0, \varepsilon)$.

Так как в силу (39) знак $g(\varepsilon)$ совпадает при малых ε со знаком $\bar{a}_{01}$, из вида системы (35) вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Положение равновесия $x = 0$ уравнения (28) при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ асимптотически устойчиво, если $\bar{a}_{01} < 0$, и неустойчиво, если $\bar{a}_{01} > 0$.*

Таким образом, если $\bar{a}_{01} \neq 0$, т.е. если уравнение (28) эффективно содержит диссипативный член $a_{01}(t)\dot{x}$, то инвариантных торов при достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ не существует. В дальнейшем рассматриваем критический случай $a_{01}(t) \equiv 0$. Тогда $g(0) = 0$.

2.3. Устойчивость положения равновесия при $\varepsilon = 0$ в критическом случае. В критическом случае в силу (32) $\hat{P}_1(t) = 0$, так как функция $C^{2/3}S = -\frac{3}{5}(C^{5/3})'$ имеет нулевое среднее значение. Вследствие (38) $p(t, 0) = 1$ и система (35) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sum_{i=2}^N R_i(t, \varphi, 0)r^i + O(r^{N+1}), \\ \dot{\varphi} &= r^{-1} + \Theta(t, \varphi, r, 0), \end{aligned} \quad (41)$$

где в силу (40)

$$R_2 = P_2 + P_1q - \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial \varphi}(q - \Phi_0), \quad (42)$$

причем в силу (32) и (38)

$$P_1 = -\frac{1}{3}a_{20}C^{2/3}S = \tilde{P}_1, \quad q = \int \tilde{P}_1 d\varphi = \tilde{q}, \quad \Phi_0 = -a_{20}C^{5/3}. \quad (43)$$

ЛЕММА 4. *Существует замена*

$$r = z + \sum_{i=2}^{N+1} h_i(t, \varphi)z^i, \quad h_2 = \hat{h}_2, \quad h_{N+1} = \tilde{h}_{N+1}, \quad (44)$$

приводящая систему (41) к виду

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=3}^N g_i z^i + O(z^{N+1}), \\ \dot{\varphi} &= z^{-1} + \Psi(t, \varphi, z), \end{aligned} \quad (45)$$

где g_i – постоянная, Ψ – непрерывная функция, достаточно гладкая по z при малых z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (44) по t , в силу систем (41) и (45) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^N R_i z^i \left(1 + \sum_{k=1}^N h_{k+1} z^k \right)^i + O(z^{N+1}) \\ &= \sum_{i=3}^N g_i z^i \left(1 + \sum_{k=1}^N (k+1) h_{k+1} z^k \right) + \sum_{i=2}^{N+1} \frac{\partial h_i}{\partial t} z^i + \sum_{i=3}^{N+1} \frac{\partial h_i}{\partial \varphi} (z^{-1} + \Psi) z^i. \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при z^2 приводит к уравнению

$$\frac{dh_2}{dt} + \frac{\partial \tilde{h}_3}{\partial \varphi} = R_2(t, \varphi, 0), \quad (46)$$

а при z^i , $i = 3, \dots, N$, — к уравнениям

$$\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{h}_{i+1}}{\partial \varphi} = R_i(t, \varphi, 0) + \beta_i(t, \varphi) - g_i, \quad (47)$$

где функции β_i известны, если предшествующие уравнения разрешены. Полагая $g_i = \overline{R}_i + \beta_i$, из (47) интегрированием по t и φ (последнее при параметре t) определим $\hat{h}_3, \dots, \hat{h}_{N+1}$. Если $\overline{R}_2 = 0$, то аналогичным образом определим с помощью (46) и $h_2, \hat{h}_3$. Но указанное равенство имеет место, так как в формуле (42) $\overline{P}_2 = 0$ в силу (32); $\overline{P}_1 q = 0$ вследствие того, что в силу (43)

$$P_1 q = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\int P_1 d\varphi \right)^2;$$

по той же причине

$$\overline{\frac{\partial q}{\partial \varphi}} q = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = 0;$$

наконец, среднее значение

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} \Phi_0 = \frac{1}{3} a_{20} C^{7/3} S$$

равно 0, так как $S = -C'$.

Из леммы 4 вытекает

ТЕОРЕМА 4. Если $g_3 \neq 0$ или если $g_3 = \dots = g_{N-1} = 0$, но $g_N \neq 0$, $N > 3$, то положение равновесия $x = 0$ уравнения (28) при $\varepsilon = 0$ асимптотически устойчиво при $g_N < 0$ и неустойчиво при $g_N > 0$, $N \geq 3$.

2.4. Существование инвариантного тора при $\varepsilon > 0$ в критическом случае. Возвращаемся к рассмотрению случая $\varepsilon \geq 0$. Систему (35) в критическом случае после замены (44) при $N = 5$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= g_3 z^3 + \varepsilon g'(0)z + \frac{1}{2} \varepsilon^2 g''(0)z + \sum_{i=4}^5 g_i z^i + \varepsilon \sum_{i=2}^3 Z_i(t, \varphi) z^i \\ &\quad + O(z^6 + \varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^2 + \varepsilon^3 z), \\ \dot{\varphi} &= z^{-1} + z^{-1} \varepsilon B(t, \varphi, \varepsilon) + H(t, \varphi, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (48)$$

где H — непрерывная по всем переменным гладкая по z, ε при малых z, ε функция. В силу (36) и (43)

$$H(t, \varphi, 0, 0) = -a_{20} C^{5/3} - \int P_1 d\varphi. \quad (49)$$

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.

ЛЕММА 5. *Существует замена*

$$z = u + \varepsilon \sum_{i=2}^4 U_i(t, \varphi) u^i,$$

приводящая систему (48) к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u\sigma(u, \varepsilon) + O(u^6 + \varepsilon u^4 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^3 u), \\ \dot{\varphi} &= u^{-1} + u^{-1}\varepsilon B + \Xi(t, \varphi, u, \varepsilon), \end{aligned} \quad (50)$$

где Ξ – функция того же типа, что и H , причем

$$\Xi(t, \varphi, 0, 0) = H(t, \varphi, 0, 0), \quad \sigma = g_3 u^2 + \varepsilon g'(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 g''(0) + \sum_{i=4}^5 g_i u^{i-1} + \varepsilon \sum_{i=2}^3 G_i u^{i-1},$$

где G_i – постоянные.

Пусть

$$g_3 g'(0) < 0. \quad (51)$$

Тогда уравнение $\sigma(u, \varepsilon) = 0$ имеет положительное при малых $\varepsilon > 0$ решение $u = \sqrt{\varepsilon} \times \alpha(\sqrt{\varepsilon})$, где α – сходящийся ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, $\alpha(0) > 0$. Положим $u = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + v)$. Система (50) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \varepsilon M v + O(\varepsilon v^2 + \varepsilon^{3/2} v + \varepsilon^{5/2}), \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \alpha} + B_0(t, \varphi) + \sqrt{\varepsilon} B_1(t, \varphi) + O(\varepsilon^{-1/2} v + \varepsilon), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$M = 2\alpha^2(0)g_3, \quad B_0 = H(t, \varphi, 0, 0). \quad (53)$$

ЛЕММА 6. *С помощью замены*

$$\varphi = \psi + f_0(t) + \sqrt{\varepsilon} f_1(t, \psi) + \varepsilon f_2(t, \psi) \quad (54)$$

второе уравнение системы (52) можно привести к виду

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \alpha} + \beta_0 + \sqrt{\varepsilon} \beta_1 + O(\varepsilon^{-1/2} v + \varepsilon), \quad (55)$$

где β_0, β_1 – постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (54) по t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\alpha} + B_0(t, \psi + f_0 + \sqrt{\varepsilon}f_1 + \varepsilon f_2) + \sqrt{\varepsilon}B_1(t, \psi + f_0 + \sqrt{\varepsilon}f_1 + \varepsilon f_2) + O(\varepsilon^{-1/2}v + \varepsilon) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\alpha} + \beta_0 + \sqrt{\varepsilon}\beta_1 + \frac{df_0}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial t} \\ &+ \left(\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial f_1}{\partial \psi} + \varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial \psi} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\alpha} + \beta_0 + \sqrt{\varepsilon}\beta_1 \right). \end{aligned}$$

Приравниваем свободные члены

$$B_0(t, \psi + f_0) - \beta_0 = \frac{df_0}{dt} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \psi} \alpha^{-1}$$

и полагаем $\beta_0 = \bar{B}_0$. Так как $\hat{B}_0(t, \psi) = \hat{B}_0(t, \psi + f_0)$, то

$$B_0(t, \psi + f_0) - \beta_0 = \hat{B}_0 + \tilde{B}_0(t, \psi + f_0) = \hat{B}_0 + D(t, \psi),$$

где $D = \tilde{D}(t, \psi)$. Тогда f_0 является первообразной $\hat{B}_0$, а $\tilde{f}_1$ является первообразной $\alpha D(t, \psi)$ по ψ . Далее, приравниваем коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$:

$$(\hat{f}_1 + \tilde{f}_1)B^* + B_1(t, \psi + f_0) = \beta_1 + \frac{d\hat{f}_1}{dt} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \psi} \beta_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \alpha^{-1}, \quad (56)$$

где

$$B^* = \frac{\partial}{\partial \psi} B_0(t, \psi + f_0)$$

(функция $B_0(t, \varphi)$ дифференцируема по φ в силу (53) и (49)). Пусть β_1 равно среднему значению левой части равенства (56) по t, ψ . Так как среднее значение B^* по ψ равно 0, $\hat{f}_1$ оказывается первообразной среднего по ψ функции $B^* \tilde{f}_1 + B_1 - \beta_1$, а f_2 определяется оставшейся частью (56). Этим замена (54) определена.

ЗАМЕЧАНИЕ. В результате замены (54) вид первого уравнения системы (52) не изменяется.

Примем в системе (52), (55) ψ за независимую переменную. Получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\psi} &= \varepsilon^{3/2} \alpha M v + O(\varepsilon^{3/2} v^2 + \varepsilon^2 v + \varepsilon^3), \\ \frac{dt}{d\psi} &= \sqrt{\varepsilon} \alpha + \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^{3/2} \gamma_2 + O(\sqrt{\varepsilon} v + \varepsilon^2), \end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – постоянные. Полагая $v = \varepsilon^{5/4} w$, придем к системе

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\psi} &= \varepsilon^{3/2} \alpha M w + O(\varepsilon^{7/4}), \\ \frac{dt}{d\psi} &= \sqrt{\varepsilon} \alpha + \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^{3/2} \gamma_2 + O(\varepsilon^{7/4}). \end{aligned} \quad (57)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция X удовлетворяет условию Липшица по t , $a_{01}(t) \equiv 0$ и выполняется условие (51). Тогда при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ система (30) имеет инвариантный тор, определяемый уравнением $\rho = \sqrt{\varepsilon}(\alpha + A(t, \varphi, \varepsilon))$, где $A \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот тор асимптотически устойчив, если $g_3 < 0$, и неустойчив, если $g_3 > 0$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2, поскольку система (57) удовлетворяет условиям леммы 2.1 работы [4].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть в критическом случае $g'(0) \neq 0$. Из (35) следует, что при $\varepsilon > 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, если $g'(0) < 0$, и неустойчиво, если $g'(0) > 0$. В силу (51) на основании теорем 4 и 5 заключаем, что бифуркация рождения инвариантного тора имеет место, когда при переходе ε через нулевое значение происходит смена устойчивости положения равновесия. При этом показатель потери устойчивости равен $1/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947.
- [2] Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [3] Неймарк Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических решений от параметра // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 4. С. 376–379.
- [4] Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Math. 1961. V. 73. P. 496–531.
- [5] Арнольд В. И., Афраимович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило
02.03.98