Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Андрич, А. Барбир, Й. Печарич, О неравенствах типа Виллета–Годуновой–Левина–Розанова с соответствующими средними типа Столярского, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 803–819

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:54:45

О неравенствах типа Виллета–Годуновой–Левина–Розанова с соответствующими средними типа Столярского

М. Андрич, А. Барбир, Й. Печарич

В данной работе рассматриваются обобщения неравенства Опиалья, полученные Виллеттом, Годуновой, Левиным и Розановой. Доказываются теоремы о среднем типа Коши, которые применяются для изучения средних типа Столярского, определенных полученными неравенствами. Также применяется метод получения n -экспоненциально выпуклых и экспоненциально выпуклых функций.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10560

1. Введение и вспомогательные утверждения. В 1960 г. Опиаль [1] доказал следующее неравенство.

НЕРАВЕНСТВО ОПИАЛЯ. Пусть функция $x \in C^1[0, h]$ удовлетворяет условиям

$$x(0) = x(h) = 0 \quad \text{и} \quad x(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, h).$$

Тогда

$$\int_0^h |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h (x'(t))^2 dt, \quad (1.1)$$

где $h/4$ – наилучшая возможная постоянная.

Это интегральное неравенство, содержащее производные от функций, является одним из фундаментальных результатов анализа качественных свойств решений дифференциальных уравнений (см. [2]). За последние пятьдесят лет вышло огромное количество работ, посвященных неравенству Опиалья. Одним из его многочисленных уточнений и обобщений является следующее неравенство, содержащее $x^{(n)}$, $n \geq 1$, которое получил Виллетт [3] (см. также [2; с. 128]):

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функция $x \in C^n[0, h]$ удовлетворяет условиям

$$x^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

Тогда имеет место

$$\int_0^h |x(t) x^{(n)}(t)| dt \leq \frac{h^n}{2} \int_0^h |x^{(n)}(t)|^2 dt. \quad (1.2)$$

Другое обобщение неравенства Опиалы (1.1) было получено Годуновой и Левиным [4] (см. также [2; с. 74]):

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть f – выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$ такая, что $f(0) = 0$. Далее, пусть x абсолютно непрерывна на $[\alpha, \tau]$ и $x(\alpha) = 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\alpha}^{\tau} f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq f\left(\int_{\alpha}^{\tau} |x'(t)| dt\right). \quad (1.3)$$

Следующее уточнение неравенства (1.3) принадлежит Розановой [5] (см. также [2; с. 82]):

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть f, g – выпуклые возрастающие функции на $[0, \infty)$, $f(0) = 0$, и пусть

$$p(t) \geq 0, \quad p'(t) > 0, \quad t \in [\alpha, \tau], \quad p(\alpha) = 0.$$

Далее, пусть x абсолютно непрерывна на $[\alpha, \tau]$ и $x(\alpha) = 0$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \leq f\left(\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) dt\right). \quad (1.4)$$

Кроме того, равенство в (1.4) достигается для функции $x(t) = cp(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Условие того, что функция f должна быть возрастающей, которое содержится в двух предыдущих теоремах, в действительности не нужно, так же как и условие $g \geq 0$, отсутствующее в теореме 1.3 (что легко следует из доказательств теорем).

Исходя из вышеперечисленных неравенств, мы уточнили неравенство Виллетта (1.2) и получили некоторые новые неравенства (см. п. 2). В п. 3 мы строим соответствующие функционалы для всех этих неравенств. Наша цель – получить теоремы о среднем типа Коши и применить их для изучения средних типа Столярского, которые все определяются рассматриваемыми неравенствами, а также для доказательства n -экспоненциальной выпуклости функционалов.

В конце введения приведем некоторые факты, определения и свойства экспоненциально выпуклых функций, которые используются в данной работе (более подробно, см. [6], [7]).

Пусть I – некоторый интервал в пространстве $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функция $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ называется n -экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на I , если неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \psi\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \geq 0$$

выполняется при всех $\xi_i \in \mathbb{R}$ и $x_i \in I$, $i = 1, \dots, n$.

Функция $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ называется n -экспоненциально выпуклой, если она n -экспоненциально выпукла в смысле Иенсена и непрерывна на I .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Из определения 1.5 следует, что 1-экспоненциально выпуклые в смысле Иенсена функции – это фактически неотрицательные функции. Также n -экспоненциально выпуклые в смысле Иенсена функции являются k -экспоненциально выпуклыми в смысле Иенсена при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Из определения положительных полуопределенных матриц и некоторых основных положений линейной алгебры получим следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Если ψ – n -экспоненциально выпукла в смысле Иенсена, то матрица $[\psi((x_i + x_j)/2)]_{i,j=1}^k$ является положительной полуопределенной матрицей при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. В частности,

$$\det \left[\psi \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right) \right]_{i,j=1}^k \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Функция $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ экспоненциально выпукла в смысле Иенсена на I , если она n -экспоненциально выпукла в смысле Иенсена при всех $n \in \mathbb{N}$.

Функция $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ экспоненциально выпукла, если она экспоненциально выпукла в смысле Иенсена и непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Известно (и это легко показать), что $\psi: I \rightarrow (0, \infty)$ является log-выпуклой в смысле Иенсена тогда и только тогда, когда неравенство

$$\alpha^2 \psi(x) + 2\alpha\beta\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \beta^2\psi(y) \geq 0$$

выполняется при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in I$. Отсюда следует, что функция является log-выпуклой в смысле Иенсена тогда и только тогда, когда она 2-экспоненциально выпукла в смысле Иенсена.

Также из основных положений теории выпуклости следует, что функция будет log-выпуклой тогда и только тогда, когда она 2-экспоненциально выпукла.

Нам также понадобятся следующие результаты (например, см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Если $x_1, x_2, x_3 \in I$ такие, что $x_1 < x_2 < x_3$, то функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Если f – выпуклая функция на интервале I и если

$$x_1 \leq y_1, \quad x_2 \leq y_2, \quad x_1 \neq x_2, \quad y_1 \neq y_2,$$

то выполнено неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Если функция f вогнутая, то выполняется обратное неравенство.

Далее, нам понадобятся разделенные разности, которые обычно применяются при изучении функций, имеющих разные степени гладкости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Разделенная разность второго порядка функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ в несовпадающих точках $y_0, y_1, y_2 \in I$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} [y_i; f] &= f(y_i), & i &= 0, 1, 2, \\ [y_i, y_{i+1}; f] &= \frac{f(y_{i+1}) - f(y_i)}{y_{i+1} - y_i}, & i &= 0, 1, \\ [y_0, y_1, y_2; f] &= \frac{[y_1, y_2; f] - [y_0, y_1; f]}{y_2 - y_0}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. Величина $[y_0, y_1, y_2; f]$ не зависит от порядка расположения точек y_0, y_1 и y_2 . Это определение можно обобщить на случай, когда некоторые или все точки совпадают. Именно, переходя к пределу при $y_1 \rightarrow y_0$ в (1.5), получим

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_2; f] = \frac{f(y_2) - f(y_0) - f'(y_0)(y_2 - y_0)}{(y_2 - y_0)^2}, \quad y_2 \neq y_0,$$

при условии, что f' существует, и далее, переходя к пределу при $y_i \rightarrow y_0$, $i = 1, 2$, в (1.5), получим

$$\lim_{y_2 \rightarrow y_0} \lim_{y_1 \rightarrow y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_0; f] = \frac{f''(y_0)}{2},$$

при условии, что f'' существует.

Наконец, напомним, что *неравенство Иенсена* для интегралов (см., например, [8]) имеет вид

$$\phi\left(\frac{\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) r(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} r(t) dt}\right) \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \phi(\psi(t)) r(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} r(t) dt}, \quad (1.6)$$

где $\phi(t)$ выпукла на $[\gamma, \delta]$, $\gamma \leq \psi(t) \leq \delta$, при всех $t \in [\alpha, \beta]$, $r(t) > 0$, и все интегралы в (1.6) существуют.

Также через $C^n[\alpha, \beta]$ обозначим пространство всех функций, определенных на $[\alpha, \beta]$ и имеющих непрерывные производные до порядка n , а через $AC[\alpha, \beta]$ обозначим пространство всех абсолютно непрерывных функций на $[\alpha, \beta]$. Через $AC^n[\alpha, \beta]$ обозначим пространство всех функций $f \in C^{n-1}[\alpha, \beta]$ таких, что $f^{(n-1)} \in AC[\alpha, \beta]$.

2. Основной результат. Исходя из теорем Виллетта 1.1 и Годуновой–Леви-на 1.2 (а также из их неравенства, приведенного в теореме 1 в работе [4]) и теоремы Розановой 1.3, получим следующий интересный результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть f – выпуклая функция на $[0, \infty)$ такая, что $f(0) = 0$. Пусть g выпукла, неотрицательна и возрастает на $[0, \infty)$. Пусть

$$p(t) \geq 0, \quad p'(t) > 0, \quad t \in [\alpha, \tau], \quad p(\alpha) = 0.$$

Далее, пусть $x \in AC^n[\alpha, \tau]$ такая, что

$$x^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

Если f – дифференцируемая функция, то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\ & \leq \frac{1}{\tau - \alpha} \int_{\alpha}^{\tau} f\left((\tau - \alpha) p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)\right) dt. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем доказательство с обобщений неравенства Опиалы, полученных Годуновой и Левиным в [4].

Пусть

$$y(t) = \int_{\alpha}^t \int_{\alpha}^{t_{n-1}} \dots \int_{\alpha}^{t_1} |x^{(n)}(s)| ds dt_1 \dots dt_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^t (t-s)^{n-1} |x^{(n)}(s)| ds, \quad (2.2)$$

где $t \in [\alpha, \tau]$, так что

$$y^{(n)}(t) = |x^{(n)}(t)|, \quad y(t) \geq |x(t)|.$$

Ясно, что $y^{(i)}(t) \geq 0$ и не убывает на $[\alpha, \tau]$ при всех $0 \leq i \leq n-1$. Следовательно, из того, что $y^{(i)}(\alpha) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, получим

$$y(t) \leq \frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t), \quad t \in [\alpha, \tau], \quad (2.3)$$

Так как g возрастает, то из неравенства Иенсена (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) & \leq g\left(\frac{y(t)}{p(t)}\right) \leq g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n-1)}(t)}{p(t)}\right) \\ & = g\left(\frac{(((\tau - \alpha)^{n-1})/(n-1)!)) \int_{\alpha}^t p'(s) (|x^{(n)}(s)|/p'(s)) ds}{\int_{\alpha}^t p'(s) ds}\right) \\ & \leq \frac{1}{p(t)} \int_{\alpha}^t p'(s) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right) ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и того, что f' возрастает, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\ & \leq \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n)}(t)}{p'(t)}\right) f'\left(\int_{\alpha}^t p'(s) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right) ds\right) dt \\ & = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{d}{dt} \left[f\left(\int_{\alpha}^t p'(s) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right) ds\right) \right] dt \\ & = f\left(\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{(n)}(t)}{p'(t)}\right) dt\right) \\ & = f\left(\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из неравенства Иенсена (1.6) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\ & \leq f\left(\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \\ & = f\left(\frac{1}{\tau - \alpha} \int_{\alpha}^{\tau} (\tau - \alpha) p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \\ & \leq \frac{1}{\tau - \alpha} \int_{\alpha}^{\tau} f\left((\tau - \alpha) p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)\right) dt. \end{aligned}$$

При $n = 1$ имеем следующее неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть f – выпуклая функция на $[0, \infty)$ такая, что $f(0) = 0$. Пусть g выпукла, неотрицательна и возрастает на $[0, \infty)$. Пусть

$$p(t) \geq 0, \quad p'(t) > 0, \quad t \in [\alpha, \tau], \quad p(\alpha) = 0.$$

Далее, пусть x абсолютно непрерывна на $[\alpha, \tau]$ и удовлетворяет условию $x(\alpha) = 0$. Если f – дифференцируемая функция, то выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\ & \leq \frac{1}{\tau - \alpha} \int_{\alpha}^{\tau} f\left((\tau - \alpha) p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)\right) dt. \end{aligned}$$

Используя тот же метод на интервалах $[\alpha, \tau]$ и $[\tau, \beta]$, с $g(x) = x$, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть f – выпуклая функция на $[0, \infty)$ такая, что $f(0) = 0$. Далее, пусть $x \in AC^n[\alpha, \beta]$ такая, что

$$x^{(i)}(\alpha) = x^{(i)}(\beta) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1.$$

Если f – дифференцируемая функция, то выполняется неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(|x(t)|) |x^{(n)}(t)| dt \leq \frac{2(n-1)!}{(\beta - \alpha)^n} \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\frac{(\beta - \alpha)^n |x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!}\right) dt. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. При $f(x) = x^r$, $r \geq 1$, неравенство (2.5) принимает вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^{r-1} |x^{(n)}(t)| dt \leq \frac{(\beta - \alpha)^{n(r-1)}}{2^{r-1} r [(n-1)!]^{r-1}} \int_{\alpha}^{\beta} |x^{(n)}(t)|^r dt.$$

Заметим, что если мы используем (2.2) вместо (2.3) и применим неравенство Иенсена к (2.4) (при $g(x) = x$), то при $r = 2$, получим

$$\int_{\alpha}^{\tau} |x(t)| |x^{(n)}(t)| dt \leq \frac{(\tau - \alpha)^n}{2(n-1)!} \int_{\alpha}^{\tau} |x^{(n)}(t)|^2 dt,$$

что будет существенным улучшением неравенства (1.2) на интервале $[\alpha, \tau]$. В частности, если $r = 2$ и $n = 1$, то при (2.5), получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| |x'(t)| dt \leq \frac{\beta - \alpha}{4} \int_{\alpha}^{\beta} |x'(t)|^2 dt,$$

т.е. неравенство Опиала (1.1) на интервале $[\alpha, \beta]$.

Частным случаем теоремы 2.3 при $n = 1$ является следующее утверждение (его также можно получить, применяя теорему 1 из работы [4]).

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть f – выпуклая функция на $[0, \infty)$ такая, что $f(0) = 0$. Далее, пусть x абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяет условию $x(\alpha) = x(\beta) = 0$. Если f – дифференцируемая функция, то выполняется неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\frac{(\beta - \alpha) |x'(t)|}{2}\right) dt.$$

3. Теоремы о среднем и экспоненциальная выпуклость. Исходя из неравенств (1.4) и (2.1), определим два функционала:

$$\Phi_1(f) = f\left(\int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) - \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt, \quad (3.1)$$

где функции g , p и x такие же, как в теореме 1.3, и

$$\begin{aligned} \Phi_2(f) = & \frac{1}{\tau - \alpha} \int_{\alpha}^{\tau} f\left((\tau - \alpha) p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1} |x^{(n)}(t)|}{(n-1)! p'(t)}\right)\right) dt \\ & - \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1} |x^{(n)}(t)|}{(n-1)! p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где функции g , p и x такие же, как в теореме 2.1 (в обоих случаях f – дифференцируемая функция такая, что $f(0) = 0$).

Если f – выпуклая функция, то из теорем 1.3 и 2.1 следует, что $\Phi_i(f) \geq 0$, $i = 1, 2$.

Далее, приведем теоремы о среднем для функционалов Φ_i . Сначала рассмотрим функционал Φ_1 . Пусть

$$0 < m \leq p' \leq M_1, \quad 0 \leq |x'| \leq M, \quad g \geq 0.$$

Тогда $0 \leq |x'|/p' \leq M/m$. Следовательно,

$$m(\tau - \alpha) \min_{[0, M/m]} g \leq \int_{\alpha}^{\tau} p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) dt \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g.$$

Также имеем

$$0 \leq \frac{|x(t)|}{p(t)} \leq \frac{\int_{\alpha}^t |x'(s)| ds}{\int_{\alpha}^t p'(s) ds} \leq \frac{M}{m}.$$

Так как очевидно, что $p(t) \leq M_1(\tau - \alpha)$, то получим

$$0 \leq p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g.$$

Следовательно, для функционала Φ_1 выполняется равенство

$$I_1 = \left[0, M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g \right] \quad (3.3)$$

и, аналогично, для функционала Φ_2 при $0 \leq |x^{(n)}| \leq M$ выполняется равенство

$$I_2 = \left[0, M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, (M/m)((\tau - \alpha)^{n-1}/n!)]} g \right]. \quad (3.4)$$

Введем следующие условия:

УСЛОВИЕ (A1). Пусть g – выпуклая, неотрицательная и возрастающая функция на $[0, \infty)$. Пусть

$$p(t) \geq 0, \quad p'(t) > 0, \quad t \in [\alpha, \tau], \quad p(\alpha) = 0, \quad 0 < m \leq p' \leq M_1.$$

Далее, пусть x абсолютно непрерывна на $[\alpha, \tau]$,

$$x(\alpha) = 0, \quad 0 \leq |x'| \leq M.$$

УСЛОВИЕ (A2). Пусть g – выпуклая, неотрицательная и возрастающая функция на $[0, \infty)$. Пусть

$$p(t) \geq 0, \quad p'(t) > 0, \quad t \in [\alpha, \tau], \quad p(\alpha) = 0, \quad 0 < m \leq p' \leq M_1.$$

Далее, пусть

$$x \in AC^n[\alpha, \tau], \quad x^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq |x^{(n)}| \leq M.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (Ai) для функционалов Φ_i , $i = 1, 2$, соответственно. Пусть $f \in C^2[I_i]$ и $f(0) = 0$. Тогда существует $\xi \in I_i$ такая, что

$$\Phi_i(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \Phi_i(f_0), \quad i = 1, 2,$$

где $f_0(t) = t^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для функционала Φ_1 . Так как $f \in C^2[I_1]$, то существуют действительные числа

$$m = \min_{t \in I_1} f''(t) \quad \text{и} \quad M = \max_{t \in I_1} f''(t).$$

Легко показать, что функции f_1 и f_2 , определенные соотношениями

$$f_1(t) = \frac{M}{2} t^2 - f(t), \quad f_2(t) = f(t) - \frac{m}{2} t^2,$$

выпуклы. Следовательно, $\Phi_1(f_1) \geq 0$, $\Phi_1(f_2) \geq 0$ и имеют место неравенства

$$\frac{m}{2} \Phi_1(f_0) \leq \Phi_1(f) \leq \frac{M}{2} \Phi_1(f_0).$$

Если $\Phi_1(f_0) = 0$, то доказательство очевидно. Предположим, что $\Phi_1(f_0) > 0$. Тогда имеем

$$m \leq \frac{2\Phi_1(f)}{\Phi_1(f_0)} \leq M.$$

Следовательно, существует $\xi \in I_1$ такая, что

$$\Phi_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \Phi_1(f_0).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (Ai) для функционалов Φ_i , $i = 1, 2$, соответственно. Пусть $f, u \in C^2[I_i]$ и $f(0) = u(0) = 0$. Тогда существует $\xi \in I_i$ такая, что

$$\frac{\Phi_i(f)}{\Phi_i(u)} = \frac{f''(\xi)}{u''(\xi)}, \quad i = 1, 2,$$

при условии, что знаменатели не равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для функционала Φ_1 . Определим $h \in C^2[I_1]$ как $h = c_1 f - c_2 u$, где

$$c_1 = \Phi_1(u), \quad c_2 = \Phi_1(f).$$

Теперь из теоремы 3.1 следует, что существует $\xi \in I_1$ такая, что

$$\left(c_1 \frac{f''(\xi)}{2} - c_2 \frac{u''(\xi)}{2} \right) \Phi_1(f_0) = 0.$$

Так как $\Phi_1(f_0) \neq 0$ (иначе из теоремы 3.1 следует, что неравенство $\Phi_1(u) \neq 0$ не выполняется), то получим

$$\frac{\Phi_1(f)}{\Phi_1(u)} = \frac{f''(\xi)}{u''(\xi)}.$$

Эlegantный метод построения n -экспоненциально выпуклых и экспоненциально выпуклых функций представлен в работе [9]. Воспользуемся этим методом для доказательства n -экспоненциальной выпуклости функционалов Φ_i , $i = 1, 2$. Следующая теорема аналогична теореме 3.9 в работе [7], и мы приводим здесь ее доказательство для удобства читателей.

Заметим, что интервалы I для функционалов Φ_i , $i = 1, 2$, определены здесь соотношениями (3.3) и (3.4) соответственно.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, где J – интервал в $\mathbb{R}$, – семейство функций, определенных на интервале I в $\mathbb{R}$ и таких, что функция $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ является n -экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на J для любых трех несовпадающих точек $y_0, y_1, y_2 \in I$. Пусть Φ_i , $i = 1, 2$, – линейные функционалы, определенные аналогично соотношениям (3.1) и (3.2). Тогда функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ является n -экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на J . Если функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ также непрерывна на J , то она n -экспоненциально выпукла на J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\xi_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in J$, $i = 1, \dots, n$, определим функцию

$$h(y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j f_{(s_i+s_j)/2}(y).$$

Из предположения, что функция $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ является n -экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена, получим

$$[y_0, y_1, y_2; h] = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j [y_0, y_1, y_2; f_{(s_i+s_j)/2}] \geq 0,$$

откуда, в свою очередь, следует, что h является выпуклой функцией на I . Таким образом, имеем $\Phi_i(h) \geq 0$, $i = 1, 2$. Поэтому,

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \Phi_i(f_{(s_i+s_j)/2}) \geq 0.$$

Отсюда следует, что функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ является n -экспоненциально выпуклой на J в смысле Иенсена. Если функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ также непрерывна на J , то она n -экспоненциально выпукла по определению.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, где J – интервал в $\mathbb{R}$, – семейство функций, определенных на интервале I в $\mathbb{R}$ и таких, что функция $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ является экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на J для любых трех несопадающих точек $y_0, y_1, y_2 \in I$. Пусть Φ_i , $i = 1, 2$, – линейные функционалы, определенные аналогично соотношениям (3.1) и (3.2). Тогда функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ является экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на J . Если функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ непрерывна на J , то она экспоненциально выпукла на J .

Обозначим средние для $f_s, f_q \in \Omega$ через

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)} \right)^{1/(s-q)}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{(d/ds)\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_s)} \right), & s = q. \end{cases} \quad (3.5)$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\Omega = \{f_s : s \in J\}$, где J – интервал в $\mathbb{R}$, – семейство функций, определенных на интервале I в $\mathbb{R}$ и таких, что функция $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ является 2-экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена на J для любых трех несопадающих точек $y_0, y_1, y_2 \in I$. Пусть Φ_i , $i = 1, 2$, – линейные функционалы, определенные аналогично соотношениям (3.1) и (3.2). Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) если функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ непрерывна на J , то она 2-экспоненциально выпукла на J ; если, кроме того, функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ положительна, то она также log-выпукла на J и при $r, s, t \in J$ таких, что $r < s < t$, имеем

$$(\Phi_i(f_s))^{t-r} \leq (\Phi_i(f_r))^{t-s} (\Phi_i(f_t))^{s-r}, \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

- (ii) если функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ положительна и дифференцируема на J , то при любых $s, q, r, t \in J$ таких, что $s \leq r$ и $q \leq t$, имеем

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{r,t}(\Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Первая часть этого утверждения следует непосредственно из теоремы 3.3, а во второй части, log-выпуклость на J следует из замечания 1.9. Так как $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ положительна, то при $r, s, t \in J$ таких, что $r < s < t$, и при $f(s) = \log \Phi_i(f_s)$ из предложения 1.10 имеем

$$(t-s) \log \Phi_i(f_r) + (r-t) \log \Phi_i(f_s) + (s-r) \log \Phi_i(f_t) \geq 0,$$

что эквивалентно неравенству (3.6).

(ii) Функция $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ является log-выпуклой на J в силу утверждения (i), т.е. функция $s \mapsto \log \Phi_i(f_s)$ выпукла на J . Применяя предложение 1.11, получим

$$\frac{\log \Phi_i(f_s) - \log \Phi_i(f_q)}{s - q} \leq \frac{\log \Phi_i(f_r) - \log \Phi_i(f_t)}{r - t} \quad (3.8)$$

при $s \leq r, q \leq t, s \neq q, r \neq t$, и следовательно, имеем

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{r,t}(\Phi_i, \Omega).$$

Случаи $s = q$ и $r = t$ являются предельными для (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. В случае, когда две из трех точек $y_0, y_1, y_2 \in I$ совпадают, утверждения теоремы 3.3, следствия 3.4 и теоремы 3.5 остаются верными для семейства дифференцируемых функций f_s таких, что функция $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ является n -экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена (экспоненциально выпуклой в смысле Иенсена, log-выпуклой в смысле Иенсена). Далее, в случае, когда все три точки совпадают, эти утверждения верны для семейства дважды дифференцируемых функций с тем же самым свойством. Доказательства следуют из замечания 1.13 и соответствующих свойств выпуклости.

4. Применение для средних типа Столярского. В этом пункте, теоремы о среднем типа Коши 3.1 и 3.2 применяются для изучения средних типа Столярского, определенных функционалами $\Phi_i, i = 1, 2$. Некоторые семейства функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.3, следствия 3.4 и теоремы 3.5 (а также замечания 3.6), которые представлены в данной работе, позволяют построить большие семейства экспоненциально выпуклых функций.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим семейство функций

$$\Omega_1 = \{f_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : s \in \mathbb{R}\},$$

определенных соотношениями

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{e^{sx} - 1}{s^2}, & s \neq 0, \\ \frac{x^2}{2}, & s = 0. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{d^2 f_s}{dx^2}(x) = e^{sx} > 0,$$

то функции f_s выпуклы на $\mathbb{R}$ при любых $s \in \mathbb{R}$ и функция

$$s \mapsto \frac{d^2 f_s}{dx^2}(x)$$

экспоненциально выпукла по определению.

Как и в доказательстве теоремы 3.3, приходим к заключению, что $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ экспоненциально выпукла (и таким образом, экспоненциально выпукла в смысле Иенсена).

Заметим, что $f_s(0) = 0$. В силу следствия 3.4 функции $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, 2$, экспоненциально выпуклы в смысле Иенсена. Легко проверить, что эти отображения непрерывны (хотя отображение $s \mapsto f_s$ не является непрерывным при $s = 0$), и таким образом, они экспоненциально выпуклы.

Для этого семейства функций средние $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$, $i = 1, 2$, в соотношении (3.5) принимают вид

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)} \right)^{1/(s-q)}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot f_s)}{\Phi_i(f_s)} - \frac{2}{s} \right), & s = q \neq 0, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot f_0)}{3\Phi_i(f_0)} \right), & s = q = 0, \end{cases}$$

и в силу (3.7) они являются монотонными функциями относительно параметров s и q .

Например, рассмотрим функционал Φ_1 . Если Φ_1 положителен, то из теоремы 3.2, примененной к $f = f_s \in \Omega_1$ и $u = f_q \in \Omega_1$, следует, что существует

$$\xi \in I_1 = [0, M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g]$$

такая, что

$$e^{(s-q)\xi} = \frac{\Phi_1(f_s)}{\Phi_1(f_q)}.$$

Также получим, что

$$M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_1) = \log \mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_1)$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_1) \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g,$$

откуда следует, что $M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_1)$ является средним и в силу (3.7) монотонным средним. Аналогично получим

$$0 \leq M_{s,q}(\Phi_2, \Omega_1) \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, (M/m)((\tau-\alpha)^{n-1}/(n!))]} g, \quad (4.1)$$

и следовательно, $M_{s,q}(\Phi_2, \Omega_1)$ также является монотонным средним.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим семейство функций

$$\Omega_2 = \{g_s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : s \in \mathbb{R}\},$$

определенных соотношениями

$$g_s(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^s - 1}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log(x+1), & s = 0, \\ (x+1) \log(x+1), & s = 1. \end{cases}$$

Здесь

$$\frac{d^2 g_s}{dx^2}(x) = (x+1)^{s-2} = e^{(s-2)\log(x+1)} > 0,$$

откуда следует, что g_s выпукла при $x > 0$ и

$$s \mapsto \frac{d^2 g_s}{dx^2}(x)$$

экспоненциально выпукла по определению. Также имеем $g_s(0) = 0$. Рассуждая как в примере 4.1, приходим к выводу, что отображение $s \mapsto \Phi_i(g_s)$ экспоненциально выпукло и также $\log$ -выпукло. Следовательно, при $r, s, t \in J$ таких, что $r < s < t$, получим

$$(\Phi_i(g_s))^{t-r} \leq (\Phi_i(g_r))^{t-s} (\Phi_i(g_t))^{s-r}, \quad i = 1, 2.$$

В частности, рассмотрим функционал из следствия 2.5, который обозначим через Ψ :

$$\Psi(f) = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\frac{(\beta - \alpha)|x'(t)|}{2}\right) dt - \int_{\alpha}^{\beta} f'(|x(t)|)|x'(t)| dt. \quad (4.2)$$

Тогда имеем

$$\Psi(g_s) = \begin{cases} -\frac{2}{s(s-1)} + \frac{2}{(\beta - \alpha)s(s-1)} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\beta - \alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right)^s dt \\ \quad - \frac{1}{s-1} \int_{\alpha}^{\beta} (|x(t)| + 1)^{s-1} |x'(t)| dt, & s \neq 0, 1, \\ -\frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log\left(\frac{(\beta - \alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|x'(t)|}{|x(t)| + 1} dt, & s = 0, \\ \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\beta - \alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) \log\left(\frac{(\beta - \alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) dt \\ \quad - \int_{\alpha}^{\beta} |x'(t)| [\log(|x(t)| + 1) + 1] dt, & s = 1. \end{cases}$$

Далее, для этого семейства функций, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2)$ в (3.5) равно

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(g_s)}{\Phi_i(g_q)}\right)^{1/(s-q)}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)} - \frac{\Phi_i(g_0 g_s)}{\Phi_i(g_s)} - \frac{1}{s(s-1)} \frac{\Phi_i(g_0)}{\Phi_i(g_s)}\right), & s = q \neq 0, 1, \\ \exp\left(1 - \frac{\Phi_i(g_0^2)}{2\Phi_i(g_0)}\right), & s = q = 0, \\ \exp\left(-1 - \frac{\Phi_i(g_0 g_1)}{2\Phi_i(g_1)}\right), & s = q = 1, \end{cases}$$

и из (3.7) следует, что эта функция монотонна относительно параметров s и q .

Таким образом, для функционала Ψ , определенного соотношением (4.2), получим

$$\mu_{s,q}(\Psi, \Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{q(q-1) \left[-2 + \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right)^s dt - s \int_{\alpha}^{\beta} (|x(t)| + 1)^{s-1} |x'(t)| dt \right]}{s(s-1) \left(-2 + \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right)^q dt - q \int_{\alpha}^{\beta} (|x(t)| + 1)^{q-1} |x'(t)| dt \right)} \right)^{1/(s-q)}, \\ s \neq q, \\ \exp \left(\frac{1-2s}{s(s-1)} + \frac{\frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right)^s dt}{-2 + \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{\alpha-\beta} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right)^s - s(|x(t)| + 1)^{s-1} |x'(t)| \right] dt} \right. \\ \left. - \frac{\int_{\alpha}^{\beta} (|x(t)| + 1)^{s-1} |x'(t)| (1 + s \log(|x(t)| + 1)) dt}{-2 + \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{\alpha-\beta} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right)^s - s(|x(t)| + 1)^{s-1} |x'(t)| \right] dt} \right), \\ s = q \neq 0, 1, \\ \exp \left(1 - \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \left[\log^2 \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) - (\beta-\alpha) \log(|x(t)| + 1) \frac{|x'(t)|}{|x(t)| + 1} \right] dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{|x(t)| + 1} - 2 \log \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) \right] dt} \right), \\ s = q = 0, \\ \exp \left(\frac{\frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) \log^2 \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) dt}{2 \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{\beta-\alpha} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) \log \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) - |x'(t)| (\log(|x(t)| + 1) + 1) \right] dt} \right. \\ \left. - 1 - \frac{\int_{\alpha}^{\beta} |x'(t)| (\log^2(|x(t)| + 1) + 2 \log(|x(t)| + 1)) dt}{2 \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{2}{\beta-\alpha} \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) \log \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1 \right) - |x'(t)| (\log(|x(t)| + 1) + 1) \right] dt} \right), \\ s = q = 1. \end{cases}$$

Применяя теорему 3.2, получим, что $\xi \in I_1$ такая, что

$$(\xi + 1)^{s-q} = \frac{\Phi_1(g_s)}{\Phi_1(g_q)}.$$

Так как функция $\xi \mapsto (\xi + 1)^{s-q}$ обратима при $s \neq q$, то получим неравенство

$$0 \leq \left(\frac{\Phi_1(g_s)}{\Phi_1(g_q)} \right)^{1/(s-q)} \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g.$$

Из этого неравенства и из того, что $\mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_2)$ непрерывна, симметрична и монотонна, следует, что $\mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_2)$ является средним. Аналогичное утверждение верно для $m_{s,q}(\Phi_2, \Omega_2)$.

ПРИМЕР 4.3. Рассмотрим семейство функций

$$\Omega_3 = \{h_s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : s > 0\},$$

определенных соотношением

$$h_s(x) = \begin{cases} \frac{s^{-x} - 1}{\log^2 s}, & s \neq 1, \\ \frac{x^2}{2}, & s = 1. \end{cases}$$

Так как $s \mapsto (d^2 h_s / dx^2)(x) = s^{-x}$ — преобразование Лапласа неотрицательной функции (см. [9]), т.е.

$$s^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty e^{-st} t^{x-1} dt,$$

то эта функция экспоненциально выпукла на $(0, \infty)$. Очевидно, функции h_s выпуклы при любых $s > 0$ и $h_s(0) = 0$.

Для этого семейства функций, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$ в (3.5) равно

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(h_s)}{\Phi_i(h_q)} \right)^{1/(s-q)}, & s \neq q, \\ \exp \left(-\frac{\Phi_i(id \cdot h_s)}{s\Phi_i(h_s)} - \frac{2}{s \log s} \right), & s = q \neq 1, \\ \exp \left(-\frac{\Phi_i(id \cdot h_1)}{3\Phi_i(h_1)} \right), & s = q = 1, \end{cases}$$

и эта функция монотонна относительно параметров s и q в силу (3.7).

Применяя теорему 3.2, получим, что существует $\xi \in I_1$ такая, что

$$\left(\frac{s}{q} \right)^{-\xi} = \frac{\Phi_1(h_s)}{\Phi_1(h_q)}.$$

Следовательно,

$$M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3) = -L(s, q) \log \mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3)$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3) \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g,$$

откуда следует, что $M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3)$ является средним.

Логарифмическое среднее $L(s, q)$ определяется соотношениями

$$L(s, q) = \begin{cases} \frac{s - q}{\log s - \log q}, & s \neq q, \\ s, & s = q. \end{cases}$$

Для семейства Ω_3 получим результат аналогичный (4.1), т.е. $M_{s,q}(\Phi_2, \Omega_3)$ также является монотонным средним.

ПРИМЕР 4.4. Рассмотрим семейство функций

$$\Omega_4 = \{k_s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : s > 0\},$$

определенных соотношением

$$k_s(x) = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - 1}{s}.$$

Снова приходим к выводу, что так как $s \mapsto d^2 k_s / dx^2(x) = e^{-x\sqrt{s}}$ является преобразованием Лапласа неотрицательной функции (см. [10]), т.е.

$$e^{-x\sqrt{s}} = \frac{s}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-st} e^{-x^2/4t}}{t\sqrt{t}} dt,$$

то она экспоненциально выпукла на $(0, \infty)$. Для любых $s > 0$, функции k_s выпуклы и $k_s(0) = 0$.

Для этого семейства функций $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ в (3.5) равно

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)} \right)^{1/(s-q)}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_i(id \cdot k_s)}{2\sqrt{s} \Phi_i(k_s)} - \frac{1}{s} \right), & s = q, \end{cases}$$

и в силу (3.7) эта функция монотонна относительно параметров s и q .

Из теоремы 3.2 следует, что существует $\xi \in I_1$ такая, что

$$e^{-\xi(\sqrt{s}-\sqrt{q})} = \frac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)}.$$

Таким образом,

$$M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4) = -(\sqrt{s} + \sqrt{q}) \log \mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4)$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4) \leq M_1(\tau - \alpha) \max_{[0, M/m]} g,$$

откуда следует, что $M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4)$ является средним. Аналогично, для семейства Ω_4 получим (4.1), т.е. $M_{s,q}(\Phi_2, \Omega_4)$ также является монотонным средним.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Z. Opial, “Sur une inégalité”, *Ann. Polon. Math.*, **8** (1960), 29–32.
- [2] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations*, Math. Appl., **320**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [3] D. Willett, “The existence-uniqueness theorem for an n -th order linear ordinary differential equation”, *Amer. Math. Monthly*, **75**:2 (1968), 174–178.
- [4] Е. К. Годунова, В. И. Левин, “Об одном неравенстве Марони”, *Матем. заметки*, **2**:2 (1967), 221–224.
- [5] Г. И. Розанова, “Интегральные неравенства с производными и произвольными выпуклыми функциями”, *Ученые записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина*, **460** (1972), 58–65.
- [6] M. Anwar, J. Jakšetić, J. Pečarić, Atiq Ur Rehman, “Exponential convexity, positive semi-definite matrices and fundamental inequalities”, *J. Math. Inequal.*, **4**:2 (2010), 171–189.

- [7] J. Pečarić, J. Perić, “Improvements of the Giaccardi and Petrović inequality and related Stolarsky type means”, *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, **39**:1 (2012), 65–75.
- [8] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. C. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Math. Sci. Engrg., **187**, Acad. Press, Boston, MA, 1992.
- [9] J. Jakšetić, J. Pečarić, “Exponential convexity method”, *J. Convex Anal.*, **20**:1 (2013), 181–197.
- [10] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Math. Ser., **6**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

М. Андрич

University of Split, Хорватия

E-mail: maja.andric@gradst.hr

Поступило

10.04.2013

А. Барбир

University of Split, Хорватия

E-mail: ana.barbir@gradst.hr

Й. Печарич

University of Zagreb, Хорватия

E-mail: pecaric@element.hr