Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, Энергетическая функция градиенто-подобных потоков и проблема топологической классификации, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 856–863

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:16:30

Энергетическая функция градиенто-подобных потоков и проблема топологической классификации

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка

Для градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $n - 1$, введено понятие согласованной эквивалентности энергетических функций и показано, что согласованная эквивалентность энергетических функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10561

1. Введение и формулировка результатов. Пусть M^n – гладкое замкнутое ориентируемое многообразие. Дважды дифференцируемая функция $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, т.е. для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $(\partial^2 \varphi / (\partial x_i \partial x_j))|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса (см. [1; лемма 2.2]) в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Число $k \in \{0, \dots, n\}$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки p* . Будем обозначать индекс критической точки через $\text{ind}(p)$.

Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X = -\text{grad } \varphi$, называется *градиентным потоком*. Если φ – функция Морса, то градиентный поток не имеет замкнутых траекторий, все его состояния равновесия гиперболические и их множество совпадает с множеством критических точек функции φ , а размерность неустойчивого многообразия W_p^u любого состояния равновесия p (*индекс Морса*) равна $\text{ind}(p)$.

В силу работы [2] Смейла (теорема А) градиентный поток может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1 -топологии) потоком Морса–Смейла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011.)

Напомним, что гладкий поток f^t называется *поток Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий; а устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиенто-подобным потоком*.

Из работы [2] (теорема В) следует, что для любого градиенто-подобного потока f^t на M^n существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* – такая функция $\varphi: M^n \rightarrow [0, n]$, что

- 1) функция φ является функцией Морса;
- 2) множество критических точек функции φ совпадает с множеством $\Omega(f^t)$;
- 3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;
- 4) $\varphi(p) = \text{ind}(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

Более того, Смейл в [2] заметил, что существует такая метрика на M^n , в которой поток f^t является градиентным потоком для своей энергетической функции φ .

Мейер в работе [3] обобщил результат Смейла, построив для произвольных потоков Морса–Смейла на M^n энергетическую функцию Морса–Ботта, т.е. такую функцию Морса, гессиан которой в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня. Более того, из результатов работы Мейера следует, что самоиндексирующиеся энергетические функции можно использовать для топологической классификации градиенто-подобных потоков. Для точной формулировки этого результата напомним, что потоки f^t, f^{tt} на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f^{tt} с сохранением ориентации на траекториях. Для разбиения множества потоков Морса–Смейла на классы относительно отношения топологической эквивалентности при помощи самоиндексирующейся энергетической функции мы будем использовать следующее определение топологической эквивалентности функций, принадлежащее Тому [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две гладкие функции $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi': M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называются *топологически эквивалентными*, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H: M^n \rightarrow M^n$ и $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $\varphi' H = \chi \varphi$.

Мейер доказал, что топологическая эквивалентность самоиндексирующихся энергетических функций является необходимым условием топологической эквивалентности соответствующих потоков Морса–Смейла, а в случае градиенто-подобных потоков на многообразиях размерности $n = 2$ это условие также является достаточным¹.

Привлечение энергетической функции к решению задачи топологической классификации оказывается полезным при математическом моделировании, если энергетическая функция известна из физических соображений – например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля и т.д.

¹ В [3; предложение] утверждалось, что самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом для потоков Морса–Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях. Ошемков и Шарко в работе [5] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса–Смейла (с замкнутыми траекториями) на торе, имеющих эквивалентные самоиндексирующиеся энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиенто-подобных потоков

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности в терминах энергетических функций для систем из класса $G(M^n)$, $n > 2$, состоящего из градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $n - 1$.

Для потока $f^t \in G(M^n)$ обозначим через Ω_i множество неподвижных точек индекса Морса $i \in \{0, 1, n - 1, n\}$ и через $|\Omega_i|$ – мощность множества Ω_i . Топология многообразия M^n и структура множества состояний равновесия потока f^t определяется следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f^t \in G(M^n)$. Тогда

$$g = \frac{|\Omega_1 \cup \Omega_{n-1}| - |\Omega_0 \cup \Omega_n| + 2}{2}$$

является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:

- 1) если $g = 0$, то M^n является сферой S^n ;
- 2) если $g > 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме² g копий $S^{n-1} \times S^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 1 проводится по тому же алгоритму, что и доказательство аналогичных утверждений работ [1], теорема, [7], теорема 1.

Рис. 1. Фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков $f^t, f'^t \in G(S^3)$, самоиндексирующиеся энергетические функции которых эквивалентны

В отличие от двумерной ситуации, уже в классе $G(M^n)$ при $n \geq 3$ существуют топологически неэквивалентные потоки, самоиндексирующиеся энергетические функции которых эквивалентны. Примеры фазовых портретов таких потоков f^t, f'^t , принадлежащих классу $G(S^3)$, приведены на рис. 1. Множества критических

²Связной суммой $M_1^n \sharp M_2^n$ двух ориентируемых связных n -многообразий M_1^n, M_2^n называется многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$, полученное удалением из M_1^n, M_2^n шаров $B_1^n \subset M_1^n, B_2^n \subset M_2^n$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\phi: \partial B_1^n \rightarrow \partial B_2^n$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^n .

уровней самоиндексирующихся энергетических функций φ, φ' (точечным пунктиром на рисунке изображены множества уровня, соответствующие значениям 1 и 2) потоков f^t, f^{tt} объемлюще гомеоморфны, откуда следует топологическая эквивалентность функций φ, φ' . Потоки f^t, f^{tt} не являются топологически эквивалентными, поскольку стоковое состояние равновесия ω_3 потока f^t содержит в своем бассейне 4 неустойчивых сепаратрисы седловых состояний равновесия, а бассейн любого стока потока f^{tt} содержит не более двух сепаратрис.

Наличие таких примеров приводит к необходимости введения дополнительных инвариантов, которые бы позволяли различать топологически неэквивалентные потоки, имеющие эквивалентные энергетические функции. Для описания инварианта, предлагающегося в этой статье, представим многообразие M^n в виде объединения трех связных множеств: аттрактора $A = W_{\Omega_1 \cup \Omega_0}^u$, репеллера $R = W_{\Omega_{n-1} \cup \Omega_n}^s$ и множества $V = M^n \setminus (A \cup R)$, состоящего из блужающих траекторий потока f^t , идущих от A к R . Следуя [6], будем называть V *характеристическим многообразием*.

Пусть $\varphi: M^n \rightarrow [0, n]$ – самоиндексирующаяся энергетическая функция для f^t . Гиперповерхность Σ уровня $c \in (1, n-1)$ назовем *характеристической секущей* (она пересекает каждую траекторию характеристического пространства в точности в одной точке).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' для потоков $f, f^{tt} \in G(M^n)$ назовем *согласованно эквивалентными*, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H: M^n \rightarrow M^n$ и $\chi: [0, n] \rightarrow [0, n]$ такие, что

- 1) $\varphi' H = \chi \varphi$;
- 2) $H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega_1'}^s \cap H(\Sigma)$, $H(W_{\Omega_{n-1}}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega_{n-1}'}^u \cap H(\Sigma)$ для некоторой характеристической секущей Σ .

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Потоки $f^t, f^{tt} \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их энергетические функции согласованно эквивалентны.*

В п. 3 выделяется класс $G_0(M^n) \subset G(M^n)$ потоков, для которых из эквивалентности самоиндексирующихся функций следует их согласованная эквивалентность, и, таким образом, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Класс $G_0(M^n)$ состоит из потоков, индекс Морса всех седловых состояний равновесия которых равен 1. Из [7; теорема 1] следует справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого потока $f^t \in G_0(M^n)$ неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие M^n диффеоморфно n -сфере.*

Основным результатом п. 3 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Потоки $f^t, f^{tt} \in G_0(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

Проблема топологической классификации потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности три и выше решалась, в частности, в работах [8]–[11]. Флейтасом в [9] получена топологическая классификация полярных потоков³ на многообразиях

размерности 2 и 3 при помощи диаграмм Хегора. Уманским в [8] получена топологическая классификация потоков Морса–Смейла на трехмерных многообразиях с конечным числом гетероклинических орбит. В этой работе для классификации использовался комбинаторный инвариант, описывающий взаимное расположение особых траекторий потока, аналогичный схеме динамической системы, введенной Леонтович и Майером для классификации потоков с конечным числом состояний равновесия на сфере S^2 . Пилогиным в [10] замечено, что в случае $M^n = S^n$, $n \geq 3$, класс $G(S^n)$ совпадает с классом всех градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек и получена полная топологическая классификация таких потоков при помощи диаграммы Смейла. Пришляк в [11] получил полную топологическую классификацию потоков Морса–Смейла на трехмерных многообразиях. Инвариант, введенный в работе [11], так же, как и инвариант Флейтаса, включает информацию о следах двумерных сепаратрис на характеристической секущей.⁴ Таким образом, теорема 1 фактически является обобщением упомянутых выше работ на случай потоков из класса $G(M^n)$.

2. Доказательство теоремы 1. Докажем вначале необходимость. Пусть φ и φ' – самоидексирующие энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса–Смейла f^t и f'^t из множества $G(M^n)$ и $h: M^n \rightarrow M^n$ – гомеоморфизм, преобразующий траектории потока f^t в траектории потока f'^t . Тогда из определения самоидексирующей функции и свойств гомеоморфизма h следует, что для любого состояния равновесия p потока f^t имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма h тождественное отображение и сконструируем гомеоморфизм H , удовлетворяющий определению 2.

Пусть $x \in M^n$ – произвольная точка, отличная от состояния равновесия потока f^t . Обозначим через l_x траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x , и через $\alpha(l_x)$ (соответственно $\omega(l_x)$) – состояние равновесия, являющееся α -предельным (соответственно ω -предельным) множеством траектории l_x . Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма h следует, что

$$\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x)), \quad \omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x)).$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})), \quad \varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})).$$

Пусть

$$c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x))), \quad \Sigma_c = \varphi^{-1}(c) \quad (\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c)).$$

Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ ($\Sigma'_c \cap l_{x'}$) состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^n \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение $\tilde{H}$, ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение $\tilde{H}$ является гомеоморфизмом между

³ Полярным потоком называется градиенто-подобный поток, множество состояний равновесия которого содержит в точности один источник, один сток и произвольное конечное число седел.

⁴ Термин “характеристическая секущая” Пришляком и Флейтасом не использовался, но секущая поверхность, которую они использовали для введения своих инвариантов, по существу являлась характеристической секущей в нашей терминологии.

множествами $M^n \setminus \Omega(f^t)$ и $M^n \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока f^t и множество регулярных уровней функции φ в траектории потока f'^t и множество регулярных уровней функции φ'^5 . Так как

$$\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})), \quad \varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$$

для любой точки x , отличной от состояния равновесия, то построенный гомеоморфизм $\tilde{H}$ однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма H , удовлетворяющего условиям $\varphi(x) = \varphi'(H(x))$,

$$H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega_1}^s \cap H(\Sigma), \quad H(W_{\Omega_{n-1}}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega_{n-1}}^u \cap H(\Sigma)$$

для любой характеристической секущей Σ .

Докажем достаточность условий теоремы.

Пусть самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' согласованно эквивалентны, т.е. существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H: M^n \rightarrow M^n$ и $\chi: [0, n] \rightarrow [0, n]$ такие, что $\varphi'H = \chi\varphi$ и

$$H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega_1}^s \cap H(\Sigma), \quad H(W_{\Omega_{n-1}}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega_{n-1}}^u \cap H(\Sigma)$$

для некоторой характеристической секущей Σ . Для любой точки $x \in \Sigma$ положим $x' = H(x)$ и обозначим через $l_x, l_{x'}$ траектории потоков f^t, f'^t , проходящие через точки x, x' . Для $c \in [0, n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$. Определим гомеоморфизм $H_V: V \rightarrow V'$ формулой

$$H_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$$

для любой точки $y = l_x \cap \Sigma_c, c \in (0, n)$.

Поскольку гомеоморфизм $H|_\Sigma$ переводит следы $(n-1)$ -мерных инвариантных многообразий седловых точек потока f^t на Σ в следы аналогичных объектов потока f'^t на $H(\Sigma)$ и замыкание любой сепаратрисы размерности $n-1$ седловой неподвижной точки σ потока f^t состоит из двух точек: точки σ и источника либо стока потока f^t (в зависимости от индекса точки σ), то гомеоморфизм H_V однозначно продолжается на множества $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_{n-1}, \Omega_n$. Сохраним обозначение H_V для полученного гомеоморфизма и продолжим его на одномерные сепаратрисы седловых неподвижных точек.

Для этого отметим, что для любого $c \in (0, 1)$ справедливо

$$H_V(\Sigma_c \setminus W_{\Omega_1}^u) = H(\Sigma_c) \setminus W_{\Omega_1}^u$$

и множества $W_{\Omega_1}^u \cap \Sigma_c, W_{\Omega_1}^u \cap H(\Sigma_c)$ являются конечными объединениями одинакового количества точек. Отсюда следует, что гомеоморфизм H_V продолжается по непрерывности гомеоморфизмом $H_1: W_{\Omega_1}^u \rightarrow W_{\Omega_1}^u$. Аналогично строится гомеоморфизм $H_{n-1}: W_{\Omega_{n-1}}^s \rightarrow W_{\Omega_{n-1}}^s$. Искомый гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ определим формулой

$$h(x) = \begin{cases} H_V(x), & \text{если } x \in M^n \setminus (W_{\Omega_1}^u \cup W_{\Omega_{n-1}}^s), \\ H_1(x), & \text{если } x \in W_{\Omega_1}^u, \\ H_{n-1}(x), & \text{если } x \in W_{\Omega_{n-1}}^s. \end{cases}$$

Теорема доказана.

⁵Регулярным уровнем функции Морса называется уровень, не содержащий критических точек.

3. Энергетическая функция как полный топологический инвариант потоков из класса $G_0(M^n)$. Этот пункт посвящен доказательству теоремы 2, которая является непосредственным следствием теоремы 1 и приведенной ниже леммы.

ЛЕММА 1. Пусть φ, φ' – самоиндексирующиеся энергетические функции потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ соответственно. Функции φ, φ' согласованно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ из эквивалентности соответствующих самоиндексирующихся функций φ, φ' следует согласованная эквивалентность этих функций. Для любого $c \in [0, n]$ положим

$$\Sigma_c = \varphi^{-1}(c), \quad M_c = \varphi^{-1}([0, c]).$$

Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W_{\Omega_1}^s = \Omega_1$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности Q множества $M_1 \setminus \Omega_1$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0$ такой, что $Q \subset W_{\omega_Q}^s$. Пусть $x \in Q$. Тогда траектория l_x потока f^t , проходящая через точку x , имеет ω -предельную точку ω_Q и α -предельную точку α (в силу предложения 2 множество Ω_n состоит из одного источника α). Кроме того, для любого $c \in (0, n)$ множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = H(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока f'^t , аналогичных введенным выше объектам потока f^t . Для любой характеристической секущей Σ гомеоморфизм H индуцирует гомеоморфизм

$$h: \Sigma \setminus W_{\Omega_1}^s \rightarrow H(\Sigma) \setminus W_{\Omega'_1}^s,$$

переводящий точку $y = l_x \cap \Sigma$ в точку $h(y) = l_{x'} \cap h(\Sigma)$.

Согласно теории Морса гиперповерхности уровня $\Sigma, \Sigma' = H(\Sigma)$ являются гладкими сферами размерности $n - 1$. Поскольку φ (φ') является энергетической функцией потока f^t (f'^t), то множество $C = \Sigma \cap W_{\Omega_1}^s$ ($C' = \Sigma' \cap W_{\Omega'_1}^s$) состоит из k сфер размерности $n - 2$, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W_{\Omega_1}^s$ ($W_{\Omega'_1}^s$). В силу теоремы о кольце⁶ существует гомеоморфизм $\tilde{h}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ со следующими свойствами:

а) $\tilde{h}(C) = C'$;

б) существует окрестность $V(C)$ множества C такая, что $\tilde{h}|_{\Sigma \setminus V(C)} = h|_{\Sigma \setminus V(C)}$.

Гомеоморфизм $\tilde{h}$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{H}_V: V \rightarrow V'$, переводящего точку $y \in l_x \cap \Sigma_c$ в точку $\tilde{H}_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$, $c \in (0, n)$. Аналогично доказательству необходимости теоремы 1, гомеоморфизм $\tilde{H}_V$ продолжается до искомого гомеоморфизма $\tilde{H}: M^n \rightarrow M^n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Мир, М., 1965.

⁶Теорема о кольце звучит следующим образом: если $h_i: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2\}$, $n \geq 2$, – топологические вложения и $K^n \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область, ограниченная сферами $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, $h_2(\mathbb{S}^{n-1})$, то замыкание области K^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$. Справедливость гипотезы кольца в случае $n = 2$ следует из теоремы Антуана (1921 г.), в случае $n = 3$ – из теоремы Сандерсона (1960 г.), для $n > 4$ доказана Р. Кирби в 1969 году, а для случая $n = 4$ – Ф. Квинном в 1984 г.

- [2] S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 199–206.
- [3] K. R. Meyer, “Energy Functions for Morse–Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
- [4] R. Thom, “La stabilité topologique des applications polynomiales”, *Enseign. Math.* (2), **1**:2 (1962), 24–33.
- [5] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140.
- [6] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, ИКИ, Ижевск, 2011.
- [7] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86.
- [8] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239.
- [9] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.
- [10] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254.
- [11] А. О. Пришляк, “Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 185–196.

В. З. Гринес

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило

22.01.2014

Е. Я. Гуревич

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

О. В. Починка

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru