Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Л. Мешка, Уточнение неравенства универсальности, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 905–910

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:14:34

Уточнение неравенства универсальности

А. Лауринчикас, Л. Мешка

Неравенство универсальности утверждает, что нижняя плотность множества сдвигов дзета-функции Римана, приближающих данную аналитическую функцию с точностью $\varepsilon > 0$, строго положительна. В статье получено, что это множество имеет строго положительную плотность для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самого большего счетного множества значений ε .

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10562

1. Введение. В 1975 г. Воронин открыл замечательное свойство универсальности дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Пусть $0 < r < 1/4$ и $f(s)$ – функция, аналитическая внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Он доказал [1], [2], см. также [3], что если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leq r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число $\tau = \tau(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| f(s) - \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right| < \varepsilon.$$

Этот результат заинтересовал многих теоретико-числовиков. Теорема Воронина была усилена и обобщена для других дзета- и L -функций. Историю проблемы и результаты можно найти в обзорных статьях [4]–[7], в диссертациях [8], [9] и в монографиях [10]–[12]. Современный вариант теоремы Воронина имеет следующий вид, см., например, [10]. Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, а $\text{meas } A$ обозначает меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА А. Пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Неравенство теоремы, назовем его *неравенством универсальности*, показывает, что множество сдвигов $\zeta(s + i\tau)$, приближающих данную аналитическую функцию, является достаточно богатым, оно имеет положительную нижнюю плотность.

После доклада на конференции “Diophantine Analysis” в Астрахани (30 июля – 03 августа, 2012 г.) проф. Б. Ваис (B. Veiss) спросил первого автора, можно ли нижний предел в неравенстве теоремы А заменить просто пределом. Ему был дан

ответ, что это можно сделать для “почти всех $\varepsilon > 0$ ”. Настоящая заметка посвящена доказательству этого утверждения. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не имеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε , существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Через $H(D)$ обозначим пространство аналитических в D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. В [13]–[15] были получены обобщения теоремы А для функций $F(\zeta(s))$, где $F: H(D) \rightarrow H(D)$ – некоторый оператор. Все результаты упомянутых работ можно переформулировать аналогично теореме 1. Мы приводим только один пример. Пусть $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}$ и

$$H_{a_1, \dots, a_r}(D) = \{g \in H(D) : g(s) \neq a_j, j = 1, \dots, r\} \cup \{F(0)\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F: H(D) \rightarrow H(D)$ – непрерывный оператор, и пусть $F(S) \supset H_{a_1, \dots, a_r}(D)$. При $r = 1$ пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная, не равная a_1 на множестве K и аналитическая внутри K функция. При $r \geq 2$ пусть $K \subset D$ – любое компактное множество, а $f(s) \in H_{a_1, \dots, a_r}(D)$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε , существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Например, если $r = 1$ и $a_1 = 0$, то имеем универсальность функции $\zeta^N(s)$, $N \in \mathbb{N}$. Если $r = 2$ и $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, то теорема 2 дает универсальность функций $\sin \zeta(s)$, $\cos \zeta(s)$, $\sinh \zeta(s)$ и $\cosh \zeta(s)$ [14].

2. Предельные теоремы. Для доказательства теорем 1 и 2 применим вероятностный метод, предложенный в диссертации Багчи [8] и продолженный в [10]. Через $\mathfrak{B}(S)$ будем обозначать класс борелевских множеств пространства S . Определим

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ для всех простых p . В силу теоремы Тихонова бесконечномерный тор Ω с топологией произведения и операцией поточечного перемножения является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H . Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Обозначая через $\omega(p)$ проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p , на этом вероятностном пространстве $H(D)$ -значный случайный элемент $\zeta(s, \omega)$ определим формулой

$$\zeta(s, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Отметим, что бесконечное произведение в этой формуле для почти всех $\omega \in \Omega$ относительно меры m_H сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D

и поэтому определяет $H(D)$ -значный случайный элемент. Пусть P_ζ – распределение этого случайного элемента, т.е. вероятностная мера, определенная формулой

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(H(D)).$$

ЛЕММА 1. При $T \rightarrow \infty$ вероятностная мера

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(H(D)),$$

слабо сходится к P_ζ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы дано в [10].

Аналогичное утверждение имеет место и для функции $F(\zeta(s))$.

ЛЕММА 2. Предположим, что оператор $F: H(D) \rightarrow H(D)$ непрерывен. Тогда

$$P_{T,F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : F(\zeta(s + i\tau)) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(H(D)),$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента $F(\zeta(s, \omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы содержится в [13].

Нам еще нужны носители предельных мер в леммах 1 и 2. Напоминаем, что носителем меры P на $(H(D), \mathfrak{B}(H(D)))$ называется минимальное замкнутое множество $S_P \subset H(D)$ такое, что $P(S_P) = 1$. Множество S_P состоит из всех таких элементов $g \in H(D)$, что для всякой открытой окрестности G элемента g справедливо неравенство $P(G) > 0$. Носитель распределения случайного элемента называется носителем этого элемента.

ЛЕММА 3. Носителем вероятностной меры P_ζ является множество S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы содержится в [10].

Пусть $P_{\zeta,F}$ – распределение случайного элемента $F(\zeta(s, \omega))$.

ЛЕММА 4. Пусть оператор $F: H(D) \rightarrow H(D)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда носитель меры $P_{\zeta,F}$ содержит замыкание множества $H_{a_1, \dots, a_r}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы дано в [14].

3. Доказательство теорем. При доказательстве теорем нам понадобится известная теорема Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами.

ЛЕММА 5. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – компактное подмножество, обладающая связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы дано в [16], также см. [17].

Мы будем пользоваться эквивалентом слабой сходимости вероятностных мер в терминах множеств непрерывности. Пусть P – вероятностная мера на $(S, \mathfrak{B}(S))$.

Через ∂A будем обозначать границу множества $A \in \mathfrak{B}(S)$. Множество ∂A замкнуто, поэтому принадлежит классу $\mathfrak{B}(S)$. Если $P(\partial A) = 0$, то A называется *множеством непрерывности* меры P . Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Пусть P_n , $n \in \mathbb{N}$, и P – вероятностные меры на $(S, \mathfrak{B}(S))$. Последовательность мер P_n при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к P тогда и только тогда, когда для всякого множества непрерывности A меры P

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A) = P(A).$$

Лемма является частью теоремы 2.1 из [18], там же дано ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу леммы 5 можем найти многочлен $p(s)$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{s \in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Определим множество

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда G_ε – открытая окрестность функции $e^{p(s)}$, которая в силу леммы 3 является элементом носителя меры P_ζ . Следовательно, справедливо неравенство

$$P_\zeta(G_\varepsilon) > 0. \quad (2)$$

Определим еще одно множество

$$A_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Имеем, что

$$\partial A_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Отсюда следует, что границы ∂A_ε при различных ε не пересекаются. Поэтому не более чем счетное множество множеств ∂A_ε имеют положительную P_ζ -меру. В самом деле, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем не более чем $n - 1$ множеств A_ε , для которых

$$P_\zeta(\partial A_\varepsilon) > \frac{1}{n}.$$

Отсюда вытекает, что множеств ∂A_ε с положительной P_ζ -мерой не более чем счетное множество. Следовательно, $P_\zeta(\partial A_\varepsilon) = 0$, т.е. A_ε является множеством непрерывности меры P_ζ , для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε . В силу лемм 1 и 6 отсюда получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(A_\varepsilon) = P_\zeta(A_\varepsilon) \quad (3)$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε . Кроме того, из определений множеств G_ε и A_ε , учитывая неравенство (1), убеждаемся, что $G_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому ввиду неравенства (2) выполняется нера-

венство $P_\zeta(A_\varepsilon) > 0$. Поскольку

$$P_T(A_\varepsilon) = \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\},$$

то последнее замечание вместе с равенством (3) дает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Случай $r = 1$. В силу леммы 5 существует многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Поскольку $f(s) \neq a_1$ на множестве K , то также $p(s) \neq a_1$ на K , если только ε достаточно мало. Следовательно, можем определить непрерывную ветвь логарифма $\log(p(s) - a_1)$, которая будет аналитической функцией внутри K . Еще раз применяя лемму 5, находим многочлен $p_1(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |p(s) - a_1 - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Пусть $h_{a_1}(s) = e^{p_1(s)} + a_1$. Тогда имеем, что $h_{a_1}(s) \in H(D)$ и $h_{a_1}(s) \neq a_1$. Следовательно, ввиду леммы 4 функция $h_{a_1}(s)$ является элементом носителя меры $P_{\zeta, F}$. Кроме того, из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Определим множество

$$\widehat{G}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |f(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тогда в силу свойств функции $h_{a_1}(s)$ имеем, что

$$P_{\zeta, F}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0. \quad (7)$$

Берем еще одно множество

$$\widehat{A}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, убеждаемся, что $\widehat{A}_\varepsilon$ является множеством непрерывности меры $P_{\zeta, F}$ для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε . Поэтому леммы 2 и 6 влекут за собой равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T, F}(\widehat{A}_\varepsilon) = P_{\zeta, F}(\widehat{A}_\varepsilon) \quad (8)$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением не более чем счетного множества значений ε . Из неравенства (6) и определений множеств $\widehat{G}_\varepsilon$ и $\widehat{A}_\varepsilon$ имеем, что $\widehat{G}_\varepsilon \subset \widehat{A}_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому, учитывая неравенство (7), из (8) получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T, F}(\widehat{A}_\varepsilon) \geq P_{\zeta, F}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0,$$

тем самым утверждение теоремы в случае $r = 1$ доказано.

Случай $r \geq 2$. Определим множество

$$\widetilde{A}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Поскольку $f(s) \in H_{a_1, \dots, a_r}(D)$, то в силу леммы 4 $f(s)$ является элементом носителя меры $P_{\zeta, F}$. Отсюда следует, что $P_{\zeta, F}(\widetilde{A}_\varepsilon) > 0$. Кроме того, как и в доказательстве

теоремы 1, получаем, что $\tilde{A}_\varepsilon$ является множеством непрерывности меры $P_{\zeta,F}$ для всех $\varepsilon > 0$, за исключением не более счетного множества значений ε . Для тех $\varepsilon > 0$, для которых $P_{\zeta,F}(\partial\tilde{A}_\varepsilon) = 0$, в силу леммы 2 имеем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T,F}(\hat{A}_\varepsilon) = P_{\zeta,F}(\tilde{A}_\varepsilon) > 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Воронин, “Теорема о распределении значений дзета-функции Римана”, *Докл. АН СССР*, **221**:4 (1975), 771.
- [2] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.
- [3] С. М. Воронин, *Избранные труды. Математика*, ред. А. А. Карацуба, Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
- [4] A. Laurinćikas, “The universality of zeta-functions”, *Acta Appl. Math.*, **78**:1-3 (2003), 254–271.
- [5] K. Matsumoto, “Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions”, *Sugaku*, **53**:3 (2001), 279–296.
- [6] K. Matsumoto, “Some problems on mean values and the universality of zeta and multiple zeta-functions”, *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, TEV, Vilnius, 2002, 195–199.
- [7] A. Laurinćikas, “Universality results for the Riemann zeta-function”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **3**:3-4 (2013), 98–117.
- [8] B. Bagchi, *The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta-Function and Other Allied Dirichlet Series*, Ph.D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.
- [9] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1979.
- [10] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [11] A. Laurinćikas, A. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [12] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lect. Notes in Math., **1877**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [13] A. Laurinćikas, “Universality of the Riemann zeta-function”, *J. Number Theory*, **130**:10 (2010), 2323–2331.
- [14] A. Laurinćikas, “Universality of composite functions”, *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, RIMS Kôkyôroku Bessatsu, **B34**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012, 191–204.
- [15] A. Laurinćikas, “On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions”, *J. Number Theory*, **132**:12 (2012), 2842–2853.
- [16] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, *УМН*, **7**:2 (1952), 31–122.
- [17] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.
- [18] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

А. Лауринчикас

Vilnius University, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Поступило

09.07.2013

Л. Мешка

Vilnius University, Литва