Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Каппелер, А. М. Савчук, П. Топалов, А. А. Шкаликов, Интерполяция нелинейных отображений, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 896–904

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:36:26

Интерполяция нелинейных отображений

Т. Каппелер, А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, П. Топалов

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) – две пары комплексных банаховых пространств. Предположим, что $X_1 \subseteq X_0$ и выполняется оценка $\|x\|_{X_0} \leq c\|x\|_{X_1}$ при некотором $c > 0$. Для произвольного $0 < \theta < 1$ обозначим через $X_\theta = [X_0, X_1]_\theta$ и $Y_\theta = [Y_0, Y_1]_\theta$ пространства, построенные методом комплексной интерполяции и через $B(r, X_\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, – открытые шары в X_θ с радиусом $r > 0$ и центром в нуле. Тогда для любого аналитического отображения $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0 + Y_1$ такого, что его ограничения $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ и $\Phi: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1$ непрерывны и ограничены константами M_0 и M_1 соответственно, ограничение Φ на $B(c^{-\theta}r, X_\theta)$, $0 < \theta < 1$, является аналитическим отображением со значениями в Y_θ и ограничено числом $M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10563

1. Введение. Вначале мы напомним некоторые обозначения и определения теории интерполяции банаховых пространств. Следуя [1], мы скажем, что два банаховых пространства X_0 и X_1 образуют *комплексную банахову пару* (или просто *банахову пару*), (X_0, X_1) , если они оба непрерывно и линейно вложены в комплексное линейное хаусдорфово пространство $\mathcal{X}$, т.е. $X_0 \subseteq \mathcal{X}$ и $X_1 \subseteq \mathcal{X}$. Пространства $X_\cap := X_0 \cap X_1$ и

$$X_+ := X_0 + X_1 = \{x \in \mathcal{X} \mid x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$$

также являются банаховыми пространствами с нормами

$$\|x\|_\cap := J(1, x), \quad \text{соответственно} \quad \|x\|_+ := K(1, x),$$

где для всех $t \geq 0$

$$J(t, x) := \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\} \quad \forall x \in X_\cap$$

и для всех $x \in X_+$

$$K(t, x) := \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} \mid x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}. \quad (1)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Swiss National Science Foundation.
Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-11-00754).
Работа четвертого автора выполнена при поддержке NSF (грант DMS-0901443).

Без потери общности мы будем предполагать в дальнейшем, что $\mathcal{X} = X_+$. Пару (X_0, X_1) называют *регулярной банаховой парой*, если X_1 непрерывно вложено в X_0 , т.е. $X_1 \subseteq X_0$ и существует такая константа $c > 0$, что

$$\|x\|_{X_0} \leq c\|x\|_{X_1} \quad \forall x \in X_1.$$

Для банаховой пары (X_0, X_1) можно несколькими способами определить интерполяционные пространства X , $X_\cap \subseteq X \subseteq X_+$ (при этом пространство X должно удовлетворять интерполяционному свойству, которое будет обсуждаться ниже). Наиболее известны методы вещественной и комплексной интерполяции. Вещественный метод включает в себя метод K -функционала, метод L -функционала, метод J -функционала, метод средних и метод следов (см. [2], [1]). Все эти методы определяют одни и те же (с точностью до эквивалентности норм) интерполяционные пространства $X_{\theta,p}$, где $0 < \theta < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. В частности, для любых $1 \leq p < \infty$ и $0 < \theta < 1$ метод K -функционала определяет пространство $X_{\theta,p} \equiv (X_0, X_1)_{\theta,p}$ следующим образом:

$$X_{\theta,p} := \left\{ x \in X_+ \mid \|x\|_{\theta,p} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, x))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad (2)$$

где $K(t, x)$ определен в (1). Если $p = \infty$, то пространство $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ состоит из векторов $x \in X_+$, для которых $\|x\|_{\theta,\infty} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, x) < \infty$.

Теперь мы обратимся к определению комплексного метода интерполяции. За определением аналитического отображения между банаховыми пространствами мы отсылаем читателя к [3] или [4; приложение А]. Следуя [1], обозначим через S вертикальную полосу в комплексной плоскости

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\},$$

а через $\bar{S}$ – ее замыкание. Для банаховой пары (X_0, X_1) мы определим комплексное векторное пространство $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ функций $f: \bar{S} \rightarrow X_+$ со следующими свойствами:

- (H0) $f: \bar{S} \rightarrow X_+$ непрерывно и ограничено;
- (H1) $f|_S: S \rightarrow X_+$ аналитично;
- (H2) для любого $t \in \mathbb{R}$ $f(it) \in X_0$, $f(1+it) \in X_1$ и отображения $\mathbb{R} \rightarrow X_0$, $t \mapsto f(it)$, и $\mathbb{R} \rightarrow X_1$, $t \mapsto f(1+it)$, ограничены и непрерывны.

Тогда

$$\|f\|_{\mathcal{H}} := \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{X_1} \right\}$$

определяет норму на $\mathcal{H}(X_0, X_1)$. Для любого $0 < \theta < 1$ пространство $X_\theta := [X_0, X_1]_\theta$, построенное методом комплексной интерполяции, определяется как

$$X_\theta := \{x \in X_+ \mid \exists f(z) \in \mathcal{H}(X_0, X_1) \text{ такое, что } f(\theta) = x\}$$

с нормой

$$\|x\|_{X_\theta} := \inf_{f \in \mathcal{H}} \{\|f\|_{\mathcal{H}} \mid f(\theta) = x\}. \quad (3)$$

Хорошо известно, что пространства X_θ (и $X_{\theta,p}$) обладают *интерполяционным свойством*: для любых двух банаховых пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) и любого линейного ограниченного оператора $T: X_+ \rightarrow Y_+$ такого, что

$$\|Tx\|_{Y_0} \leq M_0 \|x\|_{X_0} \quad \forall x \in X_0 \quad \text{и} \quad \|Tx\|_{Y_1} \leq M_1 \|x\|_{X_1} \quad \forall x \in X_1$$

для некоторых $M_0 > 0$, $M_1 > 0$, отображение T для любого $0 < \theta < 1$ переводит X_θ в Y_θ и

$$\|Tx\|_{Y_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|x\|_{X_\theta} \quad \forall x \in X_\theta.$$

Поиск классов нелинейных отображений, для которых интерполяционное свойство (или некоторый его аналог) справедливо, является важной задачей. Она исследовалась многими авторами – см., например, статьи [5]–[12], а также монографии [10], [1] и литературу в них. В этих работах изучались отображения, определенные на всем пространстве X_0 и X_1 . Это предположение оказывается, однако, слишком ограничительным для приложений. Первые результаты для нелинейных отображений, определенных не на всем пространстве, были получены Тартаром [13; теорема 1]. Используя метод вещественной интерполяции, основанный на использовании K -функционала (см. (2)), в предположении, что $X_0 = X_+$ и $Y_0 = Y_+$, Тартар доказал интерполяционное свойство для нелинейных отображений $\Phi: U \rightarrow Y_0$, определенных на непустом открытом множестве $U \subset X_0$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

- (T1) Φ является локально липшицевым отображением порядка $0 < \alpha \leq 1$;
 (T2) для любого $x \in U$ существует окрестность $x \in V \subset U$ и константа $c > 0$ такие, что

$$\forall y \in V \cap X_1 \quad \|\Phi(y)\|_{Y_1} \leq c(\|y\|_{X_1}^\beta + 1) \quad \text{для некоторого } \beta > 0.$$

Заметим, что множество $V \cap X_1$ может иметь бесконечный диаметр в X_1 , даже если V является (малым) шаром в X_0 . Таким образом, на практике свойство (T2) часто нарушается или сложно для проверки. Именно этот факт мотивировал наши исследования по нелинейной интерполяции [14], [15] и [16], где были рассмотрены приложения к обратным задачам спектральной теории. В рамках метода комплексной интерполяции мы в [14] и [15], получили результаты для нелинейных отображений, определенных на шарах с центром в нуле, и удовлетворяющих условиям, которые во многих приложениях легко проверить. В этой работе мы распространим результаты статей [14] и [16] на более общий случай. Отметим, что результаты такого типа были ранее получены в работах Боема [17] и Цвикеля [18]. Мы обсудим эти результаты ниже в замечании 1. Насколько нам известно, результат, типа полученного ниже в теореме 2, является новым.

2. Основные результаты. Чтобы сформулировать наши результаты, нам вначале необходимо ввести некоторые дополнительные обозначения и доказать некоторые вспомогательные утверждения. Пусть X – комплексное банахово пространство. Обозначим через $B(r, X)$ – открытый шар в X радиуса r с центром в нуле. Мы будем предполагать, что (X_0, X_1) – комплексная банахова пара, причем $X_1 \subseteq X_0$, а $X_\theta = [X_0, X_1]_\theta$, $0 < \theta < 1$, – банаховы пространства, полученные методом комплексной интерполяции. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $X_1 \subseteq X_0$, причем*

$$\|x\|_{X_0} \leq c\|x\|_{X_1} \quad \forall x \in X_1 \tag{4}$$

для некоторой константы $c > 0$. Тогда для любого $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|x\|_{X_0} \leq c^\theta \|x\|_{X_\theta} \quad \forall x \in X_\theta, \\ \text{(ii)} \quad & \|x\|_{X_\theta} \leq c^{1-\theta} \|x\|_{X_1} \quad \forall x \in X_1. \end{aligned} \tag{5}$$

В частности,

$$B(c^{-1}r, X_1) \subseteq B(c^{-\theta}r, X_\theta) \subseteq B(r, X_0). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (i) из (5) следует из интерполяционного свойства для линейных операторов. Действительно, в силу (4) тождественные операторы

$$I: X_1 \rightarrow X_0 \quad \text{и} \quad I: X_0 \rightarrow X_0$$

ограничены константами c и 1 . Тогда

$$I: X_\theta = [X_0, X_1]_\theta \rightarrow [X_0, X_0]_\theta = X_0,$$

причем его норма не превосходит c^θ . Для доказательства неравенства (ii) из (5) зафиксируем произвольный $x \in X_1$ и рассмотрим аналитическую функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow X_1$, $f(z) := c^{z-\theta}x$. Очевидно, что $f \in \mathcal{H}(X_0, X_1)$. Кроме того, из определения норм $\|\cdot\|_{X_\theta}$, $\|f\|_{\mathcal{H}}$ и из (4) следует

$$\|x\|_{X_\theta} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} = \max\{c^{-\theta}\|x\|_{X_0}, c^{1-\theta}\|x\|_{X_1}\} \leq c^{1-\theta}\|x\|_{X_1}.$$

Первый основной результат статьи такой.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $X_1 \subseteq X_0$ (где X_0 и X_1 – комплексные банаховы пространства) и*

$$\|x\|_{X_0} \leq c\|x\|_{X_1} \quad \forall x \in X_1 \quad (7)$$

для некоторой константы $c > 0$. Пусть (Y_0, Y_1) – произвольная банахова пара и для некоторого $r > 0$

$$\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_+ \quad (8)$$

является аналитическим отображением, причем

$$\Phi(B(r, X_0)) \subseteq Y_0 \quad \text{и} \quad \Phi(B(c^{-1}r, X_1)) \subseteq Y_1,$$

а оба отображения

$$\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0 \quad (9)$$

и

$$\Phi|_{B(c^{-1}r, X_1)}: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1 \quad (10)$$

непрерывны и ограничены константами M_0 и M_1 соответственно:

$$\sup_{x \in B(r, X_0)} \|\Phi(x)\|_{Y_0} \leq M_0 \quad \text{и} \quad \sup_{x \in B(c^{-1}r, X_1)} \|\Phi(x)\|_{Y_1} \leq M_1. \quad (11)$$

Тогда для любого $0 < \theta < 1$ $B(c^{-\theta}r, X_\theta) \subseteq B(r, X_0)$ и $\Phi(B(c^{-\theta}r, X_\theta)) \subseteq Y_\theta$. Более того, отображение

$$\Phi|_{B(c^{-\theta}r, X_\theta)}: B(c^{-\theta}r, X_\theta) \rightarrow Y_\theta \quad (12)$$

ограничено. А именно, для любого $x \in B(c^{-\theta}r, X_\theta)$

$$\|\Phi(x)\|_{Y_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 имеет отношение к [18; теорема 1.1], где для нелинейных отображений, определенных на шарах, найдены достаточные условия для выполнения интерполяционного свойства. Наше доказательство теоремы 1 автономно и никак не ссылается на теорему 1.1 из [18]. Одновременно в нем неявно проверяются некоторые условия, фигурирующие в [18]. Теорема 1 также связана с [17; теорема 1], где формулируется утверждение, схожее с нашим. Однако условие (P2), которое предполагается в теореме 1 из [17], является слишком сильным для наших целей: в обозначениях нашей работы это условие требует, чтобы Φ непрерывно отобрало множество $B(r, X_0) \cap X_1$ в пространство Y_1 . Как уже отмечалось при обсуждении результата Тартара [13], $B(r, X_0) \cap X_1$ может иметь бесконечный диаметр в X_1 . В отличие от этого условия мы в теореме 1 предполагаем только, что Φ непрерывно отображает $B(c^{-1}r, X_1)$ в Y_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу леммы 1 для любого $0 < \theta < 1$

$$B(c^{-\theta}r, X_\theta) \subseteq B(r, X_0).$$

Тогда отображение Φ определено на шаре $B(c^{-\theta}r, X_\theta)$. Остается доказать, что $\Phi(B(c^{-\theta}r, X_\theta)) \subseteq Y_\theta$ и проверить неравенство (13). Зафиксируем произвольный вектор $x \in B(c^{-\theta}r, X_\theta)$. По определению нормы $\|x\|_\theta$ существует функция $f \in \mathcal{H}(X_0, X_1)$, для которой

$$f(\theta) = x \quad \text{и} \quad \|f\|_{\mathcal{H}} < c^{-\theta}r.$$

В частности, по определению нормы $\|f\|_{\mathcal{H}}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|f(it)\|_{X_0} < c^{-\theta}r \quad \text{и} \quad \|f(1+it)\|_{X_1} < c^{-\theta}r. \quad (14)$$

Рассмотрим функцию $g: \bar{S} \rightarrow X_+$, $z \mapsto g(z) := c^{\theta-z}f(z)$. Очевидно, что $g \in \mathcal{H}(X_0, X_1)$ и $x = g(\theta)$. Так как пространства X_0 и X_+ совпадают, а нормы в них эквивалентны, $g: \bar{S} \rightarrow X_0$ непрерывно и ограничено и $f|_S: S \rightarrow X_0$ аналитично. Более того, в силу (7) и (14) для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\|g(1+it)\|_{X_0} = c^{\theta-1}\|f(1+it)\|_{X_0} \leq c^\theta\|f(1+it)\|_{X_1} < r \quad (15)$$

и

$$\|g(it)\|_{X_0} \leq c^\theta\|f(it)\|_{X_0} < r. \quad (16)$$

Применяя теорему Адамара о трех прямых (см., например, [2; лемма 1.1.2]), получаем

$$\|g(z)\|_{X_0} < r \quad \forall z \in \bar{S}. \quad (17)$$

Далее, из (14) следует, что

$$\|g(1+it)\|_{X_1} = c^{\theta-1}\|f(1+it)\|_{X_1} < c^{-1}r. \quad (18)$$

Неравенство (17) позволяет определить отображение $F: \bar{S} \rightarrow Y_+$,

$$F(z) := M_0^{z-1}M_1^{-z}\Phi(g(z)).$$

Так как $g: \bar{S} \rightarrow B(r, X_0) \subseteq X_0$ непрерывно и, по предположению, $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ непрерывно и ограничено, из непрерывности вложения $Y_0 \subseteq Y_+$ следует, что $F: \bar{S} \rightarrow$

Y_+ также непрерывно и ограничено. Аналогично, так как $g|_S: S \rightarrow B(r, X_0) \subseteq X_0$ и по предположению $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_+$ аналитично, отображение $F|_S: S \rightarrow Y_+$ также аналитично. Неравенства (16) и (18) вместе с оценками (11), а также непрерывность и ограниченность отображений $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ и $\Phi|_{B(c^{-1}r, X_1)}: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1$ влекут $F \in \mathcal{H}(Y_0, Y_1)$ и $\|F\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Наконец, так как $F(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \Phi(x)$, получаем, что

$$\|\Phi(x)\|_{Y_\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|F(\theta)\|_{Y_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|F(z)\|_{\mathcal{H}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Эта оценка завершает доказательство теоремы 1.

Если нелинейные отображения $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ и $\Phi|_{B(c^{-1}r, X_1)}: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1$ в теореме 1 допускают оценки вида $\|\Phi x\| \leq M\|x\|^n$ для некоторого $n \geq 1$, то следующий результат утверждает, что такие же оценки справедливы и для отображения $\Phi|_{B(c^{-\theta}r, X_\theta)}: B(c^{-\theta}r, X_\theta) \rightarrow Y_\theta$ с произвольным $0 < \theta < 1$. В действительности, следующее утверждение обобщает соответствующий результат работы [16].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все предположения теоремы 1 выполнены, за исключением условия (11), которое заменено на

$$\|\Phi(x)\|_{Y_0} \leq M_0 \|x\|_{X_0}^n \quad \forall x \in B(r, X_0), \quad (19)$$

$$\|\Phi(x)\|_{Y_1} \leq M_1 \|x\|_{X_1}^n \quad \forall x \in B(c^{-1}r, X_1), \quad (20)$$

где $n \geq 1$. Тогда для любого $0 \leq \theta \leq 1$ и произвольного $x \in B(c^{-\theta}r, X_\theta)$

$$\|\Phi(x)\|_{Y_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|x\|_{X_\theta}^n. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть $x \in B(c^{-\theta}r, X_\theta)$, а $\rho := \|x\|_{X_\theta}$. Найдем $\varepsilon > 0$ такое, что $r_1 := c^\theta(\rho + \varepsilon) < r$. Тогда из (19) следует

$$\|\Phi(y)\|_{Y_0} \leq M_0 r_1^n \quad \forall y \in B(r_1, X_0),$$

а из (20)

$$\|\Phi(y)\|_{Y_1} \leq M_1 (c^{-1}r_1)^n \quad \forall y \in B(c^{-1}r_1, X_1).$$

Тогда из теоремы 1 вытекает, что для любого $y \in B(c^{-\theta}r_1, X_\theta)$

$$\|\Phi(y)\|_{Y_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta (r_1)^{n(1-\theta)} (c^{-1}r_1)^{n\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^\theta (\rho + \varepsilon)^n.$$

В частности, это неравенство выполнено для $y = x$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым, следствие 1 доказано.

Наш второй основной результат утверждает, что отображение

$$\Phi|_{B(c^{-\theta}r, X_\theta)}: B(c^{-\theta}r, X_\theta) \rightarrow Y_\theta,$$

построенное в теореме 1, аналитично.

ТЕОРЕМА 2. Отображение $\Phi|_{B(c^{-\theta}r, X_\theta)}: B(c^{-\theta}r, X_\theta) \rightarrow Y_\theta$, построенное в теореме 1, аналитично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание аргументы, использованные в [16], мы докажем заявленное утверждение показав, что $\Phi|_{B(c^{-\theta}r, X_\theta)}$ представляется в виде ряда однородных аналитических отображений, причем ряд сходится абсолютно и равномерно на каждом шаре $B(c^{-\theta}\rho, X_\theta)$ с $0 < \rho < r$ – см. [4; теорема 2, приложение А]. Прежде всего, заметим, что Y_0 и Y_1 непрерывно вложены в Y_+ , а тогда в силу леммы 2 (см. дополнение) отображения $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ и $\Phi|_{B(c^{-1}r, X_1)}: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1$ из (9) и (10) аналитичны. Как любое аналитическое отображение, $\Phi: B(r, X_0) \rightarrow Y_0$ раскладывается в ряд Тейлора в точке 0 со значениями в Y_0 ,

$$\Phi(h) = \Phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(h), \quad h \in B(r, X_0). \quad (22)$$

Здесь

$$\Phi(0) \in Y_1 \quad \text{и} \quad \Phi_n(h) = \frac{1}{n!} d_0^n \Phi(h, \dots, h), \quad n \geq 1,$$

где $d_0^n \Phi$ – n -й дифференциал отображения Φ в точке 0 (см. утверждение (A4) Дополнения). Заметим, что для любого $n \geq 1$ $\Phi_n(h)$ является ограниченным и однородным степени n отображением, переводящим вектор $h \in X_0$ в Y_0 . Отсюда следует аналитичность отображения Φ_n . Заметим также, что ряд (22) сходится абсолютно и равномерно по $h \in B(\rho, X_0)$ с любым $0 < \rho < r$. Далее, в силу интегральной формулы Коши (см. дополнение) для любого $h \in X_0$, $h \neq 0$,

$$\Phi_n(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{\Phi(zh)}{z^{n+1}} dz, \quad (23)$$

где ρ произвольное число такое, что $0 < \rho < r/\|h\|_{X_0}$. Используя (23) и первое неравенство из (11), получаем, что для любого $h \in X_0$, $h \neq 0$,

$$\|\Phi_n(h)\|_{Y_0} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|\Phi(\rho e^{it}h)\|_{X_0}}{|\rho e^{it}|^{n+1}} |\rho i e^{it}| dt \leq \frac{M_0}{\rho^n}.$$

Поскольку это неравенство выполнено для любого $0 < \rho < r/\|h\|_{X_0}$, то для всех $h \in X_0$, $h \neq 0$,

$$\|\Phi_n(h)\|_{Y_0} \leq \frac{M_0}{r^n} \|h\|_{X_0}^n. \quad (24)$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено и для $h = 0$. Применяя те же рассуждения к отображению $\Phi|_{B(c^{-1}r, X_1)}: B(c^{-1}r, X_1) \rightarrow Y_1$, получим, что для любого $h \in B(c^{-1}r, X_1)$, $\Phi_n(h) \in Y_1$ и ряд (22) сходится в Y_1 . Из (23) следует, что для любого $h \in X_1$

$$\|\Phi_n(h)\|_{Y_1} \leq \frac{M_1}{(c^{-1}r)^n} \|h\|_{X_1}^n. \quad (25)$$

Применим следствие 1 к отображению $\Phi_n: X_0 \rightarrow Y_0 \subseteq Y_+$. Тогда из (24) и (25) следует, что для любого $h \in X_\theta$, $\Phi_n(h) \in Y_\theta$ и

$$\|\Phi_n(h)\|_{Y_\theta} \leq \left(\frac{M_0}{r^n}\right)^{1-\theta} \left(\frac{M_1}{(c^{-1}r)^n}\right)^\theta \|h\|_{X_\theta}^n \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \left(\frac{\|h\|_{X_\theta}}{c^{-\theta}r}\right)^n.$$

Это неравенство показывает, что для любого $h \in B(c^{-\theta}r, X_\theta)$ ряд (22) сходится абсолютно и равномерно по шару $B(c^{-\theta}\rho, X_\theta)$ с $0 < \rho < r$.

В заключение заметим, что теорема 1 вместе с теоремой 2 обобщают теорему 1.1 из [14] на общий случай, рассмотренный в этой работе.

3. Дополнение. Здесь мы обсудим свойства аналитических отображений между комплексными банаховыми пространствами, использованные в п. 2. Более подробное изложение этих фактов читатель может найти в [3] или [4; приложение А].

Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства, а $U \subseteq X$ – открытое множество в X . Отображение $F: U \rightarrow Y$ называется *аналитическим*, если оно дифференцируемо по Фреше в комплексном смысле в каждой точке $x \in U$. Отображение $F: U \rightarrow Y$ называется *слабо аналитическим*, если для любых $x \in U$, $h \in X$ и $f \in Y^*$ функция комплексного переменного $f(F(x + zh))$ является голоморфной в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}$.

Приведем критерии аналитичности (см., например, [4; теорема 1.1, Appendix A]). Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства, а $\Phi: U \rightarrow Y$ – отображение, определенное на открытом множестве $U \subseteq X$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (A1) $\Phi: U \rightarrow Y$ аналитично;
- (A2) $\Phi: U \rightarrow Y$ слабо аналитично и локально ограничено;
- (A3) $\Phi: U \rightarrow Y$ непрерывно и для любых $x \in U$, $h \in X$ найдется круг $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ такой, что для любого $0 < \rho < r$ справедлива формула Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall |z| < \rho; \quad (26)$$

- (A4) $\Phi: U \rightarrow Y$ бесконечно дифференцируемо на U и раскладывается в ряд Тейлора в каждой точке из U , т.е. для любого $x \in U$

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_x^n \Phi(h, \dots, h),$$

где $d_x^n \Phi$ – n -й дифференциал отображения Φ в точке x , а ряд сходится абсолютно и равномерно по $h \in B(\rho, X)$, где $0 < \rho < r$, и $B(r, X) \subset U$.

Докажем также следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть X , Y и Y_+ – банаховы пространства, причем имеется непрерывное вложение $Y \subset Y_+$. Пусть $U \subseteq X$ – открытое множество в X , $\Phi: U \rightarrow Y_+$ – аналитическое отображение, причем $\Phi(U) \subseteq Y$ и отображение $\Phi: U \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда $\Phi: U \rightarrow Y$ аналитично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x \in U$, $h \in X$ рассмотрим отображение $F: D_r \rightarrow Y_+$, $F(z) := \Phi(x + zh)$, где $D_r \subseteq \mathbb{C}$ – круг с центром в нуле, радиус которого выбран так, что $x + zh \in U$ для всех $z \in D_r$. Так как по предположению $F: D_r \rightarrow Y_+$ аналитично в Y_+ норме, то формула Коши (26) выполнена для любого $z \in D$ в смысле Y_+ -нормы. Далее, из второго предположения леммы следует, что $F: D_r \rightarrow Y$ непрерывно в Y -норме. Тогда интеграл в правой части (26) является непрерывным отображением $G: D_r \rightarrow Y$. В силу вложения $Y \subseteq Y_+$ имеем $G = F$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [2] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

- [3] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Pure Appl. Math., **10**, Academic Press, New York, 1960.
- [4] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Pure Appl. Math., **130**, Academic Press, New York, 1987.
- [5] J. Bergh, “A nonlinear complex interpolation result”, *Interpolation Spaces and Applied Topics in Analysis*, Lecture Notes in Math., **1070**, Springer, Berlin, 1984, 45–47.
- [6] A. Calderón, A. Zygmund, “A note on the interpolation of sublinear operations”, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 282–288.
- [7] E. Gagliardo, “Interpolation d’espaces de Banach et applications. III”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 3517–3518.
- [8] J. Lions, “Interpolation linéaire et non linéaire et régularité”, *Symposia Math.*, **7** (1971), 443–458.
- [9] L. Maligranda, “On interpolation of nonlinear operators”, *Comment. Math. Prace Mat.*, **28**:2 (1989), 253–275.
- [10] L. Maligranda, *A Bibliography on “Interpolation of Operators and Applications”* (1926–1990), Höskolan i Luleå, Luleå, 1990.
- [11] L. Maligranda, L. Persson, J. Wyller, “Interpolation and partial differential equations”, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 5035–5046.
- [12] J. Peetre, “Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces”, *Mathematica (Cluj)*, **12** (1970), 325–334.
- [13] L. Tartar, “Interpolation non linéaire et régularité”, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 469–489.
- [14] T. Kappeler, P. Topalov, “On nonlinear interpolation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, arXiv: 1306.5721 (to appear).
- [15] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 864–884.
- [16] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Об интерполяции аналитических отображений”, *Матем. заметки*, **94**:4 (2013), 578–581, arXiv: 1307.0623.
- [17] M. Böhm, “Global interpolation estimates for nonlinear operators based on a global and a local estimate in the corner spaces”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **318**:9 (1994), 821–826.
- [18] M. Cwikel, “Complex interpolation of nonlinear operators and Lebedev-Milin inequalities for Taylor coefficients of composed analytic functions”, *Math. Nachr.*, **132** (1987), 153–161.

Т. Каппелер

Institut für Mathematik, Universität Zürich,
Switzerland

E-mail: thomas.kappeler@math.uzh.ch

Поступило

23.09.2014

А. М. Савчук

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: savchuk@mail.ru

А. А. Шкаликов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashkaliko@yandex.ru

П. Топалов

Northeastern University, USA

E-mail: p.topalov@neu.edu