Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Половинкин, Об одном следствии теоремы Шаудера, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 953–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:52:45

Об одном следствии теоремы Шаудера

Е. С. Половинкин

1. Введение. В книге Ли и Маркуса [1] в § 4.1 приведено некоторое “топологическое отступление”, являющееся следствием теоремы Брауэра о неподвижной точке. Это следствие при некоторых условиях на непрерывное отображение утверждало о непустоте внутренности образа единичного шара из $\mathbb{R}^n$ при таком отображении. Следствие нашло широкое применение в исследованиях этих авторов (см., например, доказательство теоремы 3 в § 4.1 [1]). Также это следствие применялось автором статьи в работах [2], [3]. В данной заметке мы докажем обобщение указанного результата на случай банаховых пространств.

2. Вспомогательный результат. Пусть E – действительное банахово пространство и $B_r(x_0)$ – открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 в пространстве E . Как обычно, обозначим через $\bar{A}$, $\text{int } A$ и ∂A замыкание, внутренность и границу множества $A \subset E$ соответственно. Нам потребуется следствие теоремы Шаудера (см. [4; гл. 5, п. 10]).

ЛЕММА. Пусть задано замкнутое выпуклое множество A из банахова пространства E . Тогда у любого непрерывного отображения $f: A \rightarrow A$, у которого множество значений $f(A)$ относительно компактно, существует неподвижная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию множество $B \doteq \overline{f(A)}$ является компактным множеством. В свою очередь, замыкание выпуклой оболочки $C \doteq \overline{\text{co}} B$ множества B по теореме Мазура [4; гл. 5, п. 2] является выпуклым компактом в E . Так как $f(A) \subset A$, а A выпукло и замкнуто, то и $C \subset A$. В результате $f(C) \subset f(A) \subset C$. Итак, C – выпуклый компакт, $C \subset A$ и $f: C \rightarrow C$. По теореме Шаудера существует неподвижная точка $b \in C \subset A$, т.е. $f(b) = b$ и $b \in A$.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть в банаховом пространстве E задано ограниченное замкнутое выпуклое множество $A \subset E$ с непустой внутренностью. Пусть отображение $f: A \rightarrow E$ непрерывно, а множество значений $(f - I)(A)$ относительно компактно (здесь $I(x) = x$ для любого $x \in E$). Пусть для некоторой точки $y_0 \in \text{int } A$ справедливы неравенства

$$\|f(x) - x\| \leq \|x - y_0\| \quad \text{для всех } x \in \partial A. \quad (1)$$

Тогда существует точка $x_0 \in A$ такая, что $f(x_0) = y_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $y_0 = 0$. В самом деле, проведя сдвиг в пространстве E по формуле $\tilde{x} \doteq x - y_0$ и сделав замены $\tilde{A} \doteq A - y_0$, $\tilde{f}(\tilde{x}) \doteq f(x) - y_0$, приводим условия теоремы к случаю, когда $y_0 = 0$.

Итак, полагаем в дальнейшем, что $y_0 = 0 \in \text{int } A$, а условие (1) принимает вид

$$\|f(x) - x\| \leq \|x\| \quad \text{для всех } x \in \partial A. \quad (2)$$

Так как по условию множество A ограничено и $0 \in \text{int } A$, существуют числа r, d такие, что $0 < r < d$ и $B_r(0) \subset A \subset B_d(0)$. Для множества A определим функцию Минковского $\mu(x) \doteq \inf\{t > 0 \mid x/t \in A\}$. Как известно (см., например, [5], [6]), функция Минковского $\mu(x)$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00295).

DOI: 10.4213/mzm10564

выпукла, полунепрерывна снизу и положительно однородна. В силу отмеченных выше ограничений на множество A она также удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{d}\|x\| \leq \mu(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|,$$

откуда в частности следует, что функция $\mu(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $1/r$.

Определим отображение $g: E \rightarrow A$ по формуле $g(x) \doteq x/\mu(x)$ при $x \notin A$, и $g(x) = x$ при $x \in A$. В силу приведенных свойств функции Минковского, отображение g является непрерывным, $g(E) = A$ и $g(x) \in \partial A$ при $x \notin \text{int } A$.

Определим отображение $v: A \rightarrow A$ по формуле $v(x) \doteq g(x - f(x))$. Очевидно, что это непрерывное отображение и множество значений $v(A)$ относительно компактно. По лемме существует точка $x_0 \in A$ такая, что $v(x_0) = x_0$. Покажем, что $x_0 - f(x_0) \in A$. Допустим противное, т.е. $x_0 - f(x_0) \notin A$. Тогда из свойств функции g следует, что $g(x_0 - f(x_0)) \in \partial A$, т.е. $x_0 \in \partial A$. Кроме того, из свойств функции Минковского получаем неравенство $\mu(x_0 - f(x_0)) > 1$ и равенство $(x_0 - f(x_0))/\mu(x_0 - f(x_0)) = x_0$, т.е.

$$\frac{\|x_0 - f(x_0)\|}{\|x_0\|} = \mu(x_0 - f(x_0)) > 1.$$

Однако последнее неравенство противоречит условию (2). Таким образом, показали, что $x_0 - f(x_0) \in A$. В силу этого из определения отображения g и определения точки $x_0 \in A$ получаем равенство $g(x_0 - f(x_0)) = x_0 - f(x_0) = x_0$, т.е. $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в банаховом пространстве E отображение $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow E$ непрерывно, а множество значений $(f - I)(B_1(0))$ относительно компактно. Пусть существует число $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$\|f(x) - x\| \leq 1 - \varepsilon \quad \text{для всех } x \in \partial \overline{B_1(0)}.$$

Тогда справедливо включение $B_\varepsilon(0) \subset f(\overline{B_1(0)})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, Наука, М., 1972.
 [2] E. S. Polovinkin, "Necessary conditions for optimization problems with differential inclusion", *Set-valued Analysis and Differential Inclusions*, Prog. Syst. Control Theory, **16**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, 157–170. [3] E. S. Polovinkin, "The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschitzian differential inclusions", *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, Prog. Syst. Control Theory, **10**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, 349–360. [4] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962. [5] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973. [6] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2007.

Е. С. Половинкин

Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

Поступило

14.04.2014

Исправленный вариант

03.06.2014