Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Матиясевич, Еще одно представление для суммы величин, обратных к нетривиальным нулям дзета-функции Римана, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 471–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:06:33

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Еще одно представление для суммы величин, обратных к нетривиальным нулям дзета-функции Римана

Ю. В. Матиясевич

Знаменитая гипотеза Римана в ее первоначальной формулировке – это утверждение о расположении нулей дзета-функции Римана, которая при $\text{Re}(s) > 1$ может быть задана рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (1)$$

Будучи мероморфной, эта функция также однозначно определяется своим разложением в ряд Лорана

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{(s-1)^n}{n!}.$$

Таким образом, гипотеза Римана – это утверждение о *бесконечной* последовательности коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \dots$, известных как *константы Стильтьеса* ($\gamma_0 = \gamma = 0.577215\dots$ – это *постоянная Эйлера*).

Хорошо известно, что для доказательства гипотезы Римана было бы достаточно установить справедливость подходящей бесконечной системы полиномиальных неравенств

$$P_1(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_1}) > 0, \quad \dots, \quad P_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_n}) > 0, \quad \dots, \quad (2)$$

каждое из которых содержит лишь *конечное* количество констант Стильтьеса (и, быть может, еще некоторые классические константы) и, следовательно, допускает численную проверку.

Многочлены P_n , дающие такую переформулировку гипотезы Римана, можно выбрать многими способами. При одном из наиболее известных способов, описаном в [1] (см. также [2]),

$$P_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) = \sum_{\rho} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем нетривиальным нулям дзета-функции. Ранее автор рассмотрел в [3] другой выбор многочленов P_n , при котором

$$P_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{n^2-1}) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} G_n(\rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_n}), \quad (4)$$

где

$$G_n(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{z_j(1-z_j)} \prod_{k=j+1}^n \left(\frac{1}{z_j(1-z_j)} - \frac{1}{z_k(1-z_k)} \right)^2,$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

DOI: 10.4213/mzm10566

© Ю. В. Матиясевич, 2015

а $\rho_1, \rho_2, \dots$ – последовательность нулей дзета-функции с положительными мнимыми частями.

Ни для одного выбора многочленов P_n до сих пор не удалось доказать все требуемые неравенства (2). Трудность объясняется, по-видимому, способом, которым определяются константы Стилтеса. Их первоначальное определение, получаемое формальным дифференцированием (1), дает медленно сходящиеся ряды:

$$\gamma_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^m(n)}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\ln^m(t)}{t} dt \right). \quad (5)$$

Подстановка (5) в $P_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_n})$ приводит к кратной сумме, знак которой трудно определить. Однако помимо (5) для констант Стилтеса было найдено разными авторами много других представлений в виде сумм и интегралов (см., например, [4] и ссылки в этой работе). Автору представляется возможным, что при некотором выборе многочленов P_n и представлений $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ для $P_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_n})$ могут быть получены выражения в виде (кратной) суммы с положительными слагаемыми или (кратного) интеграла с положительной подынтегральной функцией.

Такие выражения автору удалось получить для $n = 0$ в (3) и (4). В обоих случаях

$$\begin{aligned} 2P_1(\gamma_0) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{1 - \rho_j} \right) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j(1 - \rho_j)} \\ &= \gamma - \ln(\pi) - 2 \ln(2) + 2 = 0.0461914 \dots \end{aligned} \quad (6)$$

В [3] получено представление

$$\gamma - \ln(4\pi) + 2 = \int_1^{\infty} \frac{1 - \{q\}^2}{4q^2(q+1)^2} dq,$$

где $\{q\}$ – дробная часть q и положительность подынтегральной функции очевидна. В [5] получено представление

$$\gamma - \ln(4\pi) + 2 = \frac{1}{32} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (4t^2 - 1)(2|s| - 1)^2 \psi'''' \left(n + s + t + \frac{1}{2} \right) ds dt, \quad (7)$$

где $\psi(q) = \Gamma'(q)/\Gamma(q)$ – логарифмическая производная гамма-функции. Подынтегральная функция в (7) положительна, поскольку $\psi''''(q) < 0$ при $q > 1/2$.

Цель настоящей заметки – указать еще одно представление для (6), делающее очевидным положительность этой величины, а именно, равенство (14).

На первый взгляд в (6) встречаются три числа разной природы – γ , $\ln(\pi)$ и $\ln(2)$, и неясно, по какой “причине” значение $P_1(\gamma_0)$ должно быть положительным. Для получения желаемого представления с положительными слагаемыми или положительной подынтегральной функцией требуется найти похожие друг на друга представления для этих констант. Новое представление использует указанную в [6] двойственность между γ и $\ln(\pi)$:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right), \quad \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right) \quad (8)$$

(левое равенство в (8) – это случай $m = 0$ в (5)).

В [7] оба равенства из (8) были преобразованы соответственно в

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{N_1(\lfloor n/2 \rfloor) + N_0(\lfloor n/2 \rfloor)}{n}, \quad \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{N_1(\lfloor n/2 \rfloor) - N_0(\lfloor n/2 \rfloor)}{n}, \quad (9)$$

где $N_0(m)$ и $N_1(m)$ – количество нулей и единиц в двоичной записи числа m . Поскольку

$$N_1\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + N_0\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \lfloor \log_2(n) \rfloor,$$

то левая формула в (9) – это просто иная форма записи представления γ , известного как *ряд Вакка* (*Vacca series* [8], см. также [9]). Попарная группировка слагаемых привела затем к двойственным равенствам

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1(n) + N_0(n)}{2n(2n+1)}, \quad \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1(n) - N_0(n)}{2n(2n+1)}. \quad (10)$$

На основе левого равенства из (10) с помощью техники ускорения сходимости в [7] была получена серия представлений для γ , частным случаем которой является равенство

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1(n) + N_0(n)}{2n(2n+1)(2n+2)}, \quad (11)$$

которое ранее было установлено в [10] другим способом. Аналогичным образом из правого равенства в (10) можно получить двойственное к (11) представление

$$\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1(n) - N_0(n)}{2n(2n+1)(2n+2)}, \quad (12)$$

которое по существу эквивалентно случаю $B = 2$ следствия 19 из [11].

Складывая (11) и (12), мы получаем равенство

$$\gamma - \ln(\pi) + \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N_1(n)}{2n(2n+1)(2n+2)}, \quad (13)$$

в правой части которого все слагаемые положительны.

Значение (13) отличается от искомой величины (6) на $3\ln(2) - 2$, так что нам надо найти подходящее выражение для $\ln(2)$. Простое вычисление дает равенство

$$\frac{3}{4} - \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)},$$

и, соответственно,

$$\gamma - \ln(\pi) - 2\ln(2) + \frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N_1(n) + 3}{2n(2n+1)(2n+2)}.$$

Отбрасывание двух первых слагаемых в правой части дает искомое представление

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{1 - \rho_j} \right) = \gamma - \ln(4\pi) + 2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2N_1(n) + 3}{2n(2n+1)(2n+2)}. \quad (14)$$

Интригующим остается вопрос, можно ли получить аналогичные представления для $P_2(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_2})$, $P_3(\gamma_0, \dots, \gamma_{m_3})$, ... в виде (кратных) сумм с положительными слагаемыми при выборе P_n согласно (3), (4) или любом ином выборе, влекущим справедливость гипотезы Римана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X.-J. Li, *J. Number Theory*, **65**:2 (1997), 325–333. [2] E. Bombieri, J. C. Lagarias, *J. Number Theory*, **77**:2 (1999), 274–287. [3] Ю. В. Матиясевич, *Международная конференция по аналитическим методам в теории чисел и анализе* (Москва, 14–19 сентября 1981 г.), Тр. МИАН СССР, **163**, 1984, 181–182. [4] M. W. Coffey, *J. Number Theory*, **130**:9 (2010), 2049–2064, arXiv:0912.2391. [5] Ю. В. Матиясевич, *Матем. заметки*, **45**:2 (1989), 65–70. [6] J. Sondow, *Amer. Math. Monthly*, **112**:1 (2005), 61–65. [7] J. Sondow, *Additive Number Theory*, Springer, New York, 2010, 331–340, arXiv:math/0508042. [8] G. Vacca, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **41** (1910), 363–366. [9] G. H. Hardy, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **43** (1912), 215–216. [10] A. W. Addison, *Amer. Math. Monthly*, **74**:7 (1967), 823–824. [11] K. H. Pilehrood, T. H. Pilehrood, *J. Integer Seq.*, **13**:7 (2010), Article 10.7.3, <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL13/Pilehrood/pilehrood2.pdf>.

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение

Математического института

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Поступило

05.09.2014