Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, М. Руло, Принцип Мопертюи–Якоби для гамильтонианов вида $f(x, |p|)$ в некоторых двумерных стационарных квазиклассических задачах, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 48–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:56:00

Принцип Мопертюи–Якоби для гамильтонианов вида $f(x, |p|)$ в некоторых двумерных стационарных квазиклассических задачах

С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, М. Руло

В статье рассматриваются двумерные асимптотические формулы, основанные на каноническом операторе Маслова, возникающие в некоторых стационарных задачах для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Мы показываем как в случае лагранжевых многообразий, инвариантных относительно гамильтонова потока с гамильтонианами вида $F(x, |p|)$, асимптотические формулы можно упростить, заменив с помощью хорошо известного в классической механике принципа соответствия Мопертюи–Якоби гамильтонианы $F(x, |p|)$ на гамильтониан вида $C(x)|p|$, возникающий, в частности, в геометрической оптике и связанный с финслеровой метрикой. В качестве примеров рассматриваются гамильтонианы, соответствующие уравнению Шрёдингера, двумерному уравнению Дирака и псевдодифференциальным уравнениям для поверхностных волн на воде.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10569

1. Введение. Принцип Мопертюи–Якоби [1]–[3] позволяет перейти от одной системы Гамильтона к другой, что может быть полезно, например, при построении и анализе их траекторий. В работах [4], [5] было показано, что этот принцип помогает при построении некоторых компактных лагранжевых многообразий и соответствующих им асимптотических собственных значений и собственных функций (квазимод) для самосопряженных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. В этой заметке мы хотим показать, как можно использовать этот принцип также для построения некомпактных лагранжевых многообразий, возникающих в задаче рассеяния и задаче об асимптотике функции Грина. Рассматривается случай, когда исходный классический гамильтониан зависит от модуля импульса, т.е. имеет вид $F(x, |p|)$, а второй имеет вид $C(x)|p|$, возникающий, в частности, в геометрической оптике и связанный с финслеровой метрикой (см. [6], [7]). Наше основное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00521) и гранта Президента РФ МК-1017.2013.1.

наблюдение состоит в том, что по нескольким причинам в практической реализации использование гамильтониана $C(x)|p|$ более удобно, чем использование исходного гамильтониана $F(x, |p|)$. В статье используются недавно полученные в [8] новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек. Мы ограничиваем рассмотрение двумерным случаем и рассматриваем примеры, связанные с уравнением Шрёдингера, уравнением Дирака и с псевдодифференциальным уравнением для поверхностных волн на воде.

2. Инвариантные лагранжевы многообразия, эйконал-координаты и принцип соответствия Мопертюи–Якоби. Рассмотрим гладкую функцию $F(x, z)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $z \in [0, \infty)$ и параметр E . Пусть для некоторого значения параметра E уравнение $F(x, z) = E$ имеет единственное решение $z = 1/C(x, E)$, где $C(x, E)$ – ограниченная функция, отграниченная от нуля $C(x, E) \geq c_0(E) > 0$. Пусть также

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z} \left(x, \frac{1}{C(x, E)} \right) \right| \geq c_1(E) > 0$$

для некоторых положительных констант $c_0(E)$, $c_1(E)$. Рассмотрим гамильтонианы

$$\mathcal{H}(x, p, E) = F(x, |p|) - E, \quad H(x, p, E) = C(x, E)|p| - 1, \quad p \in \mathbb{R}^2,$$

и соответствующие системы Гамильтона

$$(a) \quad \frac{dp}{dt} = -\mathcal{H}_x, \quad \frac{dx}{dt} = \mathcal{H}_p, \quad (b) \quad \frac{dp}{d\tau} = -H_x, \quad \frac{dx}{d\tau} = H_p. \quad (1)$$

Пусть $\Lambda^1 = \{p = P^0(\phi, E), x = X^0(\phi, E)\}$ – открытая ($\phi \in Q = \mathbb{R}$) или замкнутая кривая ($\phi \in Q = \mathbb{S} = [0, 2\pi]$) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$, лежащая на поверхности нулевого уровня гамильтонианов

$$\mathcal{H}(X^0(\phi, E), P^0(\phi, E), E) = 0, \quad \text{где} \quad |P^0(\phi, E)|C(X^0(\phi, E)) = 1.$$

Рассмотрим решения $(\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E))$ и $(P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E))$ систем (1) (a) и (b) соответственно с начальными данными на кривой Λ^1 . Согласно общим свойствам гамильтоновых систем

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}(t, \phi, E), \mathcal{P}(t, \phi, E), E) = 0 \quad \text{и} \quad |P(\tau, \phi, E)|C(X(\tau, \phi, E)) = 1.$$

Следуя принципу Мопертюи–Якоби траектории $(\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E))$ и $(P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E))$ можно выразить друг через друга. Именно,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dt} &= -\mathcal{H}_x(\mathcal{P}, \mathcal{X}) = -R(\mathcal{X})H_x(\mathcal{P}, \mathcal{X}) = R(\mathcal{X})\frac{dP}{d\tau}, \\ \frac{d\mathcal{X}}{dt} &= \mathcal{H}_p(\mathcal{P}, \mathcal{X}) = R(\mathcal{X})H_p(\mathcal{P}, \mathcal{X}) = R(\mathcal{X})\frac{dX}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R(x) = \lim_{z \rightarrow 1/C(x, E)} \frac{F(x, z) - E}{zC(x, E) - 1} = z \frac{\partial F}{\partial z}(x, z)_{z=1/C(x, E)} = \frac{1}{C(x, E)} \frac{\partial F}{\partial z} \left(x, \frac{1}{C(x, E)} \right).$$

Заменяя время t на время $\tau = \tau(t, \phi, E)$ согласно уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = R(\mathcal{X}(t, \phi, E)), \quad \tau|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

получим соответствие решений

$$(\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E)) = (P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E))|_{\tau=\tau(t, \phi, E)}.$$

Обращая равенство $\tau = \tau(t, \phi, E)$, получим функцию $t = t(\tau, \phi, E)$ и

$$(P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E)) = (\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E))|_{t=t(\tau, \phi, E)}.$$

В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^4$ семейства решений $(P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E))$ и $(\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E))$ определяют множество

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \{(p, x) = (\mathcal{P}(t, \phi, E), \mathcal{X}(t, \phi, E)), \phi \in Q, t \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \{(p, x) = (P(\tau, \phi, E), X(\tau, \phi, E)), \phi \in Q, \tau \in (-\infty, \infty)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что Λ^2 является гладким многообразием. Тогда оно лагранжево (см. [9]), а (t, ϕ) и (τ, ϕ) – всего лишь разные системы координат на Λ^2 . Обозначим фазовые потоки, соответствующие гамильтоновым системам (1) (а) и (б), соответственно через $g_{\mathcal{H}}^t$ и g_H^t . Тогда

$$\Lambda^2 = \bigcup_{-\infty < t < \infty} g_{\mathcal{H}}^t \Lambda^1 = \bigcup_{-\infty < \tau < \infty} g_H^{\tau} \Lambda^1.$$

По построению, лагранжево многообразие Λ^2 является инвариантным относительно этих потоков. Параметры t и τ называются *собственными временами на Λ^2* .

Сформулируем утверждение, показывающее пользу от перехода к объектам, связанным с гамильтонианом $H(p, x)$.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие равенства.*

1) *Якобианы перехода от (t, ϕ) к (τ, ϕ) и обратно равны*

$$\det \frac{\partial(\tau(t, \phi, E), \phi)}{\partial(t, \phi)} = \frac{d\tau}{dt} = R(\mathcal{X}(t, \phi, E)), \quad (5)$$

$$\det \frac{\partial(t(\tau, \phi, E), \phi)}{\partial(\tau, \phi)} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{R(X(\tau, \phi, E))}. \quad (6)$$

Таким образом, якобианы в координатах (t, ϕ) и (τ, ϕ) связаны соотношениями вида

$$\mathcal{J} \equiv \det \frac{\partial(\mathcal{X})}{\partial(t, \phi)} = JR(\mathcal{X}(t, \phi, E)) \equiv R(\mathcal{X}(t, \phi, E)) \det \frac{\partial(X)}{\partial(\tau, \phi)} \Big|_{\tau=\tau(t)}.$$

2) *Действие (эйконал) на многообразии Λ^2 равно*

$$s(t, \phi) \equiv \int_{(0,0)}^{(t,\phi)} \mathcal{P}(t, \phi, E) d\mathcal{X}(t, \phi, E) = s_0(\phi) + \tau, \quad s_0(\phi) = \int_0^\phi P^0(\phi, E) dX^0(\phi, E). \quad (7)$$

3) Пара $(\tau' = s_0(\phi) + \tau, \phi)$ задает так называемые эйконал-координаты на Λ^2 (см. [8]).

4) Для якобиана $J = \det(\partial(X)/\partial(\tau, \phi))$ справедливо следующее равенство:

$$|J| = C(X(\tau, \phi))|X_\phi|, \quad (8)$$

что дает для якобиана $\mathcal{J} = \det(\partial(\mathcal{X})/\partial(t, \phi))$:

$$|\mathcal{J}| = R(\mathcal{X}(t, \phi))C(\mathcal{X}(t, \phi))|X_\phi|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два равенства получаются из $\partial\phi/\partial\tau = \partial\phi/\partial t = 0$. Формула (7) следует из

$$\begin{aligned} s(t, \phi) &= \int_{(0,0)}^{(t,\phi)} \mathcal{P}(t, \phi, E) d\mathcal{X}(t, \phi, E) = \int_{(0,0)}^{(\tau,\phi)} P(\tau, \phi, E) dX(\tau, \phi, E) \\ &= \int_0^\phi P^0(\phi, E) dX^0(\phi, E) + \int_0^\tau P(\tau, \phi, E) \frac{dX}{d\tau}(\tau, \phi, E) d\tau \\ &= \int_0^\phi P^0(\phi, E) dX^0(\phi, E) + \int_0^\tau |P(\tau, \phi, E)|C(X(\tau, \phi, E), E) d\tau = s_0(\phi) + \tau. \end{aligned}$$

Утверждение 3) следует из 1) и 2). Формула (8) доказана в [8], [10].

Мы рассмотрим два примера Λ^1 , важных в приложениях: прямая

$$\Lambda_s^1 = \{p_1 = 0, p_2 = k, x_1 = \phi, x_2 = a, \phi \in \mathbb{R}\},$$

возникающая в задачах рассеяния, и окружность

$$\Lambda_G^1 = \{p_1 = b \cos \phi, p_2 = b \sin \phi, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \phi \in \mathbb{S}\},$$

связанная с задачей о построении асимптотик функции Грина. Легко проверить, что для этих кривых $s_0(\phi) = 0$, и действие на Λ^2 равно $\tau' = \tau$. Иллюстрацию лагранжева многообразия с каустикой см. на рис. 1.

3. Применение для канонического оператора Маслова. Возьмем построенное выше лагранжево многообразие Λ^2 с мерой $d\mu = dt \wedge d\phi$ и гладкой функцией $A(t, \phi)$ на нем. Рассмотрим функцию, построенную в форме канонического оператора Маслова,

$$\psi = K_{\Lambda^2}^h A(t, \phi). \quad (9)$$

Мы хотим перейти в $K_{\Lambda^2}^h A(t, \phi)$ от некоторых начальных координат (t, ϕ) к эйконал-координатам (τ, ϕ) , сохраняя меру $d\mu$.

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \psi &= K_{\Lambda^2}^h \left[A(t(\tau, \phi), \phi) / \sqrt{\det \frac{\partial(\tau, \phi)}{\partial(t, \phi)}} \right] \\ &= K_{\Lambda^2}^h \left[\frac{A(t(\tau, \phi), \phi)}{\sqrt{R(X(\tau, \phi))}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{R(x)}} K_{\Lambda^2}^h [A(t(\tau, \phi), \phi)] (1 + O(h)). \end{aligned} \quad (10)$$

Рис. 1. Лагранжево многообразие, характеристики (тонкие линии) и цикл особенностей (пунктирная линия): в фазовом пространстве (в координатах $(x_1, x_2, p_1) \in \mathbb{R}_{x,p}^4$) и в проекции на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^2$. Лагранжево многообразие $\Lambda^2 = \bigcup g_H^t \Lambda^1$ соответствует задаче рассеяния с начальной кривой $\Lambda^1 = \{p = (0, 2), x = (\phi, 0), \phi \in \mathbb{R}\}$, гамильтониан равен $H(x, p) = |p|/(E - U(x)) - 1$, где $E = 2$, $U(x) = \mathbf{e}(x)e^{-(x_1-5)^2-(x_2-3)^2}$ и $\mathbf{e}(x)$ – срезающая функция $\mathbf{e}(x) = 0, x_2 \leq 0, \mathbf{e}(x) = 1, x_2 \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство немедленно следует из равенства (5) и формулы коммутации псевдодифференциального оператора $\hat{Q} = Q(x, -ih\partial/\partial x)$ с каноническим оператором [9], [11]:

$$\hat{Q}K_{\Lambda^2}^h[A(t, \phi)] = K_{\Lambda^2}^h[Q(x, p)|_{\Lambda^2}A(t, \phi)](1 + O(h)).$$

Напомним, что канонический оператор имеет различные представления в окрестности регулярных (неособых) точек (где $J = \det(\partial X/\partial(\tau, \phi)) \neq 0$) и в окрестности сингулярных (фокальных) точек (где $J = \det(\partial X/\partial(\tau, \phi)) = 0$). Согласно равенству (8) точка $(P(\tau, \phi), X(\tau, \phi)) \in \Lambda^2$ является фокальной, если $X_\phi(\tau, \phi) = 0$. Как доказано в [8], при условии существования эйконал-координат в окрестности фокальных точек определитель $\det(P, P_\phi) \neq 0$ не обращается в ноль (здесь 2×2 матрица (P, P_ϕ) составлена из вектор-столбцов P и P_ϕ). Отсюда следует, что лагранжево многообразие можно покрыть неособыми картами Ω_j^{reg} , в которых $X_\phi(\tau, \phi) \neq 0$, и особыми картами Ω_j^{sing} , в которых $\det(P, P_\phi) \neq 0$. Пусть функции $\{\mathbf{e}_j(\tau, \phi)\}$ образуют разбиение единицы, связанное с картами Ω_j^{reg} и Ω_j^{sing} . Согласно лемме 1 вклад регулярных карт в канонический оператор вычисляется по формуле

$$\psi_j = \frac{e^{-(i\pi/2)\mathbf{m}_j}}{\sqrt{R(x)C(x)|X_\phi|}} e^{i\tau/h} A(\tau, \phi) \mathbf{e}_j(\tau, \phi)|_{(\tau, \phi)=(\tau_j(x), \phi_j(x))}, \quad (11)$$

где $(\tau_j(x), \phi_j(x))$ – решение (векторного) уравнения $X(\tau, \phi) = x$ в карте Ω_j^{reg} и $\mathbf{m}_j$ – индекс Маслова неособой карты Ω_j^{reg} (см. ниже). Вклад особых карт дается слагае-

мыми вида [8]

$$\psi_j = \frac{e^{-(i\pi/2)\mathbf{m}_j^s} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h R(x)}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau/h} \sqrt{|\det(P, P_\phi)|} A(\tau, \phi) \mathbf{e}_j(\tau, \phi)|_{\tau=\tau_j(x, \phi)} d\phi, \quad (12)$$

где $\tau_j(x, \phi)$ – решение скалярного уравнения $\langle P(\tau, \phi), x - X(\tau, \phi) \rangle = 0$ в особой карте Ω_j^{sing} и $\mathbf{m}_j^s$ – индекс Маслова особой карты Ω_j^{sing} .

Согласно [8] индекс Маслова $\mathbf{m}_j$ совпадает с индексом Морса траектории, начинающейся в точке (P, X) с координатами $(\tau = +0, \phi)$ и приходящей в точку $(P(\tau, \phi), X(\tau, \phi))$ в неособой карте Ω_j^{reg} : индекс равен количеству нулей якобиана $J = \det(\partial X / \partial(\tau, \phi))(\tau', \phi)$ (или функции $X_\phi(\tau', \phi)$) на промежутке $\tau' \in (+0, \tau)$. Для нахождения индекса Маслова $\mathbf{m}_j^s$ особой карты Ω_j^{sing} необходимо рассмотреть произвольную регулярную точку $(P(\tau, \phi), X(\tau, \phi)) \in \Omega_j^{\text{sing}}$ и сравнить знаки якобианов $J = \det(\partial X / \partial(\tau', \phi))$ и $\det(P, P_\phi)$ в этой точке. Если знаки совпадают, то $\mathbf{m}_j^s$ равен индексу Морса этой точки $(P(\tau, \phi), X(\tau, \phi))$, в противном случае индекс Маслова фокальной карты на единицу больше индекса Морса.

Окончательно, чтобы получить канонический оператор, надо просуммировать все функции ψ_j (см. [9], [11]). Заметим, что интеграл (12) можно посчитать в терминах функций Эйри или Пирси (явные формулы приведены в [8]) в предположении, что соответствующее подмножество цикла особенностей на лагранжевом многообразии $\{(P(\tau, \phi), X(\tau, \phi))|_{X_\phi=0}\}$ находится в общем положении ([1], [9]).

Проиллюстрируем на примере. У многообразия, представленного на рис. 1, есть две каустики (изображенные пунктирными линиями). Над областью конфигурационного пространства, расположенной “внутри каустики”, лагранжево многообразие свернуто в 3 листа и там надо суммировать три функции вида (11). Над областью “вне каустик” находится единственный лист многообразия, уравнение $X(\tau, \phi) = x$ разрешимо однозначно и канонический оператор состоит из одной функции вида (11). В окрестности дуг каустик канонический оператор состоит из суммы регулярной (11) и нерегулярной (12) частей, а в окрестности “вершин” каустик – только из нерегулярной части (12).

4. Примеры. Представим несколько примеров приложения принципа соответствия Мопертюи–Якоби к построению канонического оператора Маслова. Мы не будем рассматривать дальнейшие приложения к построению квазиклассических асимптотик для уравнений математической физики, которые можно найти в других работах.

ПРИМЕР 1 (возникающий в уравнении Шрёдингера, см. [12], [13]). Рассмотрим гладкий ограниченный потенциал $U(x)$, $U(x) < E$ и гамильтониан

$$\mathcal{H}(x, p) = F(x, |p|) - E = \frac{p^2}{2} + U(x) - E.$$

Необходимые функции равны

$$C(x, E) = \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}, \quad R(x) = z^2|_{z=1/C(x)} = 2(E - U(x)), \quad (13)$$

и канонический оператор имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} K_{\Lambda^2}^h[A(t(\tau, \phi), \phi)]. \quad (14)$$

ПРИМЕР 2 (возникающий в двумерном уравнении Дирака для графена, [14]). Рассмотрим гладкие ограниченные функции $U(x)$, $m(x)$ и эффективные гамильтонианы

$$\mathcal{H}^\pm(x, p) = F(x, |p|) - E = U(x) - E \pm \sqrt{p^2 + m(x)^2}.$$

Здесь

$$C(x, E) = \frac{1}{\sqrt{(E - U)^2 - m^2}}, \quad R = \pm \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + m(x)^2}} \Big|_{z=1/C} = \frac{(E - U(x))^2 - m^2(x)}{E - U(x)}, \quad (15)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{E - U(x)}}{\sqrt{(E - U(x))^2 - m(x)^2}} K_{\Lambda^2}^h[A(t(\tau, \phi), \phi)]. \quad (16)$$

ПРИМЕР 3 (возникающий в теории линейных поверхностных волн на воде, см. [15], [16]). Рассмотрим гладкую положительную функцию $D(x) > 0$ и эффективный гамильтониан

$$\mathcal{H}(x, p, E) = F(x, |p|) - E = \sqrt{|p| \tanh(|p|D(x))} - E.$$

Как легко видеть, существует единственное гладкое положительное решение $y(\mathcal{E})$ уравнения $\sqrt{y \tanh(y)} = \mathcal{E} = \sqrt{D(x)} E$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} C(x, E) &= \frac{D(x)}{y(E\sqrt{D(x)})}, \\ R &= z \frac{Dz / \cosh^2(zD) + \tanh(zD)}{2\sqrt{z \tanh(zD(x))}} \Big|_{z=1/C} \\ &= \frac{(y^2 - y^2 \tanh^2(y)) + y \tanh(y)}{2\sqrt{D} \sqrt{y \tanh(y)}} \Big|_{y=y(\sqrt{D(x)} E)} \\ &= \frac{y^2 - D(x)^2 E^4 + D(x) E^2}{2D(x) E} \Big|_{y=y(\sqrt{D(x)} E)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Система Гамильтона с гамильтонианом $H(x, p, E) = C(x, E)|p|$ имеет вид

$$\frac{dp}{d\tau} = -|p| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D(x)}{y(E\sqrt{D(x)})} \right), \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{|p|} \frac{D(x)}{y(E\sqrt{D(x)})}. \quad (18)$$

В уравнения входит функция $y(\mathcal{E})$ и ее производная y' , что не очень удобно, так как ее нахождение связано с обращением уравнения. Покажем, как можно переписать эту систему, избавившись от $y(\mathcal{E})$.

Вдоль траекторий (P, X) гамильтоновой системы справедливы равенства

$$H(X, P, E) = 0 \iff C(X, E)|P| = 1 \implies y(E\sqrt{D(X)}) = \frac{D(X)}{C(X, E)} = D(X)|P|. \quad (19)$$

Далее, дифференцируя уравнение $\sqrt{y \tanh(y)} = \mathcal{E}$ для $y(\mathcal{E})$ по $\mathcal{E}$, получим

$$y'(\mathcal{E})(\tanh y + y(1 - \tanh^2 y)) = 2\sqrt{y \tanh y}, \quad (20)$$

что дает на решениях (P, X) гамильтоновой системы

$$y'(E\sqrt{D(X)}) = \frac{2y\mathcal{E}}{y^2 + \mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^4} \Big|_{(P,X)} = \frac{2|P|\sqrt{D(X)}E}{D(X)|P|^2 + E^2 - D(X)E^4}. \quad (21)$$

Подставляя эти выражения (19) и (21) в систему Гамильтона, получим

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{p^2 - E^4}{D(x)p^2 + E^2 - D(x)E^4} \cdot \frac{\partial D(x)}{\partial x}, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{p^2}. \quad (22)$$

Чтобы написать канонический оператор, нам нужно также подставить $y|_{(P,X)}$ в выражение (17) для R :

$$R|_{(P,X)} \equiv R(X, P, E) = \frac{D(X)P^2 - D(X)E^4 + E^2}{2E}. \quad (23)$$

Учитывая полученное выражение для R , а также $C(X) = 1/|P|$, получим формулу (11) для канонического оператора в окрестности неособой точки в виде

$$\begin{aligned} \psi_j(x) = & \frac{e^{i\tau/\hbar} e^{-(i\pi/2)\mathbf{m}_j}}{\sqrt{|X_\phi(\tau, \phi)|}} \sqrt{\frac{2E|P(\tau, \phi)|}{D(X(\tau, \phi))P^2 - D(X(\tau, \phi))E^4 + E^2}} \\ & \times A(\tau, \phi) \mathbf{e}_j(\tau, \phi)|_{(\tau, \phi)=(\tau_j(x), \phi_j(x))}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $R = R(x, p, E)$ зависит от p , лучше не выносить (псевдодифференциальный) оператор $1/\sqrt{R(x, \widehat{p}, E)}$ за канонический оператор, а записать ответ в окрестности фокальной точки в виде

$$\begin{aligned} \psi_j(x) = & e^{-(i\pi/2)\mathbf{m}_j^*} e^{i\pi/4} \\ & \times \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|\det(P(\tau, \phi), P_\phi(\tau, \phi))|} e^{i\tau/\hbar} A(\tau, \phi) \mathbf{e}_j(\tau, \phi)}{\sqrt{D(X(\tau, \phi))P^2(\tau, \phi) - D(X(\tau, \phi))E^4 + E^2}} \Big|_{\tau=\tau_j(x, \phi)} d\phi. \end{aligned} \quad (25)$$

ПРИМЕР 4 (возникающий в теории волн на воде с учетом поверхностного натяжения, [4], [15], [16]). Модифицируем гамильтониан из примера 3 следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, p) = F(x, |p|) - E = \sqrt{|p| \tanh(|p|D(x))(1 + \mu(x)|p|^2)} - E, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

где $\mu(x) > 0$ – гладкая функция, отвечающая за поверхностное натяжение жидкости. Положим $\nu(x) = E(\mu(x))^{1/4}$, $\mathcal{E}(x) = E(D(x))^{1/2}$. Равенство $\mathcal{H}(x, p) = 0$ можно переписать в виде $f(y, \mathcal{E}, \nu) = 0$, где

$$f(y, \mathcal{E}, \nu) = y \tanh(y) - \mathcal{E}^2 \left(1 + \frac{y^2 \nu^4}{\mathcal{E}^4} \right)^{-1}$$

– гладкая функция на $\mathbb{R}_+^3$. Поскольку $\partial f / \partial y(y, \mathcal{E}, \nu) > 0$, то согласно теореме о неявной функции равенство $f(y, \mathcal{E}, \nu) = 0$ можно обратить $y = Y(\mathcal{E}, \nu)$ и функция Y гладкая в $(\mathcal{E}, \nu) \in \mathbf{R}_+^2$. Как и выше, гамильтонова система с гамильтонианом $C(x, E)|p|$ имеет вид

$$\frac{dp}{d\tau} = -|p| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D(x)}{Y(E\sqrt{D(x)}, E\mu(x)^{1/4})} \right), \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{|p|} \frac{D(x)}{Y(E\sqrt{D(x)}, E\mu(x)^{1/4})} \quad (26)$$

и может быть упрощена до

$$\frac{dp}{d\tau} = -|p| \left(\frac{1}{y} \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{D(x)}{y^2} \frac{dY}{dx} \right) \Big|_{y=D(x)|p|}, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{p^2}. \quad (27)$$

Здесь dY/dx определяется дифференцированием уравнения $y = Y(\mathcal{E}(x), \nu(x))$:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \tanh(y) + y(1 - \tanh^2(y)) + 2y\mathcal{E}^{-2}\nu^4 \left(1 + y^2 \frac{\nu^4}{\mathcal{E}^4} \right)^{-2} > 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в (27) с учетом $y(E\sqrt{D(X)}) = |P|D(X)$, получим систему, аналогичную (22). Также можно написать выражение для R аналогично (23), и таким образом получить представление для канонического оператора Маслова как в (24) и (25).

С. Ю. Доброхотов и Д. С. Миненков благодарны сотрудникам Центра теоретической физики и Университета Тулон/Юг-Вар за оказанную помощь и гостеприимство. Авторы благодарны В. Е. Назайкинскому за полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1978.
- [3] A. V. Tsiganov, “The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 157–182.
- [4] S. Yu. Dobrokhotov, M. Rouleux, “The semi-classical Maupertuis–Jacobi correspondence for quasi-periodic Hamiltonian flows with applications to linear water waves theory”, *Asymptot. Anal.*, **74**:1-2 (2011), 33–73.
- [5] С. Ю. Доброхотов, М. Руло, “Квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 458–463.
- [6] *Sobolev Spaces in Mathematics. III. Applications in Mathematical Physics*, Int. Math. Ser. (N. Y.), **10**, Springer, 2009.
- [7] А. Б. Каток, “Эргодические возмущения вырожденных интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 539–576.
- [8] С. Ю. Доброхотов, Г. Н. Макракис, В. Е. Назайкинский, Т. Я. Тудоровский, “Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках”, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 355–386.
- [9] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [10] S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221.
- [11] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.
- [12] Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982.

- [13] В. В. Кучеренко, “Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **1**:3 (1969), 384–406.
- [14] M. I. Katsnelson, *Graphene. Carbon in Two Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [15] С. Ю. Доброхотов, “Методы Маслова в линейной теории гравитационных волн на поверхности жидкости”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 76–80.
- [16] S. Dobrokhotov, P. Zhevandrov, “Asymptotic expansions and the Maslov canonical operator in the linear theory of water waves. I. Main constructions and equations for surface gravity waves”, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 1–31.

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики

им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: dobr@ipmnet.ru

Поступило

29.08.2014

Д. С. Миненков

Институт проблем механики

им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: minenkov.ds@gmail.com

М. Руло

Centre de Physique Théorique, France

Université du Sud Toulon-Var, France

E-mail: rouleux@cpt.univ-mrs.fr