Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Об асимптотических оценках решений уравнений типа Эмдена–Фаулера, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:29:44

Об асимптотических оценках решений уравнений типа Эмдена–Фаулера

В. С. Самовол

В работе рассматриваются уравнения типа Эмдена–Фаулера произвольного порядка. Статья содержит асимптотические оценки неосциллирующих продолжаемых и непродолжаемых решений данных уравнений.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10570

1. Введение. Рассматривается уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= p(x)|y|^\sigma \operatorname{sgn} y, & n \geq 2, \quad \sigma > 1, \\ y &= y(x), \quad p(x) \in C^0, \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad p(x) \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При $n = 2$ и $p(x) = \pm x^\beta$, $x > 0$, $\beta = \operatorname{const}$ это известное уравнение Эмдена–Фаулера (см., например, [1]), связанное с изучением ряда физических процессов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *продолжаемым вправо (влево)*, если оно определено в некоторой окрестности $+\infty$ ($-\infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (1) называется *осциллирующим вправо (влево)*, если для всякого x , принадлежащего его области определения, найдется такое $\tilde{x} > x$ ($\tilde{x} < x$), что $y(\tilde{x}) = 0$.

Непродолжаемыми (неосциллирующими) в каком-либо направлении мы будем считать решения, не являющиеся продолжаемыми (осциллирующими) в соответствующем направлении.

В данной статье мы рассматриваем неосциллирующие продолжаемые и непродолжаемые вправо (влево) решения уравнения (1) и представим асимптотические оценки таких решений при $x \rightarrow \pm\infty$, а также решений, уходящих в бесконечность при $x \rightarrow a \neq \pm\infty$.

Следующая теорема [2] устанавливает существование непродолжаемых неосциллирующих решений уравнения (1) при $p(x) > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Если $p(x) > 0$, то для любого числа a существует непродолжаемое вправо решение $y(x)$ уравнения (1), обладающее свойством

$$\lim_{x \rightarrow a-0} |y^{(i)}(x)| = +\infty, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (2)$$

Аналогичное утверждение верно и для непродолжаемых влево решений рассматриваемого уравнения.

Для указанных в теореме 1 решений имеют место следующие асимптотические оценки [3].

ТЕОРЕМА 2. Если решение $y(x)$ обладает свойством (2) при некотором a , то в некоторой левой окрестности точки $x = a$ справедливы неравенства

$$b(a - x)^{n/(1-\sigma)} \leq |y(x)| \leq B(a - x)^{n/(1-\sigma)}, \quad B, b = \text{const}, \quad B \geq b > 0. \quad (3)$$

Аналогичное утверждение верно и для непродолжаемых влево решений рассматриваемого уравнения.

Приведенные теоремы впервые были получены В. А. Кондратьевым и автором этих строк в 1980 г. и излагались вместе с доказательствами в докладе на Семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ [3]. Близкие результаты впоследствии были получены и в других работах (см., например, [4]). Доказательства этих результатов перегружены, на наш взгляд, техническими деталями и ссылками на другие работы. Ниже мы изложим относительно простое прямое доказательство теоремы 2.

Известно (см. [4], а также [2; теоремы 2 и 5]), что при выполнении следующего условия

$$|p(x)| \geq cx^{-n}, \quad c = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0, \quad (4)$$

уравнение (1) при $(-1)^n p(x) > 0$ имеет нетривиальные продолжаемые вправо неосциллирующие решения. При этом для любого такого решения $y^{(i)}(x)$, $0 \leq i \leq n - 1$ являются монотонными функциями, и выполняется следующее условие:

$$y^{(i)}(x) y^{(i+1)}(x) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad 0 \leq i \leq n - 1. \quad (5)$$

Приведенная ниже теорема 3 содержит верхние асимптотические оценки данных решений.

Если $(-1)^n p(x) < 0$, то при условии (4) уравнение (1) не имеет нетривиальных продолжаемых вправо неосциллирующих решений (см. [5], а также [2; теоремы 3 и 4]).

ТЕОРЕМА 3. Если в уравнении (1) выполнено условие

$$(-1)^n p(x) \geq c_1 x^{-m}, \quad x \geq x_0 > 0, \quad c_1, m = \text{const}, \quad c_1 > 0, \quad m \leq n, \quad (6)$$

то для его продолжаемых вправо сохраняющих знак решений имеют место следующие оценки:

- если $n > m$, то

$$|y(x)| \leq Dx^{(m-n)/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0; \quad (7)$$

- если $n = m$, то

$$|y(x)| \leq D |\ln x|^{-1/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 + 1. \quad (8)$$

Используя теорему 3, можно получить следующее утверждение, уточняющее теорему 5 из [6].

ТЕОРЕМА 4. Если в уравнении (1) выполнено условие

$$|p(x)| \geq c_1 x^{-n-\beta(\sigma-1)}, \quad x \geq x_0 > 0, \quad c_1, \beta = \text{const}, \quad c_1 > 0, \quad 0 \leq \beta \leq n-1, \quad (9)$$

то любое продолжаемое вправо сохраняющее знак решение данного уравнения удовлетворяет одной из следующих оценок:

• если

$$\beta = 0, \quad (-1)^n p(x) > 0, \quad (10)$$

то

$$|y(x)| \leq D |\ln x|^{-1/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 + 1; \quad (11)$$

• если

$$k-1 < \beta < k, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (-1)^{n-k} p(x) > 0, \quad (12)$$

то

$$|y(x)| \leq D x^\beta, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0; \quad (13)$$

• если

$$\beta = k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (-1)^{n-k} p(x) > 0, \quad (14)$$

то

$$|y(x)| \leq D x^\beta |\ln x|^{-1/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 + 1; \quad (15)$$

• если

$$k-1 < \beta \leq k, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (-1)^{n-k} p(x) < 0, \quad (16)$$

то

$$|y(x)| \leq D x^{k-1}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\beta = 0$ и $(-1)^n p(x) < 0$, то, как это было отмечено выше, уравнение (1) при условии (9) не имеет продолжаемых вправо сохраняющих знак решений.

Утверждения, содержащиеся в теоремах 3 и 4, естественным образом переносятся на продолжаемые влево неосциллирующие решения уравнения (1).

2. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = |y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \quad n \geq 2, \quad \sigma > 1. \quad (18)$$

Покажем, что оно имеет решение вида (2). Для определенности будем считать в (2) $a = 1$. Здесь и ниже мы пользуемся терминологией, принятой в [7] и [8]. Многогранник Ньютона данного уравнения представляет собой отрезок $[Q_1, Q_2]$, $Q_1 = (-n, 1)$, $Q_2 = (0, \sigma)$, нормалью к которому является вектор $[1, \beta]$, $\beta = n(1 - \sigma)^{-1}$. Укороченное уравнение, соответствующее этому отрезку, совпадает с полным уравнением (18). Согласно рекомендациям [7] находим степенное решение уравнения (18) $y(x) = c(-x+1)^\beta$, $x < 1$. Подстановкой получаем

$$c = ((-1)^n \beta(\beta-1) \cdots (\beta-n+1))^{1/(\sigma-1)}.$$

Таким образом, $y(x) = c(-x+1)^\beta$, $x < 1$, является решением уравнения (18), для которого оценки (3) выполняются как равенства.

ПРИМЕР 2. Усложним предыдущий пример. Рассмотрим уравнение с переменным коэффициентом

$$y''' = (1 + x^2)y^2. \quad (19)$$

Покажем, что данное уравнение имеет решение $y(x) = 60(-x)^{-3}(1 + o(1))$, очевидно удовлетворяющее оценкам (3), где $a = 0$.

Многогранник Ньютона этого уравнения представляет собой треугольник с вершинами $Q_1 = (-3, 1)$, $Q_2 = (0, 2)$, $Q_3 = (2, 2)$. Рассмотрим укороченное уравнение, соответствующее ребру $[Q_1, Q_2]$:

$$y''' = y^2.$$

Степенное решение данного уравнения имеет вид $y = -60x^{-3}$. Вычислим критические числа данного решения (см. [8; п. 1.4]). Первая вариация здесь имеет вид

$$\frac{d^3}{dx^3} - 2y,$$

а соответствующее характеристическое уравнение

$$k(k-1)(k-2) + 120 = 0.$$

Единственный вещественный корень данного уравнения $k = -4$ не является критическим, поскольку он меньше порядка решения укороченного уравнения. Следовательно, по теореме 3.4 из [8] полное уравнение (19) имеет решение, имеющее вид сходящегося степенного ряда

$$y = -60x^{-3} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j \right).$$

Очевидно, что данное решение удовлетворяет оценкам (3), где $a = 0$.

Доказанный факт можно обосновать также с помощью других соображений (этот подход использован в [9]). Для этого сделаем в (19) преобразование $y = (c+z)(-x)^{-3}$, $t = \ln(-x)$, $x < 0$, где постоянную c определим позже. Получим уравнение

$$z_t''' - 12z_t'' + 47z_t' - 60(c+z) = -(c+z)^2(1 + e^{2t}).$$

Полагая $c = 60$ и обозначая $z_t^{(i)} = u_{i+1}$, $0 \leq i \leq 2$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\|u\| = \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq 3} u_j^2}$, получаем для функции $u(t)$ в малой окрестности нуля систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + F(u)f(t) + g(t), & \|f(t)\| + \|g(t)\| &\leq D_1 e^{2t}, \\ F(u) &\in C^\infty, & F(0) &= 0, \quad D_1 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

При малом $\delta > 0$ эта система уравнений имеет решение $u = u(t)$, $\|u(t)\| = o(e^{\delta t})$ при $t \rightarrow -\infty$. Это доказывается с помощью методов, близких к использованным в [9; с. 101–106]. Отсюда получаем, что уравнение (19) имеет решение

$$y(x) = 60(-x)^{-3}(1 + o((-x)^\delta)), \quad x < 0, \quad \delta > 0,$$

удовлетворяющее оценкам (3).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} = x^{-3}y^2.$$

Его носителем является отрезок $[Q_1, Q_2]$, $Q_1 = (-4, 1)$, $Q_2 = (-3, 2)$, нормалью к которому служит вектор $n = (1, -1)$. Согласно [7] ищем решение рассматриваемого уравнения в виде $y = cx^{-1}$. Подстановкой определяем $c = 24$. Итак, данное уравнение имеет решение $y(x) = 24x^{-1}$, удовлетворяющее оценке (7), которая здесь превращается в равенство.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} = x^{-6}y^2. \quad (20)$$

Данное уравнение рассмотрено в теореме 4 и относится к случаю, описанному в (14) (где $\beta = 2$). Носителем уравнения служит отрезок $[Q_1, Q_2]$, $Q_1 = (-4, 1)$, $Q_2 = (-6, 2)$. Сделаем преобразование $y = x^2z$, $t = \ln(x)$, после которого уравнение (20) преобразуется в следующее:

$$z_t^{(4)} + 2z_t''' - z_t'' - 2z_t' = z^2. \quad (21)$$

Правому ребру многогранника Ньютона этого уравнения соответствует укороченное уравнение $-2z_t' = z^2$, решение которого имеет вид $z = z_0(t) = 2t^{-1}$. После замены $z = w + z_0(t)$ уравнение (21) примет вид

$$w_t^{(4)} + 2w_t''' - w_t'' - 2w_t' = w^2 + 4t^{-1}w + O(t^{-3}).$$

Анализ этого уравнения показывает, что у него существует решение $w(t) = o(t^{-1-\delta})$, $\delta > 0$ (доказательство этого мы здесь приводить не будем). Это означает существование решения уравнения (20) $y = 2x^2(\ln x)^{-1}(1 + o(\ln x)^{-\delta})$, удовлетворяющего оценке (15).

ПРИМЕР 5. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} = -x^{-4-\beta}y^2, \quad 1 < \beta \leq 2. \quad (22)$$

Данное уравнение рассмотрено в теореме 4 и относится к случаю, описанному в (16) (где $k = 2$). Рассмотрим любое продолжаемое вправо положительное решение $y(x)$ данного уравнения. Из (22) следует, что $y'''(x)$ является убывающей функцией. Ее предел при $x \rightarrow +\infty$ не может быть отрицательным. Он не может быть и положительным, так как в этом случае при больших x было бы $y(x) \geq Dx^3$, $D = \text{const} > 0$ и $y^{(4)} \leq -D_1$, $D_1 = \text{const} > 0$, что противоречит допущению о положительном пределе $y'''(x)$. Следовательно, указанный предел должен равняться нулю и функция $y''(x)$ является возрастающей. Ее предел при $x \rightarrow +\infty$ также не может быть положительным. Действительно, в этом случае функция $y(x)$ возрастает и из (22) после интегрирования на промежутке $[x, +\infty)$ получаем, что $y''' \geq Dx^{-3-\beta}y^2$, $D = \text{const} > 0$. Но из леммы 1 из [2] следует, что в этом случае решение $y(x)$ не может быть продолжаемым вправо. Итак, предел $y''(x)$ должен равняться нулю; следовательно, $y''(x) < 0$ и функция $y'(x)$ является убывающей. Отсюда следует, что $y(x) \leq D_2x$, $D_2 = \text{const} > 0$, т.е. рассматриваемое решение удовлетворяет оценке (17).

Приведенные выше примеры иллюстрируют точность результатов, содержащихся в сформулированных выше теоремах.

3. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1 приведено в [2].

Доказательство теоремы 2. Здесь и ниже, когда нам будет необходимо показать ограниченность какой-либо величины все равно какой константой, будем пользоваться так называемой “универсальной” константой $D > 0$, считая $D + D = D$, $D^\beta = D$ ($\beta > 0$).

Ясно, что достаточно рассмотреть решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее (2), для которого в некоторой левой окрестности точки a

$$y^{(i)}(x) > 0, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (23)$$

Пусть $[x_0, a)$ – некоторый промежуток, в котором выполняются неравенства (23).

Умножая обе части уравнения (1) на $y'(x)$ и интегрируя его на промежутке $[x_0, x)$, $x_0 \leq x < a$, получаем неравенство

$$y^{(n-1)}(x)y'(x) - y^{(n-1)}(x_0)y'(x_0) \geq D(y^{\sigma+1}(x) - y^{\sigma+1}(x_0)),$$

откуда очевидно следует, что в некоторой левой окрестности точки a будет выполняться неравенство $y^{(n-1)}(x)y'(x) \geq Dy^{\sigma+1}(x)$. Без ограничения общности будем считать, что это так в промежутке $[x_0, a)$. Опять умножим полученное неравенство на $y'(x)$ и проинтегрируем его на указанном промежутке. В результате получаем неравенство $y^{(n-2)}(y')^2 \geq Dy^{\sigma+2}$ (здесь и ниже все функции берутся в точке x). Продолжая действовать подобным образом, приходим в итоге к неравенству

$$y' \geq Dy^{(\sigma+n-1)/n}.$$

Интегрируя полученное неравенство на промежутке $[x, a)$ и учитывая (2), получаем правую часть требуемой оценки (3).

Приведем теперь несложное доказательство левой части оценки (3), основанное на рассуждениях, приведенных в [4].

Преобразование $z(t) = t^{n-1}y(a-1/t)$ приводит уравнение (1) к виду

$$z^{(n)} = \tilde{p}(t)|z|^\sigma \operatorname{sgn} z, \quad \tilde{p}(t) = t^{-n-(n-1)\sigma-1}p\left(a - \frac{1}{t}\right). \quad (24)$$

При этом анализируемое решение $y(x)$ переходит в решение $z(t)$ уравнения (24), определенное при всех $t \geq t_0$, $t_0 = (a - x_0)^{-1}$. Кроме того, прямая проверка показывает, что $z^{(i)}(t) > 0$, $t \geq t_0$, $0 \leq i \leq n-1$ и $z^{(n-1)}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что при $t \geq t_0$

$$z(t) \leq Dt^{n-1}z^{(n-1)}(t). \quad (25)$$

Подставляя (25) в уравнение (24) и обозначая $u = z^{(n-1)}(t)$, получаем, что функция $u(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству $u' \leq Du^\sigma t^{-n-1}$. Интегрирование данного неравенства на промежутке $[t, +\infty)$, $t \geq t_0$ приводит к оценке

$$u(t) = z^{(n-1)}(t) \geq Dt^{n/(\sigma-1)}, \quad t \geq t_0.$$

Отсюда очевидно, что

$$z(t) \geq Dt^{n/(\sigma-1)+n-1}, \quad t \geq t_0,$$

из чего следует левая часть требуемой оценки (3). Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Если в уравнении (1) выполнено условие (6), где $m \leq 0$, то для его продолжаемых вправо сохраняющих знак решений выполняется оценка (7).

ЛЕММА 2. Если в уравнении (1) выполнено условие (6), где $m > 0$, то для его продолжаемых вправо положительных решений выполняется следующая оценка

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (y')^{n-k} (yx^{-1})^k \geq Dy^{\sigma+n-1} x^{-m}, \quad D = \text{const} > 0. \quad (26)$$

Отметим, что лемма 1 является утверждением теоремы 3 при $m \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Докажем (7) при $m = 0$. Без ограничения общности будем рассматривать только положительные решения вида (5) уравнения (1). Умножив обе части уравнения (1) на $(-1)^n y'$ и проинтегрировав его на промежутке $[x, x_1]$, $x_0 \leq x \leq x_1$ с учетом (6), где $m = 0$, получаем

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x) - (-1)^n \int_x^{x_1} y^{(n-1)} y'' dx &\leq G_1(x_1) - G_1(x), \\ F(x) &= (-1)^n y^{(n-1)} y', \quad G_1(x) = Dy^{\sigma+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Устремляя в (27) $x_1 \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству

$$(-1)^n y^{(n-1)} y' \geq Dy^{\sigma+1}, \quad D = \text{const} > 0. \quad (28)$$

Умножая обе части (28) на y' и интегрируя получившееся неравенство, аналогично получаем

$$(-1)^n y^{(n-2)} y'' \geq Dy^{\sigma+2}, \quad D = \text{const} > 0.$$

Продолжая рассуждение, в итоге получаем неравенство

$$(-1)^n (y')^n \geq Dy^{\sigma+n-1}, \quad D = \text{const} > 0,$$

интегрирование которого на промежутке $[x_0, x]$ приводит к искомой оценке (7), которая здесь имеет вид

$$y(x) \leq Dx^{-n/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0. \quad (29)$$

Лемма при $m = 0$ доказана.

Зафиксируем теперь некоторое число A , $1 < A < (\sigma + 1)/(\sigma - 1)$, и определим следующие числа:

$$m_0 = 0, \quad m_k = n(A + \dots + A^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Покажем справедливость нашей леммы при $0 < -m \leq m_1$. Действуем так же, как и при $m = 0$. После умножения (1) на $(-1)^n y'$ и интегрирования получаем неравенство

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x) &\leq G_2(x_1) - G_2(x), \\ F(x) &= (-1)^n y^{(n-1)} y', \quad G_2(x) = Dy^{\sigma+1} x^{-m}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим теперь, что если (6) выполняется при $m < 0$, то оно выполняется и при $m = 0$. Следовательно, имеет место оценка (29), из чего следует, что

$$G_2(x) \leq Dx^\beta, \quad \beta = \frac{-n(\sigma+1)}{\sigma-1} + m_1 < 0, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0.$$

Устремляя теперь в (31) $x_1 \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству

$$(-1)^n y^{(n-1)} y' \geq Dy^{\sigma+1} x^{-m}, \quad D = \text{const} > 0. \quad (32)$$

Продолжая аналогичные рассуждения, в итоге получаем неравенство

$$(-1)^n (y')^n \geq Dy^{\sigma+n-1} x^{-m}, \quad D = \text{const} > 0, \quad (33)$$

интегрирование которого на промежутке $[x_0, x]$ дает искомую оценку

$$y(x) \leq Dx^{(-n+m)/(\sigma-1)}, \quad D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0. \quad (34)$$

Итак, утверждение леммы 1 доказано при $0 < -m \leq m_1$.

Проведем индуктивное рассуждение, из которого будет следовать справедливость данной леммы при любом $m \leq 0$. Пусть утверждение леммы верно при $0 < -m \leq m_K$, $K \geq 1$; докажем его при $m_K < -m \leq m_{K+1}$.

После умножения (1) на $(-1)^n y'$ и интегрирования получаем неравенство (31). Если (6) выполняется при $-m > m_K$, то оно выполняется и при $-m = m_K$. Следовательно, имеет место оценка (34), где $-m = m_K$, из чего следует, что

$$G_2(x) \leq Dx^\eta, \quad \eta = \frac{-(n+m_K)(\sigma+1)}{\sigma-1} + m_{K+1} < 0, \\ D = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0.$$

Устремляя теперь в (31) $x_1 \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству (32). Продолжая рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем неравенство (33) и затем оценку (34) при $m_K < -m \leq m_{K+1}$, что завершает доказательство леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Умножим обе части (1) на $(-1)^n y'$ и проинтегрируем полученное уравнение на промежутке $[x, x_1]$, $x_0 \leq x \leq x_1$ с учетом (6), где $m > 0$. В результате получим

$$F_1(x_1) - F_1(x) \leq G_1(x_1) - G_1(x) + D \int_x^{x_1} y^{\sigma+1} x^{-m-1} dx, \quad (35) \\ F_1(x) = (-1)^n y^{(n-1)} y', \quad G_1(x) = Dy^{\sigma+1} x^{-m}, \quad D = \text{const} > 0.$$

Мы здесь учли, что $(-1)^n \int_x^{x_1} y^{(n-1)} y'' dx < 0$.

Умножим теперь обе части уравнения (1) на yx^{-1} и проинтегрируем его на том же промежутке $[x, x_1]$. Получаем неравенство

$$\int_x^{x_1} y^{\sigma+1} x^{-m-1} dx \leq D(H_1(x) - H_1(x_1)), \quad H_1(x) = (-1)^{n-1} y^{(n-1)} yx^{-1}. \quad (36)$$

Здесь учтено, что $(-1)^n \int_x^{x_1} y^{(n-1)} (yx^{-1})' dx > 0$.

Подставляя (36) в (35) и устремляя $x_1 \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству

$$F_1(x) + H_1(x) \geq Dy^{\sigma+1}x^{-m}.$$

Рассуждая по индукции аналогичным образом, нетрудно видеть справедливость следующей оценки при любом $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$y^{(n-q)} \sum_{k=0}^q (-1)^{n-k} (y')^{q-k} (yx^{-1})^k \geq Dy^{\sigma+q}x^{-m}. \quad (37)$$

Полагая в (37) $q = n-1$, получаем требуемую оценку (26). Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Без ограничения общности будем рассматривать только положительные решения уравнения (1).

При $m \leq 0$ утверждение теоремы доказано в лемме 1. Рассмотрим случай $0 < m < n$. Тогда имеет место (26) и, следовательно, найдется такое число $C > 0$, что при любом $x \geq x_0$ будет выполнено либо одно из следующих двух неравенств:

$$yx^{-1} > Cy^{(\sigma+n-1)/n}x^{-m/n}, \quad (38)$$

$$-y' > yx^{-1}, \quad (39)$$

либо оба эти неравенства одновременно. Заметим, что если выполняется (39), то с учетом (26), очевидно, имеет место и следующее неравенство:

$$-y' > Cy^{(\sigma+n-1)/n}x^{-m/n}. \quad (40)$$

За счет линейной замены переменной y можно добиться того, что в (38) и (40) будет $C = 1$. Ниже будем считать это условие выполненным.

Очевидно, что если существует такое число $\tilde{x} \geq x_0$, что при $x \geq \tilde{x}$ будет выполнено (38) (или (40)), то и оценка (7) будет выполняться. Рассмотрим теперь случай, когда имеется такая последовательность точек $x_{j+1} > x_j \geq x_0$, $j = 1, 2, \dots$, что при $x \in \Omega_{2q+1} = [x_{2q+1}, x_{2q+2})$ выполняется (38), а при $x \in \Omega_{2q+2} = [x_{2q+2}, x_{2q+3})$ выполняется (39). При этом неравенства (38) и (39) превращаются в равенства в точках x_{2q+2} и x_{2q+3} , соответственно. Из последнего условия, очевидно, следует, что $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \infty$. При $x \in \Omega_{2q+1}$ оценка (7), очевидно, выполнена. Рассмотрим теперь промежуток Ω_{2q+2} .

Пусть сначала $a = (n-m)(\sigma-1)^{-1} < 1$. Если $x \in \Omega_{2q+2}$, то из (39) следует, что

$$y < y_{2q+2}x_{2q+2}x^{-1}. \quad (41)$$

Но $y_{2q+2} = (x_{2q+2})^{-a}$. Подставляя это в (41), получим при $a = (n-m)(\sigma-1)^{-1} < 1$

$$y < (x_{2q+2})^{1-a}x^{-1} = \left(\frac{x_{2q+2}}{x}\right)^{1-a}x^{-a} \leq x^{-a}$$

и, следовательно, при $a < 1$ оценка (7) верна при любом $x \in \Omega_{2q+2}$ с $D = 1$.

Пусть теперь $a \geq 1$. При $x \in \Omega_{2q+2}$, проинтегрировав (40), получим

$$y < \left((y_{2q+2})^{(1-\sigma)/n} + \frac{1}{a} (x^{(n-m)/n} - x_{2q+2}^{(n-m)/n}) \right)^{n/(1-\sigma)}. \quad (42)$$

Подставляя в (42) $y_{2q+2} = (x_{2q+2})^{-a}$, приходим к неравенству

$$y < \left(\left(1 - \frac{1}{a} \right) x_{2q+2}^{(n-m)/n} + \frac{1}{a} x^{(n-m)/n} \right)^{n/(1-\sigma)} \leq Dx^{(m-n)/(\sigma-1)}, \quad D = a^{n/(\sigma-1)},$$

и оценка (7) доказана при любом $x \in \Omega_{2q+2}$ с $D = a^{n/(\sigma-1)}$. Таким образом, теорема 3 доказана при всех $m < n$.

Рассмотрим теперь последний случай, когда $m = n$. Если в точке x выполняется неравенство $-y' \leq yx^{-1}$, то из (26) следует, что

$$-y' > B_1 y^\sigma x^{-1}, \quad B_1 = \text{const} > 0. \quad (43)$$

Если же $-y' > yx^{-1}$, то из (26) получим, что

$$-y' > B_2 y^{(\sigma+n-1)/n} x^{-1}, \quad B_2 = \text{const} > 0. \quad (44)$$

При этом числа B_1, B_2 зависят только от n и постоянной D из (26). Без ограничения общности можно считать, что в (43) и (44) $B_1 = B_2$. Пусть x_1 таково, что при $x \geq x_1$ $y(x) < 1$. Тогда из (44) следует (43). Таким образом, для решения $y(x)$ при $x \geq x_1$ выполняется неравенство (43), интегрирование которого дает оценку (7). Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. При условии (10) оценка (11) доказана в теореме 3. Пусть теперь $0 < \beta \leq n-1$. Определим такое целое $k \in \{1, \dots, n-1\}$, что $k-1 < \beta \leq k$. Заметим, что при больших x функции $y^{(j)}(x)$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$ являются монотонными. Докажем, что при $x \rightarrow +\infty$ все $y^{(j)} \rightarrow 0$, $k \leq j \leq n-1$. Пусть $j = n-1$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(n-1)}(x) = D, \quad 0 < D \leq +\infty$$

(здесь и ниже используем “универсальную” константу $D > 0$). Если $p(x) > 0$, то это противоречит лемме 1 из [2]. В случае $p(x) < 0$, поскольку при больших x будет $y \geq Dx^{n-1}$ и $y^{(n)} \leq -Dx^{(n-1)\sigma-n-\beta(\sigma-1)}$, откуда получим $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(n-1)}(x) = -\infty$, что невозможно. Пусть теперь при $x \rightarrow +\infty$

$$y^{(m)} \rightarrow C, \quad 0 < C \leq +\infty, \quad y^{(j)} \rightarrow 0, \quad 1 \leq k \leq m < j \leq n-1.$$

Тогда при больших x функция $y(x)$ возрастает и, последовательно интегрируя уравнение (1) на промежутке $[x, +\infty)$, по индукции получаем

$$|y^{(j)}| \geq Dy^\sigma x^{-j-\beta(\sigma-1)}, \quad j \in \{m+1, \dots, n-1\}.$$

Если $y^{(m+1)}(x) > 0$, то это противоречит лемме 1 из [2]. Если же $y^{(m+1)}(x) < 0$, то, учитывая, что при больших x будет $y \geq Dx^m$ и $y^{(m+1)} \leq -Dx^{m\sigma-m-1-\beta(\sigma-1)}$, получим $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(m)}(x) = -\infty$, что невозможно.

Итак, доказано, что при $x \rightarrow +\infty$ все $y^{(j)} \rightarrow 0$, $k \leq j \leq n-1$. Кроме того, при больших значениях x будет выполнено условие

$$y^{(j+1)}(x)y^{(j)}(x) < 0, \quad k \leq j \leq n-1. \quad (45)$$

Из этого следует, что $(-1)^{n-k} \text{sgn } p(x)y^{(k)}(x) > 0$.

Если выполнено условие (16), то $y^{(k)}(x) < 0$, т.е., функция $y^{(k-1)}(x)$ будет убывать, из чего очевидно следует (17).

Пусть теперь выполняются условия (12) или (14). Тогда будет верно неравенство $y^{(k)}(x) > 0$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(k-1)}(x) < +\infty$, то $y(x) \leq Dx^{k-1}$ и утверждение теоремы выполняется (с учетом $0 \leq k-1 < \beta \leq k$).

Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(k-1)}(x) = +\infty$. Тогда при больших значениях x все функции $y^{(j)}(x)$, $0 \leq j \leq k-1$ будут положительными. Ниже будем считать, что эти условия выполнены при $x \geq x_0$. Кроме того, $y^{(k)}(x)$ является убывающей функцией, стремящейся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Покажем теперь справедливость при больших x следующей оценки:

$$y^{(j)}(x) \geq \frac{xy^{(j+1)}(x)}{D}, \quad 0 \leq j \leq k-1. \quad (46)$$

Очевидно, что при больших x вследствие убывания функции $y^{(k)}(x)$ будет верно следующее неравенство:

$$y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x y^{(k)}(t) dt \geq xy^{(k)}(x).$$

Таким образом, (46) выполнено при $j = k-1$, $D = 1$.

Допустим теперь, что (46) выполняется при $0 < m \leq j \leq k-1$, $x \geq x_1 > 0$. Докажем, что оценка (46) выполняется при $j = m-1$.

Покажем, что при некотором $D_1 > 0$ выполняются следующие два неравенства:

$$y^{(m-1)}(x_1) > \frac{x_1 y^{(m)}(x_1)}{D_1}, \quad (47)$$

$$y^{(m)}(x) \geq \frac{y^{(m)}(x)}{D_1} + \frac{xy^{(m+1)}(x)}{D_1}, \quad x \geq x_1. \quad (48)$$

Первое из этих неравенств удовлетворяется при

$$D_1 > x_1 y^{(m)}(x_1) (y^{(m-1)}(x_1))^{-1}.$$

Второе неравенство следует из (46) при $j = m$ и $D_1 \geq D + 1$.

Из (47) и (48) несложно получить следующую оценку:

$$y^{(m-1)}(x) = y^{(m-1)}(x_1) + \int_{x_1}^x y^{(m)}(t) dt \geq \frac{xy^{(m)}(x)}{D_1}. \quad (49)$$

Действительно, как следует из (47) и (48), разность функций, находящихся в левой и правой части неравенства (49), в точке x_1 положительна, в то время, как разность их производных неотрицательна при $x \geq x_1$. Из неравенства (49) следует справедливость оценки (46) при $j = m-1$. Таким образом, оценка (46) доказана при всех $0 \leq j \leq k-1$ и $x \geq x_1 > 0$. Отсюда получаем, что

$$y(x) \geq D_2 x^k y^{(k)}(x), \quad D_2 = \text{const} > 0. \quad (50)$$

Подставляя неравенство (50) в (1) и обозначая $z = y^{(k)}(x)$, получаем с учетом $(-1)^{n-k}p(x) > 0$ уравнение

$$\begin{aligned} (-1)^{n-k}z^{(n-k)} &= z^\sigma p_1(x), \\ p_1(x) &\geq D_3 x^{-q}, \quad q = n - k + (\beta - k)(\sigma - 1), \\ D_3 &= \text{const} > 0, \quad x \geq x_1 > 0. \end{aligned}$$

Применяя к данному уравнению теорему 3, получаем либо

$$z = y^{(k)}(x) \leq D_4 x^{\beta-k}, \quad D_4 = \text{const} > 0,$$

если $k - 1 < \beta < k$, либо

$$z = y^{(k)}(x) \leq D_4 (\ln x)^{-1/(\sigma-1)}, \quad D_4 = \text{const} > 0,$$

если $\beta = k$. Интегрируя эти неравенства, получаем, соответственно, оценки (13) и (15).

Теорема 4 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2003.
- [2] В. С. Самовол, “О решениях уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Матем. заметки*, **95:5** (2014), 775–789.
- [3] В. А. Кондратьев, В. С. Самовол, “О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Дифференц. уравнения*, **17:4** (1981), 749–750.
- [4] И. Т. Кигурадзе, Т. Ф. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990.
- [5] И. Т. Кигурадзе, “О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n \text{sign } u = 0$ ”, *Матем. сб.*, **65:2** (1964), 172–187.
- [6] В. С. Самовол, “О неосциллирующих решениях уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Матем. заметки*, **95:6** (2014), 911–925.
- [7] А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*, М., Наука, 1998.
- [8] А. Д. Брюно, “Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения”, *УМН*, **59:3** (2004), 31–80.
- [9] И. В. Астапова, *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, М., ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

В. С. Самовол

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило

30.05.2014